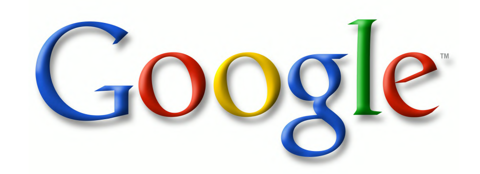
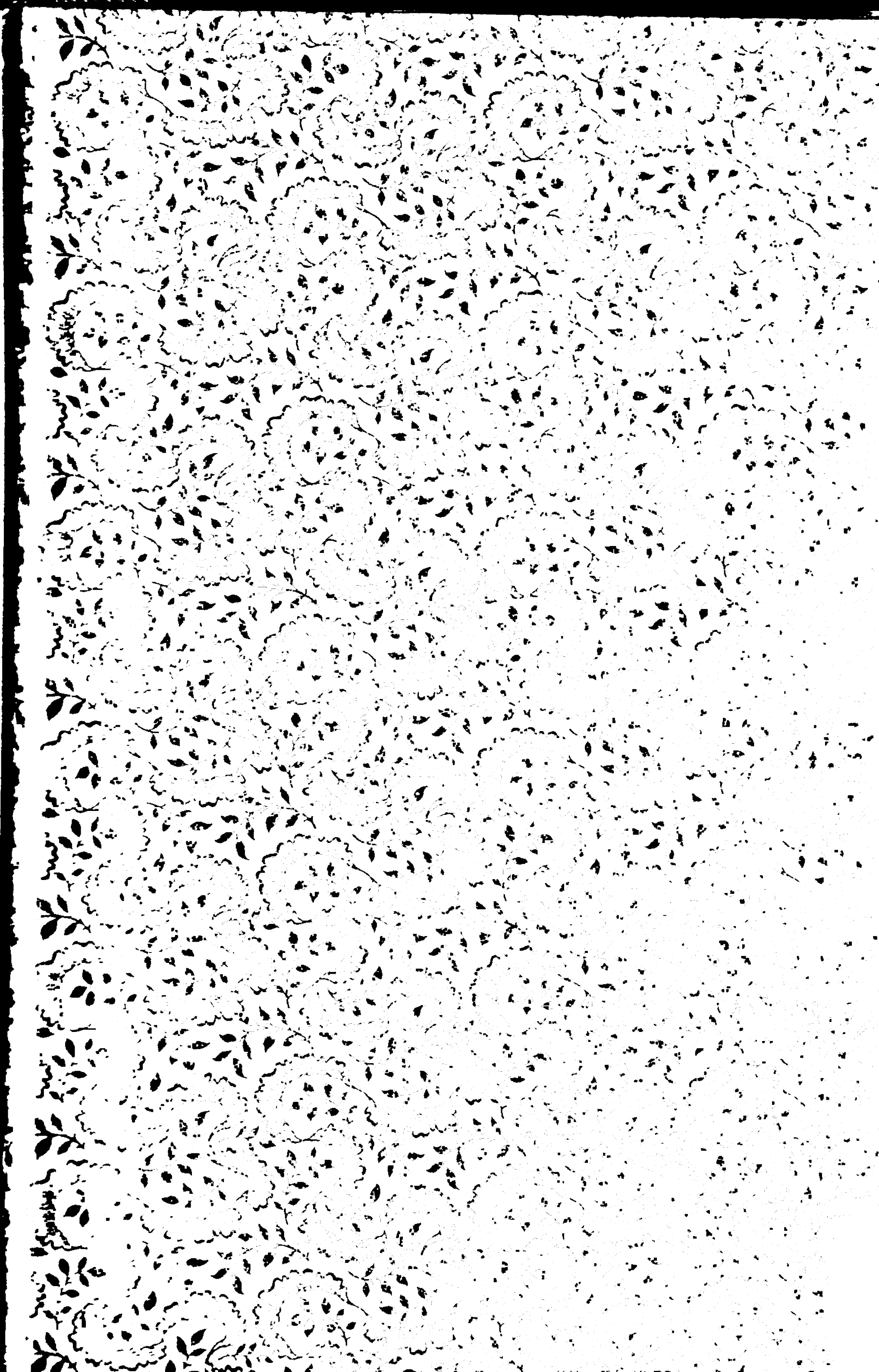
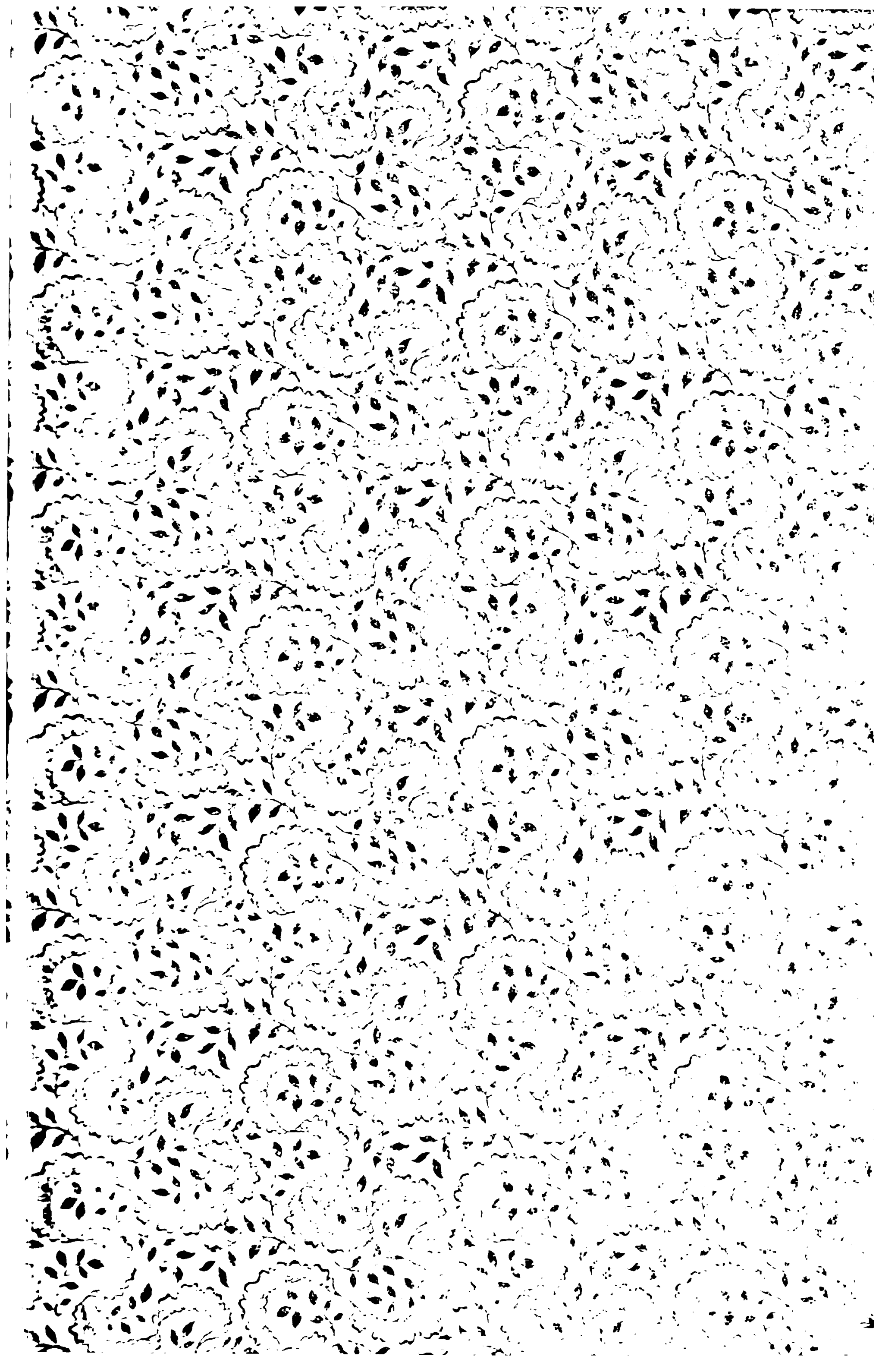














Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.



1901.

München.
Verlag der k. Akademie.
1902.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXI
Jahrgang 1901.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 5. Januar 1901.

Sitzung vom 9. Februar 1901.

Sitzung vom 2. März 1901.

Oeffentliche Sitzung zur Feier des 80. Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten, sowie des 142. Stiftungstages der Akademie am 13. März 1901.

Sitzung vom 4. Mai 1901.

Sitzung vom 8. Juni 1901.

Sitzung vom 6. Juli 1901.

Sitzung vom 9. November 1901.

Seite

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 16. November 1901.

Sitzung vom 7. Dezember 1901.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

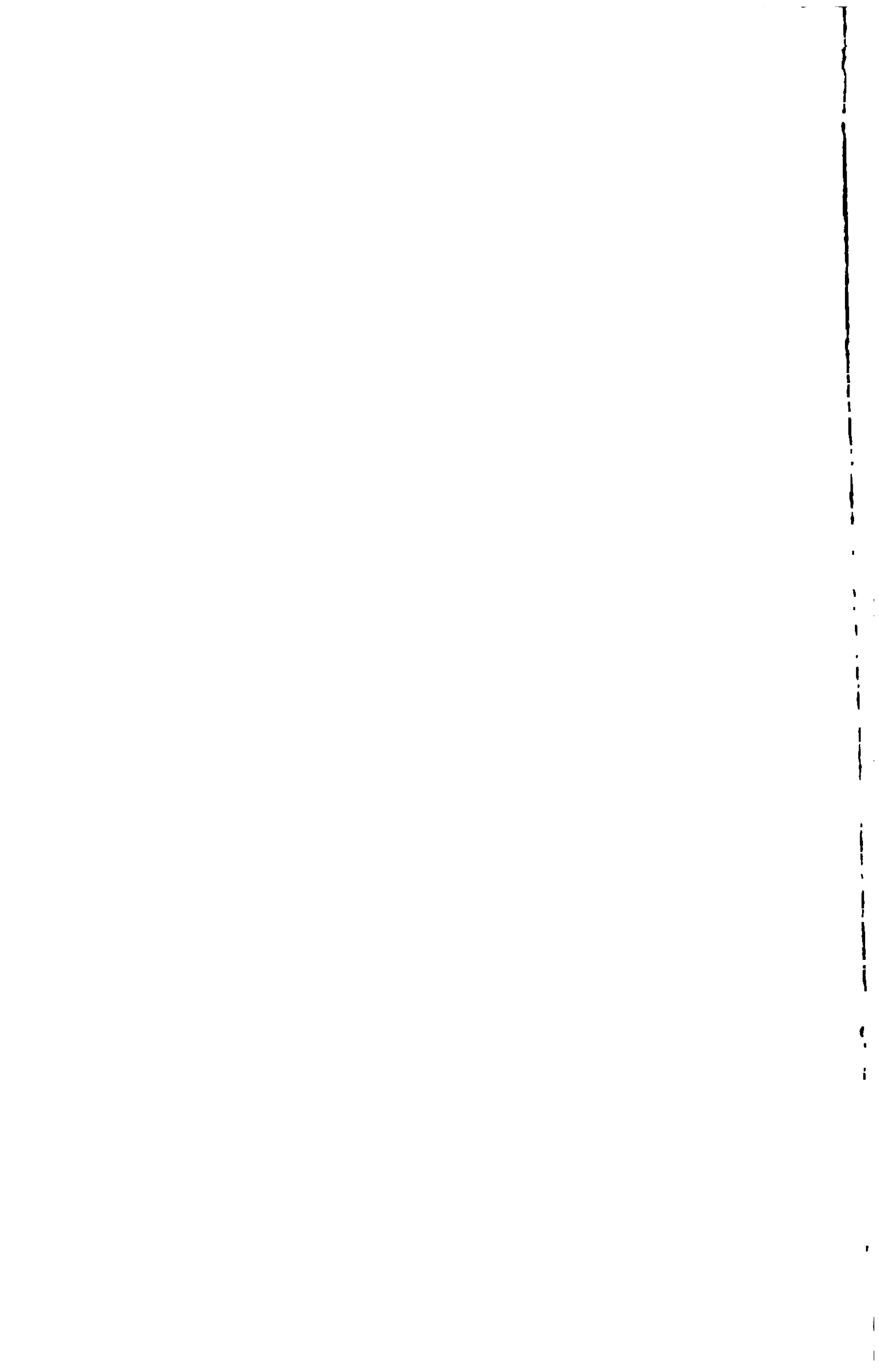
Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. Januar 1901.

1. Herr R. Hartig theilt die Ergebnisse seiner Untersuchungen: „Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf den Bau des Fichtenholzes“ mit. Dieselben werden anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr S. Günther hält einen Vortrag über eine umfassende Untersuchung: „Geographisch-akustische Probleme.“

3. Herr E. Selenka macht eine Mittheilung: „Ueber die Placentaranlage des Lutung (Semnopithecus pruinosus, von Borneo).“



Placentaranlage des Lutung
(Semnopithecus pruinosus, von Borneo).

Von **Emil Selenka.**

(*Eingelaufen 5. Januar.*)

(Mit Taf. I u. II.)

Die Keimblasen der Affen und des Menschen unterscheiden sich ganz auffallend von denen der übrigen Säugetiere durch eine Reihe caenogenetischer Anpassungen.

Wenn es auch nicht leicht gelingen wird, die mechanischen und physiologischen Ursachen festzustellen, welche diese eigentümlichen Sonderbildungen im Primatenkeime hervorgerufen haben, so lässt sich doch die schliessliche Bedeutung und der Wert dieser Anpassungen für die Ernährung der Frucht begreifen.

Um dies Resultat vorweg zu nehmen: Die Anpassungen, welche sowohl Keimblase wie Uterus während der ersten Schwangerschaftswochen aufweisen, haben zur Folge

1) Dass die junge Keimblase alsbald nach ihrer Festheftung schon durch den wertvollsten Stoff, den das Muttertier darzubieten im Stande ist, nämlich durch Blut ernährt wird;

2) Dass der gesamte embryonale wie mütterliche Ernährungsapparat von vornherein in seiner endgültigen Gestalt angelegt wird, und zwar erstens unter Vereinfachung oder Ausschaltung einiger altvererbter provisorischer Vorrichtungen, und zweitens unter Neubildung von Hilfsapparaten. Von provisorischen Nährorganen behauptet allerdings der Dottersack für kurze Zeit seine Rolle als Blut- und Gefässbildner, aber mütter-

licher Nahrungsstoff wird ihm nicht mehr direkt zugeführt, wie dies doch bei Vorläufern der Affen der Fall sein kann.

Die den Primatenkeimen eigenen Neuerungen sind sicherlich zum grossen Teil eingeleitet worden durch die frühzeitige Verwachsung des Eies mit dem Uterusepithel. Zwar sind die jüngsten bisher aufgefundenen Keime des Menschen (das Peters'sche Ei) und der Affen (die hier beschriebene Keimblase) schon zu alt, um die Gestalt, in welcher das Ei sich festsetzte, mit Sicherheit bestimmen zu können; aber die Aehnlichkeit mit solchen Säugetiereiern, welche notorisch schon vor der Gastrulation mit dem Uteringewebe verwachsen, ist so frappant, dass mit grösster Wahrscheinlichkeit auf eine Verwachsung auch des Primaten-Eies mit dem Uterusepithel vor der Bildung des Dotterblatts geschlossen werden muss. Hier können nur neue Beobachtungen das Entwickelungsbild ergänzen und detaillieren. Eine Besprechung dieser Frage findet sich in meinen Studien über „Menschenaffen", zweites und drittes Heft, Wiesbaden, 1899—1900. Die schematische Darstellung der Keimanlage, wie ich mir dieselbe vorstelle, ist in den Figuren 8—12 am Schlusse dieser Mitteilung gegeben.

Die hier abgebildete Keimblase des Lutung giebt nun einige neue Aufschlüsse über die Form und Struktur des jungen Keimes und dessen Hülle, sowie über die frühe Anlage der Placenten.

Die erste Figur stellt den geöffneten und aufgeklappten Uterus in natürlicher Grösse dar. Die ventrale Seite trägt die 1 mm grosse Keimblase, deren Gestalt aus den Abbildungen 2 und 7 zu ersehen ist. Auf der mit dem Uterus innig verwachsenen Fläche erhebt sich eine einzige bereits verästelte Zotte, die ich Zentralzotte nennen will, während der Rand wallförmig vorspringt. Die andere, kuppelförmige Hälfte zeigte sich zum grössten Teil frei und von Uterinschleim umspült; doch muss im lebenden Tiere auch hier schon das Chorion an der gegenüber liegenden Uteruswand festgewachsen gewesen sein, denn in der Mitte der Kuppe macht sich auf Dünnschnitten ein Defekt des Chorion von etwa $^1/_4$ Millimeter Aus-

dehnung nebst Zellenfetzen bemerkbar. Hier riss offenbar beim Eröffnen des Uterus das verwachsene Chorionstück von der Keimblase ab; da dasselbe aber auch von der sekundären Plazenta abgebröckelt ist, wie die Schnitte lehren, so liefert das Präparat leider keine Vorstellung von der Art und Weise der Verwachsung.

Auf der ventralen wie dorsalen Uterus-Innenfläche erhebt sich ein Placentarpolster, entstanden in Folge der Verwachsung der Keimblasenwand mit dem Uterusepithel. Die Polster sind viel ausgedehnter, als die Verwachsungsfläche der Keimblase. —

Nach diesen einleitenden Bemerkungen schreite ich zur genaueren Beschreibung der Keimblase und der Placentarkissen.

Die ganze Keimblase isoliert ist in Figur 2 als Rekonstruktionsbild wiedergegeben.

Folgende Zellschichten sind in der Wand der Keimblase zu erkennen:

1. Das Chorion-Ektoderm, in den Astenden der Zentralzotte mehrschichtig, im Uebrigen einschichtig.

2. Dem Chorionektoderm innen anliegend ein einschichtiges Lager flacher Mesodermzellen, das sich in der Zotte jedoch zu einem lockern Polster verdickt. In der 7. Abbildung ist, soweit es anging, Zelle für Zelle des Schnittes eingetragen. — Mit dem Polstergewebe hängt das Amnionmesoderm direkt zusammen. Diese Verbindungsbrücke verdient die besondere Bezeichnung „Haftstiel"; sie stellt einen Embryophor dar, welcher successive zum Nabelstrang sich umbildet. Eine Zeitlang schwebt der Embryo auf dem Haftstiel frei im Exocoelom. Beiläufig bemerkt, finden sich ähnliche Verhältnisse auch bei Eilingen anderer Säugetiere, z. B. der Wiederkäuer; hier wird in Folge des Amnionschlusses der Embryo nebst seinem Dottersack rings umspült von Flüssigkeit des Exocoeloms und ist zeitweilig allein durch einzelne mesodermale Haftfädchen mit dem Chorion verbunden oder liegt sogar vollständig frei im Exocoelom, bis die Wandung der Allantois sich ausgedehnt hat und mit der Chorionwand zum Allantochorion verschmilzt

(Bonnet, Selenka). — Einen Haftstiel fand Hubrecht am Keime des Tarsius. Die wichtigen Untersuchungen dieses Forschers harren zum grössten Teil noch der Veröffentlichung.

3. Die gesamte Verwachsungsfläche der Keimblase ist überzogen von einer Zellfusion, einem Syncytium. Ed. van Beneden nennt diese Schicht den Plasmodiblast. Die Kerne dieser Plasmodialschicht liegen grösstenteils in einer einzigen Lage (Fig. 7), doch erhebt sich das Syncytinm am peripheren Verwachsungsrande der Keimblase sowie auf den Zellenknospen und an den Enden der Zottenäste zu wechselnden Verdickungen. Bei allen von mir geprüften Affenspecies zeigt diese Plasmodialschicht in den jungen Placenten das gleiche Verhalten; sie ist stets deutlich abgegrenzt vom Chorionektoderm, dessen Zellkerne fast durchweg kleiner sind, sie überwuchert den peripheren Verwachsungsrand der Keimblase auf eine kurze Strecke und dokumentiert sich als gewebszerstörendes Element; das erweisen die in den Ausläufern seines Protoplasmas liegenden Kernbrocken und die an seinen Berührungsflächen in Auflösung begriffenen Gefässwände und Bindegewebszellen. Die Herkunft dieses Plasmodiblasts ist weiter unten besprochen.

Ueber den Bau des Keimlings ist nur wenig zu melden. Fig. 3—5 zeigen denselben vom Rücken, von der Seite und von vorne in plastischen Darstellungen, Fig. 7 im Schnitt.

Das Ektoderm des Keimschildes besteht in einer ovalen verdickten Platte, deren hinteres Ende eine schwache Einsenkung, nämlich die Anlage der Primitivrinne, aufweist; vor derselben ist der Schild schwach buckelartig vorgewölbt, in gleicher Art, wie ich dies von etwas älteren Keimschildern des Cercocebus cynomolgus und des Semnopithecus nasicus beschrieben habe.

An den Rändern biegt der Keimschild in das Amnionektoderm über, dessen Zipfel in den Haftstiel sich einsenkt.

Der entodermale Dottersack ist ein winziges Bläschen; sein dorsaler Abschnitt steht direkt mit der Ektodermplatte des Keimschildes in Berührung. Der ungenügende Erhaltungszustand des Präparates verschaffte mir keine sichere Auskunft,

wieweit auch Mesodermzellen zwischen Ektoderm und Dotterblatt eingelagert sind; doch ist das jedenfalls nur in untergeordnetem Grade an der hinteren Hälfte des Keimschildes der Fall.

Von einem neurenterischen Kanal ist noch nichts zu sehen.

Mesoderm überzieht Amnion wie Dottersack als einschichtiges Zellenlager.

Ueber die Struktur des Uterus geben die Dünnschnitte folgende Auskunft.

Rings um die Keimblase erhebt sich ein Wall (Fig. 1 u. 7, W). Vergleicht man diesen mit den jungen Placentaranlagen anderer Affen („Menschenaffen", Seite 189—197), so lässt sich folgendes allgemeine Entwicklungsbild des Placentarwalles ableiten. Zuerst wird das Bindegewebslager unterhalb des Uterusepithels hyperämisch, indem Venen und Kapillaren sich erweitern und auch sich neubilden; es lagert sich Lymphödem zwischen die Bindegewebszellen; das nunmehr durchsaftete Gewebe verdickt sich endlich noch weit stärker infolge der Wucherungen des Uterusepithels, welches seltner in Gestalt von Taschen, meistens von soliden Kolben in die Bindegewebslage hineinwächst, unter stetiger Vergrösserung der Kapillaren. Die taschen- oder kolbenartigen Einwucherungen zerfallen alsbald in Zellencomplexe oder Zellennester, die grossenteils zu Syncytien zusammenschmelzen und dann in ihrer Struktur von der Plasmodialschicht, mit der sie auch stellenweise in Contakt treten, nicht zu unterscheiden sind, während etliche Zellennester in isolierte Zellen zerfallen, um vermutlich zu Decidua-Zellen zu werden.

Die kolbenartigen Gebilde sind jedoch nicht die einzigen Wucherungen des Uterusepithels. Die Epithellage selbst wird unregelmässig mehrschichtig und wandelt sich in eine lockere Decke um, deren Zellen ein sonderbares Aussehen gewähren: die meisten unterscheiden sich zwar nicht von den typischen Epithel- oder den jungen „Nesterzellen", viele aber sind deutlich zwei-, einige sogar dreikernig. Figur 6 zeigt die

häufig wiederkehrende Form dieser offenbar in Umwandlung begriffenen Zellen. Da sie das ganze Placentarkissen bedecken, also auch ganz ausserhalb des Verwachsungsbezirks mit der Keimblase zu finden sind, so liegt der Gedanke nahe, dass sie später mit dem Chorionektoderm verwachsen und einen Ueberzug über dasselbe bilden werden, sobald die Keimblase sich ausdehnt und mit ihnen in Berührung tritt; ich halte dieselben daher für die Mutterzellen des, die Zotten überziehenden Syncytiums (Plastmodiblast). Sowohl die Lage dieser Zellen wie ihre häufige Mehrkernigkeit, ferner der Umstand, dass ihr Protoplasma sich in ganz gleicher Weise überraschend dunkel tingiert wie der Plasmodiblast, reden dieser Deutung das Wort. Nachträglich finde ich auch in meinen älteren Präparaten junger Placentarpolster die Anhäufung des Uterusepithels zu einer lockern Schichte gleicher Struktur, wenn auch weniger mächtig als im vorliegenden Objekte.

Dasselbe Bild geben Schnitte durch das sekundäre Placentarpolster des Lutung. Die Zellen der kolbenförmigen Einwucherungen gehen direkt über in die mehrschichtige äussere Epithelschicht (Fig. 6).

Ist die hier ausgesprochene Deutung richtig, so wären die Syncytienbildungen in der Placenta der Primaten vermutlich alle auf das Uterusepithel zurückzuführen! Denn die verbreitete Ansicht, dass die verschiedenartigsten Gewebe des Uterus syncytialen Bau während der Schwangerschaft annehmen können, habe ich in meinen Präparaten nicht bestätigt gefunden.

Kollmann [1]) hat unlängst die Herkunft des Plasmodiblasts aus dem Chorionektoderm dargelegt. Ich möchte vermuten, dass die Präparate dieses Forschers nicht genügend gut conserviert waren, um eine so subtile histogenetische Frage zur Entscheidung zu bringen.

Der intervillöse Raum ist in allen bisher von mir beobachteten jungen Placentaranlagen mit hellem Gerinsel erfüllt,

---

[1]) J. Kollmann, Ueber die Entwickelung der Placenta bei den Makaken, mit 6 Figuren; in: Anatomischer Anzeiger, XVII, Nr. 24 u. 25.

in welchem stets vorgefunden wurden: 1) Blutkörper der Mutter, 2) Zerfallprodukte mütterlicher Zellen, zumal vereinzelte aufgeblähte Kerne, 3) in allen Richtungen ziehende, anfangs zahlreiche, in älteren Anlagen spärliche Balken von Syncytien.

Begrenzt wird der intervillöse oder Zwischenzotten-Raum 1) vom Plasmodiblast der Zotten, der in allen meinen Präparaten ein geschlossenes Lager bildet, 2) von Syncytien der Nesterzellen, die sich anfänglich und zeitweilig zu einer, lediglich von Muttergefässen durchbrochenen, soliden Platte vereinigen können („Menschenaffen, Seite 197, Sy'); 3) von Bindegewebszellen, falls die Syncytialplatte nicht ausgebildet ist, und 4) hie und da von Wandungen einiger erweiterter Venen oder Kapillaren, deren Endothel in nächster Nähe der Placenta vielfach, aber nicht immer, zu kubischen oder cylindrischen Zellen aufgequollen erscheint; letztere Erscheinung hat zu der irrigen Ansicht geführt, dass die Gefässendothelien sich in Deciduazellen umwandeln; die nähere Beschreibung dieser Verhältnisse wird in einer der nächsten Lieferungen der „Menschenaffen" von meinem Mitarbeiter, Herrn Dr. Ludwig Neumayer gegeben werden. — Ausdrücklich sei hervorgehoben, dass eine geschlossene Endothelmembran nimmermehr den Plasmodiblast überdeckt, wenigstens weder bei jungen Placentaranlagen des Menschen noch der Affen. Dennoch haben Waldeyer und Winkler recht, dass solche Membranen vorkommen; jedoch ist das dann nur in ganz beschränkter Ausdehnung und ausschliesslich nahe den Zottenenden der Fall. Hier erscheinen die Membranen als die offenen, der Resorption noch harrenden Mündungsstücke der erweiterten Venen! Also auch R. Virchow behält Recht, dass der intervillöse Raum kein erweiterter Gefässraum sei, dass vielmehr das Mutterblut frei zwischen den Zotten cirkuliere, eine Ansicht, welcher auch Kollmann beipflichtet.

Ueber die Entstehung des intervillösen Raumes habe ich aus Schnittserien verschiedener junger Placentaranlagen dieses Resultat gewonnen. In den anfangs mit Lymphödem erfüllten Intercellularraum des Uterus drängen sich erweiternde Kapillaren

ein und ergiessen in denselben mütterliches Blut, nachdem ihre Wandungen durch syncytiale Zellennester oder den Plasmodiblast, die ich beide für identische Gebilde halte, zerstört wurden.

An dem allgemeinen Geschäfte der Einschmelzung des Muttergewebes behufs Schaffung von Platz für die vordringenden Zotten beteiligen sich in untergeordnetem Grade auch mütterliche Leucocyten. Man findet dieselben in Zwei- und Vierteilung begriffen sehr häufig zwischen den Bindegewebszellen liegend, zumal in Placenten der 2. bis 3. Woche.

Da der, in den intervillösen Raum mündenden Arterien nur wenige sind, hingegen der das Blut abführenden Venen viele, so muss notwendig eine Stauung oder Stagnation der intervillösen Flüssigkeit eintreten. Eine flotte ergiebige Durchströmung des Zwischenzottenraumes mit Mutterblut wird erst etwa in der dritten Woche der Schwangerschaft Platz greifen.

Zum Schlusse seien die heterochronischen Verschiebungen, welche die Anlagen der ersten embryonalen Organe der Primaten erleiden, übersichtlich zusammengestellt.

A. Beschleunigung der Entwicklung erfahren folgende Gebilde:

1. Der Trophoblast (Hubrecht), d. h. das mit dem Uterus verwachsende Chorionektoderm. Durch die, wahrscheinlich schon vor der Gastrulation sich vollziehende Verwachsung werden die formativen Schildzellen (welche Keimschild, Amnion und Primitivstreif aufzubauen haben), ins Ei-Innere geschoben und veranlasst, sich von den Trophoblastzellen (Rauber'schen Zellen) abzuschnüren. In Folge davon erscheinen auffallend frühzeitig

2. das abgeschnürte Amnion und die Amnionhöhle.

3. Sehr frühzeitig entwickelt sich ferner der Mesoblasts, jedoch nur in seinen ausserembryonalen Partien; denn im Bereiche des Keimschildes ist seine Ausbildung verlangsamt.

4. Sehr früh entsteht die erste Zotte, die Zentralzotte. Dies gilt wohl für sämtliche Schwanzaffen, ob auch für die Menschenaffen, steht noch in Frage. Etwa eine Woche lang oder noch etwas länger unterscheidet sich die Zentralzotte durch

ihre Grösse und reiche Verästelung von den alsbald nachsprossenden Zotten, bis letztere die Zentralzotte in ihrem Wachstum einholen. In der Wurzel der Zentralzotte ist stets der Keim gelegen, ein Hinweis, dass hier die Verlötung des Eies mit dem Uterus begann.

5. Die Vascularisierung des Dottersacks, d. h. die Entstehung von Gefässendothelien und Blutkörpern als Mesodermgebilden, beginnt schon vor Anlage der Medullarwülste, erscheint daher ebenfalls sehr früh. — In der hier abgebildeten Keimblase ist allerdings von Gefässen noch nichts zu bemerken; sie ist noch zu jung.

B. Verlangsamt erscheint dagegen, wie dies zumal ältere Keimblasen lehren, die Differenzierung des Keimschildes, nämlich die Anlage

1. des Primitivstreifs und der aus ihm hervorgehenden Gebilde: Urdarm, Chorda, Urwirbelblastem,
2. des Canalis neurentericus,
3. der Medullarwülste.

Man kann sich denken, wenn schon diese Vorstellung nicht ganz den Nagel auf den Kopf treffen dürfte, dass die Keimscheibe nach ihrer Losschnürung vom Trophoblasten allzuwenig Zellen enthalte, um die typische Differenzierung zu Stande zu bringen; es muss ihr sozusagen Zeit gelassen werden, ihre Bausteine genügend zu vermehren.

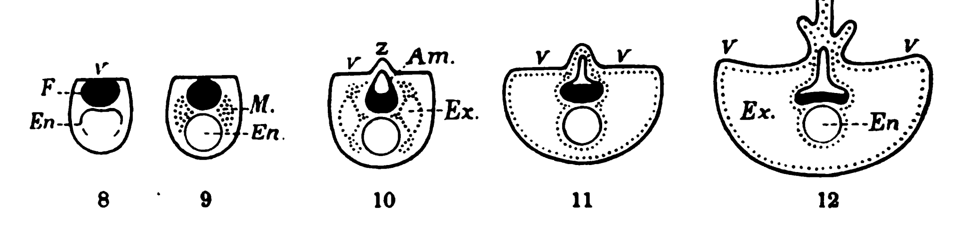
C. Reduktion der Gestalt erfährt die Allantois, indem sie nur zur kurzen schlauchförmigen Röhre auswächst, deren mesodermale Hülle jedoch an ihrem Blindende zu einem Gefässpolster sich ausbreitet, das in alle Zotten eindringt.

D. Als Neubildung ist der mesodermale Amnionstiel aufzufassen. Er verdickt sich als „Haftstiel“ bald zusehends und nimmt den Allantoisschlauch wie die Gefässe in sich auf. Hierdurch wird er zum Träger des Embryos. Der Gang seiner Umbildung lässt sich kurz durch folgende Schlagworte kennzeichnen: dünner mesodermaler Amnion- oder Rückenstiel — durch Verdickung des Mesodermgewebes wird er zum voluminösen Haftstiel — durch allmähliche, ventral gerichtete Dreh-

ung des Keimschildes um 90° wird er zum Schwanzstiel, indem er zugleich den Allantoisschlauch und die Dottergefässe in sein Polstergewebe aufnimmt — durch fortgesetzte Drehung des Eilings um 90° wird der Schwanzstiel zum Bauchstiel (His) — und endlich nach Bildung des Körpernabels, in welchen Allantoisstiel, Dottergang nebst Gefässen eingelagert werden und auf dessen Aussenfläche das Amnion sich festlegt, zum Nabelstrang.

Die Figuren 7 bis 11 geben Aufschluss über die Verlagerung des Keimes in das Ei-Innere oder die „Entypie des Keimfeldes", wie sie bei den Keimen der Schwanzaffen wahrscheinlich sich vollzieht.

Fig. 8 bis 12.



Schematische Darstellung der mutmasslichen Bildung des Amnion bei Affe und Mensch.

Dicke Umrisslinie = Chronionektoderm,
dünne Kreislinie = Dotterblatt,
punktiert = Mesoderm,

Am Amnion,
En Dottersack,
Ex Exocoelom,
F formative Keimschildzellen, welche sich vermutlich als kugliges Gebilde abschnüren und aus denen das Ektoderm des Amnion und des Keimschildes sowie der Primitivstreif hervorgehen,
M Mesoblast,
v Verwachsungsfläche des Eies mit dem Uterusepithel,
z die bei den Schwanzaffen zuerst gebildete Zentralzotte.

Erklärung zu Tafel I.

Fig. 1—6. Semnopithecus pruinosus, von Borneo.

Fig. 1. Der geöffnete Uterus in nat. Gr.
d dorsale Hälfte,
K das Keimbläschen,
N Narbe auf dem rechten Ovarium,
s Anlage der sekundären Placenta,
v ventrale Hälfte,
w Wallartige Erhebung der Uterinschleimhaut, in deren Mitte die 1 Millimeter grosse Keimblase liegt.

Fig. 2. Die Keimblase isoliert. 50/1. Rekonstruktionsbild. In der Wurzel der „Zentralzotte" ist der Keim bemerkbar.

Fig. 3—5. Der Keim, isoliert. Rekonstruktionsbild in 200 facher Vergrösserung.

Fig. 3. Der Keimschild von oben gesehen; Amnion weggelassen. Die Primitivrinne ist schwach angedeutet.

Fig. 4. Derselbe im Profil. — *Am* Amnionstiel, dessen Zipfel in das Mesenchympolster der Zotte übergeht. Vergl. Figur 7.

Fig. 5. Derselbe von vorn.

Fig. 6. Schnitt durch das wuchernde Uterusepithel des sekundären Placentarkissens, Randpartie. Vergr. ca. 600. Camera.
B Bindegewebszellen,
C Capillaren,
C U Cavum uteri,
K Kolbenförmige Einwucherung des Uterusepithels, später in Zellennester zerfallend,
N Zone der Nesterzellen,
Ue Zone des geschichteten Uterusepithels.

Erklärung zu Tafel II.

Fig. 7. Keimblase des Semnopithecus pruinosus nebst Umgebung, im Schnitt. $^{180}/_{1}$. Camera.

a Amnionhöhle,
B Bindegewebe,
Bl mütterliche Blutkörper,
C erweiterte Capillare,
Ca Capillare, in den intervillösen Raum sich öffnend,
Ch Chorionektoderm,
C U Cavum uteri,
Dr Drüsengang,
E Dottersack,
Ex Exocoelom,
I intervillöser Raum, mit Mutterblut gefüllt,
K kolbenförmige Wucherungen des Uterusepithels, später in Zellennester zerfallend,
M Mesoderm,
Pl Plasmodiblast (van Beneden), Plasmodialschicht,
Sy Syncytium, aus Zellennestern entstanden,
Ue taschenartige Einsenkungen des Uterusepithels,
y ein vom sekundären Placentarpolster abgerissener Teil des Chorion,
Z Zellennester.

Akustisch-Geographische Probleme.

Von S. Günther.

(Eingelaufen 5. Januar.)

Wie bereits an anderer Stelle[1]) bemerkt wurde, muss als derjenige Teil der allgemeinen Physik, der mit der physikalischen Erdkunde die mindest lebhaften Beziehungen unterhält, die Lehre vom Schalle bezeichnet werden. Es wurde aber an jenem Orte zugleich betont, dass doch in neuerer Zeit eine ganze Anzahl von Fragen hervorgetreten ist, welche gleichmässig den Geographen und den Akustiker interessieren. Die bis zu einem gewissen Grade vielleicht auch einzubeziehende Fortpflanzung des Schalles unter verschiedenen äusseren Bedingungen soll hier ausgeschlossen bleiben, weil Untersuchungen der letzten Jahrzehnte hierüber eine vollständige Klärung gebracht haben, und ebenso soll von der vielgestaltigen Erscheinung des Echos nicht weiter die Rede sein, obwohl dieselbe, wie man u. a. von Hirn[2]) und von v. Fischer-Benzon[3]) erfahren hat, noch manches Rätsel aufgibt. Unser Zweck ist es vielmehr, das gesamte Material, welches sich bezüglich der, wenn der Ausdruck gestattet ist, spontanen Schallphaenomene nach und nach angesammelt hat, kritisch zu würdigen und deren Erklärung, soweit möglich, zu erbringen oder doch,

---

[1]) Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 41.

[2]) Hirn, Les échos multiples, Mondes, 2. Serie, 36. Band, S. 266 ff.

[3]) v. Fischer-Benzon, Das tönende Echo, Zeitschrift für physikalischen Unterricht, 1. Band, S. 116 ff.

falls es noch zu sehr an empirischen Daten fehlt, vorzubereiten. Mit dem Worte „spontan“ soll angedeutet werden, dass eine Ursache dieser Lufterschütterungen, die bald als blosses Geräusch, bald auch als eigentliche Klänge und sogar unter der Gestalt musikalischer Tonfolgen auftreten, zunächst nicht erkennbar ist, und eben die Aufsuchung dieser Ursachen erscheint als eine Pflicht, welcher bisher nur in sehr beschränktem Masse genügt werden konnte. Wie schon bemerkt, fehlt noch viel, dass man heute schon soweit wäre, die gewünschte Abhilfe vollständig zu erbringen, und ehe eine solche erhofft werden kann, muss eben die Analyse der Erfahrungsthatsachen weiter fortgeschritten sein, als dies zur Zeit der Fall ist.

Man wird sich nicht darüber wundern können, dass Vorkommnisse dieser Art, namentlich in früherer Zeit, abenteuerliche und mystische Deutung gefunden haben; dass aber auch noch viel später selbst in naturwissenschaftlichen Kreisen der Aberglaube den Weg der exakten Forschung kreuzte, liesse sich an mancherlei Belegen nachweisen.[1]) In manchen Fällen kommt die Tier- und Pflanzenwelt bei diesen Tönen als massgebender Faktor in betracht; die hierher gehörigen Objekte sollen uns nicht weiter beschäftigen, und es reicht hin, ihrer in einer Randnote[2]) Erwähnung zu thun. Dass der in einer

---

[1]) Ein drastischer Beleg ist beispielsweise ein von grosser Gelehrsamkeit zeugender Aufsatz, den der Mediziner v. Autenrieth veröffentlichte (Ueber Stimmen in der Höhe, Morgenblatt für gebildete Stände, 1827, Nr. 297—306), der für solche spontane Töne zwar nicht direkt, aber doch in einiger Umschreibung, das Hereinragen höherer Gewalten in unser Erdenleben in anspruch nimmt.

[2]) Dahin gehört z. B. das berüchtigte Geschrei, das mehrere Reisende zur Nachtzeit auf der Insel Ceylon gehört haben wollten, und das nach J. Davy (An Account of the Interior of Ceylon, London 1821) thatsächlich von einem allerdings seltenen Vogel, dem „Ulama“ (Teufelsvogel) herrührt. Einen eigentümlich musikalischen Baum hat Schweinfurth (Im Herzen von Afrika, 1. Teil, Leipzig-London 1874, S. 105) im obersten Nilgebiete angetroffen. Die Dornen der Flötenakazie werden durch Insektenstiche zu unförmlichen, zahlreiche Oeffnungen aufweisenden Missgebilden aufgetrieben, und wenn der Wind durch diese Löcher dringt,

falschen, anthropomorphistischen Auffassung erzogene Mensch vergangener Jahrhunderte aus diffusen Geräuschen alles mögliche und unmögliche herauslesen zu können vermeinte, darf uns nicht wunder nehmen. Wer sich mit der Geschichte der Erd- und Naturkunde im Mittelalter und auch noch in den folgenden Jahrhunderten abgegeben hat, wird nicht in Verlegenheit sein, diese Behauptung durch Beispiele zu stützen,[1]) und auch das XIX. Jahrhundert ist an Rückfällen in eine

---

so erhält der in der Nähe des Baumes Befindliche den Eindruck, als ob aus jenem Flötentöne hervorkämen. Und wenn viele solche Bäume neben einander stehen, so erhebt sich ein Flöten und Pfeifen, wie von tausend Stimmen. Dadurch, dass Schweinfurth einen „Schoffar"-Hain — dies ist die Benennung von Acacia fistulosa bei den Schilluk-Negern — in der Nähe von Kairo anlegen liess, ist das Studium dieser immerhin merkwürdigen Schallerscheinung wesentlich erleichtert worden.

[1]) Derjenige Teil der damals bekannten Erde, der von düsteren Sagen und Vorstellungen besonders heimgesucht ward, ist ohne Zweifel Island. Darauf hatte bereits K. v. Maurer (Zur Volkskunde Islands, Zeitschrift des Vereins für Volkskunde, 1891, S. 42) aufmerksam gemacht, und neuerdings hat Thoroddsen in seinem verdienstlichen Werke (Geschichte der isländischen Geographie, deutsch von A. Gebhardt, 1. Band, Leipzig 1897) die einschlägigen, für uns hier besonders wichtigen Momente zusammengestellt. Von den im Treibeise heulenden Stimmen der verdammten Seelen weiss schon Saxo Grammaticus, der bekannte dänische Historiker und Geograph des XII. Jahrhunderts, zu erzählen (a. a. O., S. 61). Hier war es also das allerdings schreckhafte Getöse der sich an einander reibenden Treibschollen, welches in der angegebenen Weise umgedeutet wurde, aber auch die Stimmen der im Fegefeuer Schmachtenden glaubte man in dem Brüllen der isländischen Vulkane zu vernehmen (K. v. Maurer, Die Hölle auf Island, Zeitschrift etc., 1894, S. 256 ff.) zu vernehmen. Die deutschen Beschreiber Jakob Ziegler und Sebastian Münster nahmen dergleichen bereitwillig hin. Sogar noch gegen Ende des XVI. Jahrhunderts ist der Wittenberger Mathematiker Peucer von den „schluchzenden" Stimmen überzeugt, die aus der Tiefe des Hekla-Kraters kommen (Thoroddsen, S. 142); ja künftige Kriege sollen sich sogar durch den Lärm im Inneren jenes Feuerberges voraus ankündigen. Es dauerte bis tief ins XVII. Jahrhundert hinein, ehe Island seiner Eigenschaft als klassisches Land geographischer Fabuliererei, hauptsächlich dank den Bestrebungen höher gebildeter Volksgenossen, ganz entkleidet wurde.

solche Denkweise nicht arm.[1]) Wir werden noch zum öfteren Veranlassung haben, darauf hinzuweisen, dass auf diesem, wie auf manchem anderen Gebiete die objektive Betrachtung der Dinge erst ganz allmählich zu ihrem Rechte gelangt ist.

Prüft man die einzelnen Vorkommnisse, wie sie uns beschrieben werden, genauer, so gewinnt man die Ueberzeugung, dass sich dieselben wesentlich in drei Gruppen sondern lassen. An der Spitze stehen diejenigen Geräusche und Klänge, welche bei der Bewegung lockerer Gesteinsfragmente entweder unmittelbar entstehen oder doch mit solchen in ursächliche Verbindung gebracht werden können. Der tönende Sand, um die übliche Bezeichnung zu gebrauchen, hat schon wiederholt zu Erörterungen Anlass gegeben, während freilich eine zusammenfassende Behandlung dessen, was man von der Sache weiss, noch vermisst wird. Weiterhin haben eigentümliche Töne und Tonverbindungen an die Reihe zu kommen, welche man ausschliesslich im Bereiche einzelner Oertlichkeiten von genauer geographischer Abgrenzung zu hören Gelegenheit hat, deren auslösender Grund mithin notwendig in lokalen oder doch regionalen Verhältnissen gesucht werden muss, welche es bestimmten physikalischen Gesetzen ermöglichen, sich in einer sonst minder leicht zu beobachtenden Weise zu bethätigen. Zum dritten endlich sind die abrupten Lufterschütterungen namhaft zu machen, welche für gewisse Gegenden und Landstriche charakteristisch zu sein scheinen und, je nachdem, unter den verschiedenartigsten Namen in der Wissenschaft bekannt geworden sind, worüber, wie gleich hier

---

[1]) Einer sehr drastischen Thatsache gedenkt v. Autenrieth am bezeichneten Orte. Der kühne Robbenschläger J. Weddell, der im Jahre 1823 die höchste südliche Breite für sehr lange Zeit erreicht hatte (Fricker, Antarktis, Berlin 1898, S. 43), schilderte die Südlichen Shetland-Inseln als von monströsen Zwittergebilden bewohnt und wollte dort die sonderbarsten Laute gehört haben. Bekanntlich sind ähnliche Behauptungen auch kürzlich wieder aus dem hohen Norden zu uns gedrungen, und auch bei anderen Polarfahrern lässt sich eine gewisse Neigung, in der Einsamkeit Phantasien nachzuleben, nicht verkennen.

hervorgehoben werden möge, eine Abhandlung von L. Weber[1]) die beste Auskunft, die sich überhaupt vorläufig geben lässt, erteilt. Dieser unserer Klassifikation gemäss zerfällt auch die vorliegende Studie ganz von selbst in drei getrennnte Abteilungen.[2])

I. Der tönende Sand.

Wer über Sand wegschreitet, vernimmt sehr leicht ein knirschendes Geräusch. Dass dessen Ursache in der Reibung der Gesteinspartikeln liegt, steht ausser Zweifel, und wenn es also auf solche Weise zur Bildung eines wirklichen Tones kommt, so gehört derselbe unzweifelhaft in die Klasse der sogenannten Reibungstöne, wie sie von Strouhal eingehenderer Untersuchung unterworfen worden sind,[3]) mag auch die Art und Weise, wie dieser Physiker die Reibung wirken liess, von der uns hier interessierenden noch so sehr verschieden sein. Mit Melde[4]) werden wir zunächst besser von Reibungsgeräuschen sprechen, wie sie stets auftreten, wenn die Luft aus einer schmalen Oeffnung zu entweichen genötigt ist. Auf dem Wege der Resonanz kann diese wirre Folge rascher Luftimpulse geregelt werden, so wie dies Tyndall[5]) mit folgenden Worten ausspricht: „Der dünne Luftstrom brandet gegen die scharfe Kante der Oberlippe und bringt da ein schwirrendes Geräusch hervor, aus welchem gewisse Impulse

---

[1]) Leonhard Weber, Ueber die sogenannten Mistpoeffers, Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereines für Schleswig-Holstein, 11. Band, S. 66 ff.

[2]) Der Verf. nimmt die Gelegenheit wahr, für sachdienliche Mitteilungen den Herren Prof. Dr. S. Ruge in Dresden, Prof. Dr. O. Lenz in Prag und Dr. H. J. Klein in Köln seinen verbindlichen Dank auszusprechen.

[3]) V. Strouhal, Ueber eine besondere Art der Tonerregung, Annalen der Physik und Chemie (2), 5. Band, S. 216 ff.

[4]) F. Melde, Akustik; Fundamentalerscheinungen und Gesetze einfach tönender Körper, Leipzig 1883, S. 250.

[5]) J. Tyndall, Der Schall, deutsch von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869, S. 229 ff.

durch die Resonanz der Pfeife verstärkt und in einen Ton verwandelt werden.“ Eine Pfeife im gewöhnlichen Sinne ist nun zwar in unserem Falle nicht vorhanden, wohl aber eine Vielzahl von Pfeifen winzigster Dimensionen. Stellen wir uns nämlich eine Sandfläche vor, wie sie uns etwa in Dünen- und Wüstengebieten entgegentritt, so erscheint dieselbe als ein Aggregat kleiner Körperchen von wesentlich gleicher Grösse und Beschaffenheit, die sich nur locker berühren, so dass überall Luft zwischen ihnen eingeschlossen ist. Der Tritt des Wanderers nähert diese festen Teilchen einander, und die Luft zwischen ihnen wird komprimiert und strömt aus zahllosen Oeffnungen mit relativ grosser Geschwindigkeit aus. Bei schneller Bewegung auf angenähert ebenem Boden ändert der den Luftaustritt bewirkende Anstoss unausgesetzt seinen Platz, und so ist kein Grund zu besonderer Verstärkung der Schrilltöne gegeben, wie sie andererseits platzgreifen muss, wenn eine grössere Partie von Sandkörnern nicht nur vorübergehend, sondern dauernd in Bewegung gesetzt wird, falls etwa eine geneigte Fläche, die ein leichtes Abrutschen der Sandmasse im Gefolge hat, begangen wird. Aus der Natur der Reibungstöne scheint also von vornherein, ohne dass auf eigentliche Erfahrung bezug genommen wird, hervorzugehen, dass ein lebhafteres Tönen des Sandes nur unter gewissen Bedingungen zu erwarten ist, während unter gewöhnlichen Umständen nur leise Geräusche das Ohr treffen, die sehr häufig so wenig intensiv sein werden, dass sie die Aufmerksamkeit kaum zu erregen vermögen. Nicht zu verstehen wäre auch, inwiefern die petrographische Beschaffenheit der Felsmasse, durch deren Verwitterung und Zerfall sich der Sand gebildet hat, auf dessen akustische Eigenschaften einen Einfluss ausüben sollte. Sehen wir nun zu, wie sich mit unseren auf rein physikalischem Wege gewonnenen Leitsätzen das von der geographischen Litteratur gelieferte Material verträgt. Vor allem wird sich zeigen, dass in der That ausschliesslich aus Dünen- und Wüstenländern die einschlägigen Wahrnehmungen stammen.

Beginnen wir mit den ersteren. Wer jemals einen Dünen-

hügel erstiegen, wird sich erinnern, dass es dabei, wenn der Fuss in die lockere Sandmasse einsank, niemals ganz ohne akustische Begleiterscheinungen abging. Ausnahmsweise verstärken sich dieselben, und solche Klangphänomene haben gelegentlich von sich reden gemacht.

Als in den siebziger Jahren L. Meyn mit der geologischen Aufnahme der Insel Sylt beschäftigt war, fesselte ihn der Anblick der stattlichen Uferhöhen, als deren Baustoff sich reiner Kaolinsand herausstellte.[1]) Die Aehnlichkeit desselben mit demjenigen, der ihm früher auf Bornholm zu Gesichte gekommen war, fiel ihm auf; geognostisch sei zunächst zwischen diesen beiden Sanden nicht der geringste Unterschied ausfindig zu machen, und trotzdem sei der Ursprung ein ganz abweichender. Derjenige auf der dänischen Insel sei nämlich der Rest eines zerstörten jurassischen Kohlengebirges. Nur das Gehör lasse anscheinend die Verschiedenheit erkennen. Nach Meyn[2]) gibt der Jurasand Bornholms, zumal bei „schleifender" Bewegung des darüber hinwandelnden Fusses, einen eigentümlich schrillen Ton von sich, von dem auf Sylt nichts bekannt sein soll. Welchen sanguinischen Hoffnungen sich dieser gewiegte, mit der Feldarbeit ausserordentlich vertraute Forscher hingab, erhellt daraus, dass er den knirschenden Ton zum Range eines leitenden Prinzipes bei stratigraphischen Untersuchungen zu erheben geneigt war.[2]) „Ein Charakter dieser Art und von so grosser Seltenheit kann unter Umständen ein ebenso sicherer Leitfaden werden, als die beste Leitmuschel." Vielleicht käme man an der Hand dieses Hilfsmittels sogar soweit, jurassische Kohlenlager aufzuspüren. Einigermassen stört diese Hoffnungsseligkeit die Thatsache, dass man auch an der pommerschen Küste bei Kolberg tönenden Sand bemerkt habe, doch hilft über den möglichen Einwand die weitere Hypothese hinweg, dass wohl das in Bornholm anstehende

---

[1]) L. Meyn, Geognostische Beschreibung der Insel Sylt und ihrer Umgebung, Abhandlungen zur geologischen Spezialkarte Preussens und der thüringischen Staaten, 1. Band, 4. Heft, Berlin 1876.

[2]) Ebenda, S. 30 (634) ff.

Küstengebirge die Ostsee unterteufen und mit Ausläufern bis unter den gegenüberliegenden Strand reichen möge.

Diese Andeutung Meyns erregte einiges Aufsehen, obwohl sie zunächst von anderer Seite nicht bestätigt wurde; der beste geographische Kenner der Kolberger Gegend wenigstens, P. Lehmann, weiss von merkwürdigem Sande nichts zu berichten.[1]) Jedenfalls bat zu Beginn der achtziger Jahre Baird in Washington die preussische Geologische Landesanstalt um die Uebersendung einer Probe „klingenden Sandes von Kolberg". Man war mithin auch anderwärts auf die ganz unzutreffende Vermutung geführt worden, es liege da eine Spezialität von Sand vor, während es sich doch nur um eine Eigenschaft ausgedehnter Sandflächen handeln konnte. Deshalb hielt es Berendt für angezeigt, in einer eigenen Veröffentlichung[2]) die erforderliche Aufklärung zu geben. Er selbst hatte bei seinen Begehungen der deutschen Ostseeküste die fraglichen Töne mehrfach wahrgenommen: im Samland, auf der Kurischen und auf der Frischen Nehrung, bei Rügenwaldermünde, Heringsdorf und auf der an Mecklenburg angrenzenden, vorpommerschen Halbinsel Darss. Nicht immer lasse sich das oft ziemlich kräftige, „kreischende" Geräusch nach freiem Belieben hervorrufen; frisch getrockneter Sand biete dazu die günstigsten Bedingungen; vielleicht wirke ein leichter Salzüberzug mit, der nicht lange hafte. Jedenfalls habe die Sache keinen eigentlich geognostischen, sondern blos einen physikalischen Untergrund, und von Leitmerkmalen im Sinne Meyns könne keine Rede sein. „Damit aber fällt auch die Hoffnung, in diesem Klingen des Sandes ein spezielleres Unterscheidungsmerkmal der Sande, eine mit einer Leitmuschel vergleichbare Handhabe zur Auffindung dieser oder jener Formation erhalten zu können". Von Berendt wird offenbar der springende Punkt, auf den es

---

[1]) Paul Lehmann, Das Küstengebiet Hinterpommerns; Wanderungen und Studien, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, 19. Band, S. 332 ff.

[2]) Berendt, Ueber „klingenden" Sand, Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft, 35. Band, S. 864 ff.

ankommt, richtig betont. An und für sich ist jede Sandansammlung dazu geeignet, Klangerscheinungen durch eine schleifende, d. h. eine relativ grössere Bodenparzelle in Mitleidenschaft ziehende Fussbewegung auslösen zu lassen, und der Erklärung ist dann, wenn solche Erscheinungen ausbleiben, eigentlich ein viel weiteres Feld eröffnet, als wenn sie sich in der zu erwartenden Weise einstellen.

Von den Dünen weg wenden wir uns den Wüsten zu, in deren Bereiche wir auf eine reichere Ausbeute von Beobachtungsthatsachen rechnen dürfen. Schon einer der ersten Europäer, die in der Wüste zu reisen gezwungen waren, der Flamänder Ruysbroek, weiss von sonderbarem, trommelartigem Getöse in den weiten Sandebenen Innerasiens zu erzählen, und ein gleiches gilt von dem Italiener Marco Polo, der auf einer südlicher gelegenen Route dem gleichen Ziele im fernen Osten zustrebte. Man hat wohl diese Nachrichten rein subjektiv gedeutet und in ihnen Ausgeburten eines durch die angreifende Monotonie der Wüstenfahrt krankhaft beeinflussten Empfindungsvermögens erblickt, wie ja wirklich auch moderne Forschungsreisende sich solchen Einwirkungen nicht immer zu entziehen im Stande sind.[1]) Paulmier, dem wir eine wertvolle Ausgabe des Polo'schen Berichtes verdanken, spricht[2]) demzufolge von „Halluzinationen", zitiert aber doch auch eine unzweifelhaft reelle Mitteilung von solchen, der Wüste eigentümlichen Beeinflussungen des Gehörorganes. Es ist ja durchaus nicht zu wundern, dass Menschen, deren Gemüt ohnehin mysteriösen Einflüsterungen zugänglich ist, die Töne, die sie vernehmen, und von deren Herkunft sie sich keine unmittelbare Rechenschaft geben können, mit einer überirdischen Welt in Verbindung bringen. In dem erwähnten, reichhaltigen Aufsatze v. Autenrieths ist auch, mit Bezugnahme auf Angaben des

---

[1]) Man vergleiche z. B., was der Botaniker A. v. Bunge über seinen Ritt durch die persische Wüste Lut und über die dort erlebten Sinnestäuschungen meldet (Die russische Expedition nach Chorassan in den Jahren 1858 und 1859, Petermanns Geogr. Mitteilungen, 1860, S. 223).

[2]) Paulmier, Le livre de Marco Polo, 1. Band, Paris 1865, S. 150.

bekannten Erforschers Persiens, J. Morier, der Fabelwesen gedacht, mit denen — Ghohols, Dschins — das persische Volk die weiten Sand- und Salzwüsten seines Reiches bevölkert hat, grossenteils auch unter dem Zwange unverstandener Sinneseindrücke. Genaue, von zuverlässigen Berichterstattern stammende und teilweise auch kontrollierbare Nachrichten über Schallphänomene im Wüstensande liegen von drei überaus distanten Orten vor, nämlich aus Afghanistan, aus der westlichen Sahara und vom Ufer des Roten Meeres. Fürs erste sollen der erste und dritte Fall besprochen werden, während der zweite, über den man weitaus am besten unterrichtet ist, zuletzt an die Reihe zu kommen hat. Die einzige sonst noch anzuführende Erwähnung des klingenden Sandes rührt her von den Sandwich-Inseln und findet sich in einer Abhandlung von Meinicke.[1])

Gegen Ende der dreissiger Jahre durchzog J. Wood den Hindukusch auf einem seitdem von Europäern nur sehr wenig betretenen Wege. Als er die Gebirgslandschaft Koh-Daman erreicht hatte, erfuhr er von den Eingeborenen, dass hier eine Merkwürdigkeit gezeigt werde[2]); es sei dies Reig-Rawan, der bewegte und dabei tönende Sand. Die Klänge, die man dort höre, seien schrecklich und geisterhaft. Solche Schilderungen reizten den Reisenden, sich den Ort genauer anzusehen; er begab sich dahin in ziemlich skeptischer Stimmung, fand aber die Dinge im grossen und ganzen so, wie man sie ihm beschrieben hatte. Die Neigung des mit lockerem Sande bedeckten Hügels betrug ungefähr 45°; derselbe war der Sonnenbestrahlung ausgesetzt, so dass an der Oberfläche eine Tem-

---

[1]) Meinicke (Der Gebirgsbau der Gruppe Hawaii, Petermanns Geogr. Mitteilungen, 1874, S. 210) spricht von dem Berglande von Napali und erwähnt der dortigen Sanddünen (Nohili der Insulaner), auf denen durch das Herabrollen von Sandkörnern ein eigenartiges, oft donnerartiges Getöse erzeugt werde. Vgl. hiezu Gaea, 14. Band, S. 671 ff.

[2]) J. Wood, Personal Narrative of a Journey to the Source of the River Oxus, by the Route of the Indus, Kabul and Badakshan, London 1841, S. 180 ff.

peratur von $39^1/_2{}^0$, etwa zehn Zoll tiefer immer noch eine solche von fast 24° herrschte. Wie bei solchen Gelegenheiten immer, begaben sich sechs Männer auf den Gipfel der Anhöhe, um mit kräftiger Bewegung („the party above came trampling down") beim Herabgehen den Sand durcheinanderzubringen. Der Zweck, einen grossen Lärm hervorzubringen, wurde allerdings, ungeachtet man den Versuch mehrmals wiederholte, nicht erreicht, aber ein Ton liess sich immerhin vernehmen, gleichend dem einer weit entfernten Trommel, gemässigt durch eine sanftere Musik. Wir werden uns überzeugen, dass dieser Tontypus auch anderwärts zur Geltung kommt. Wood möchte das „Wunder" des Reig-Rawan mit der bekannten Schallverstärkung in einer sogenannten Flüstergallerie in Verbindung bringen, und insofern hat er darin recht, als auch in einer derartigen Gallerie eine Summation ungemein vieler, an und für sich überaus schwacher Einzelklänge zu einem sehr lauten Gesamtklange bewirkt wird. Massgebend ist aber da die Vereinigung zurückgeworfener Schallstrahlen in einem Brennpunkte, und insofern steht die Analogie zwischen beiden Geschehnissen doch nur auf sehr schwachen Füssen.

Die afrikanische Wüste ist schon oft zum Gegenstande monographischer Darstellung gemacht worden, aber nur einmal begegnet uns die Akustik des Sandes. K. A. v. Zittel, Schirmer, J. Walther, um nur einige der bekanntesten Autoren namhaft zu machen, lassen diesen Gegenstand unbesprochen. Dagegen war O. Lenz in der Lage, Erfahrungen darüber zu sammeln, wie sich dies am besten aus seinen eigenen Worten[1]) ergibt. „Inmitten der Einöde hört man plötzlich, aus dem Inneren eines Sandberges herauskommend, einen langen dumpfen Ton, wie von einer Trompete, der einige Sekunden anhält, dann aufhört, um nach kurzer Zeit aus einer anderen Gegend wieder zu ertönen. Es macht dies in der totenstillen, menschenleeren Wüste einen unheimlichen Eindruck. Es muss hier gleich bemerkt werden, dass es sich durchaus nicht etwa

[1]) O. Lenz, Timbuktu, 2. Band, Leipzig 1892, S. 53 ff.

um eine akustische Täuschung, wie man etwa auch optischen Täuschungen unterworfen ist, handelt; nicht nur ich, sondern alle meine Leute hörten diese dumpfen Töne, und der Führer Mohammed hatte uns schon am Tage vorher auf dieses Phänomen aufmerksam gemacht". Lenz bringt, anderer Naturstimmen nur im Vorbeigehen gedenkend, dieses Tönen der Sandhügel in engen Kausalzusammenhang mit der analogen Tonbildung auf der Sinaihalbinsel, deren Kennzeichnung wir uns für die dritte Stelle vorbehalten hatten, und wir halten dafür, dass er sich dabei im vollen Rechte befindet. Wir werden auf die Einzelheiten seines Erklärungsversuches nochmals zurückkommen, wenn wir zuvor das Verhalten des sinaitischen Glockenberges, der nicht mehr isoliert, sondern als Zielpunkt zahlreicher schriftstellerischer Aeusserungen dasteht, näher kennen gelernt haben.

Diesen Namen — Djebel Nakus — führt eine litorale Erhöhung am Golf von Suez, nach Rüppell[1]) etwa 3½ Stunden nordwestlich von dem bekannten Küstenplatze Tor gelegen, deshalb, weil das arabische Märchen dorthin die Stätte eines versunkenen Klosters verlegt, dessen Glocke sich noch ab und zu vernehmen lasse. Der erste Europäer, der das allgemeine Interesse auf diese merkwürdige Erdstelle lenkte, war der bekannte Orientreisende Seetzen, der Studienfreund A. v. Humboldts von Göttingen her.[2]) Als er mit seinen Leuten den Berg bestieg, vernahm er[3]) zuerst ein leises, säuselndes Geräusch, welches nicht aus dem inneren Felsen selbst, sondern von dem diesen bedeckenden, lockeren Quarzsande kam und nach und nach dem Tönen eines Brummkreisels ähnlich ward, schliesslich aber in ein starkes Dröhnen überging. Blos die Bewegung,

---

[1]) E. Rüppell, Reisen nach Nubien, Kordorfan und dem petraeischen Arabien, Frankfurt a. M. 1829, S. 206 ff. („Der tönende Berg Nakus").

[2]) K. Bruhns, Alexander v. Humboldt; eine wissenschaftliche Biographie, 1. Band, Leipzig 1872, S. 89.

[3]) In seinem Reisewerke (Berlin 1854, ed. Kruse) gedenkt Seetzen der Sache nicht; vgl. dagegen die Notiz Monatl. Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, 26. Band, S. 395 ff.

nicht aber der Wind schien ihm dabei mitzuwirken, und zumal durch absichtliches Herabrutschen von der steilen Höhe brachte er ein immer stärkeres Wogen des zuerst unerheblichen Klanges zuwege. Die starke Lufterschütterung, welche eintritt, wenn eine Klangscheibe, ein Gong, mit einem Schlägel bearbeitet wird, hat eine sehr grosse Aehnlichkeit mit dem musikalischen Rauschen des Sandes, und da solche Instrumente in den Könobien des Ostens viel gebraucht werden, so hatte man auch den Schlüssel zur Erklärung der Volkssage. Es spricht sehr zu gunsten Seetzens, dass er gleich anfangs die nüchterne, in der Hauptsache zutreffende Interpretation des Vorganges gab. Das Rutschen des Sandes erzeugt Luftwellen, deren Amplitude anfänglich sehr klein ist und stetig grösser wird.

Seetzens Eröffnung machte viel von sich reden, zumal da sie bald nachher auch von anderen Reisenden bestätigt ward. Eine Notiz in einer geachteten französischen Zeitschrift, die übrigens auf die näheren Umstände nicht eingeht, sprach den Glockenberg sogar für eine Weltmerkwürdigkeit an.[1]) Auch Arago widmete dem „unterirdischen Geräusch zu Nakus“ eine Betrachtung, die aber den Kern der Sache nicht trifft.[2]) Wirk-

---

[1]) Sur les bruits souterrains qu'on entend à Nakous, Annales de Chimie et de Physique (1), 33. Band, S. 439 ff. „Il y a près de Tor une montagne qui sous le rapport des circonstances physiques est peut-être une des plus remarquables non seulement à l'Arabie Pétrée, mais du monde entier“.

[2]) Für den Bericht Aragos war ebenso, wie für denjenigen Brewsters (Edinburgh Journal of Science, 7. Band, S. 51) die Erzählung eines Engländers Gray bestimmend gewesen, der, offenbar voreingenommen, den ganzen Hergang durch eine trübe Brille betrachtet und an die Mitwirkung vulkanischer Kräfte appelliert hatte. Seiner Ansicht nach sollte der Lärm die primäre, das Abrutschen des Sandes die sekundäre Erscheinung sein. Daher kommt auch die unzutreffende Bezeichnung des Geräusches als eines „unterirdischen“, was es in keiner Weise ist. Aus diesem Grunde stellt auch Arago den Glockenberg in Parallele zu anderen Erdgegenden, die mit ihm nicht das mindeste zu thun haben, zu deren Besprechung vielmehr erst in der zweiten und dritten Abteilung dieser Abhandlung Anlass gegeben ist. Vgl. F. Aragos Sämtliche Werke,

lich wertvolle Ermittlungen verdanken wir, nächst und nach Seetzen, einzig Rüppell, Ehrenberg und Palmer.

Von Rüppells Ortsstudie hatten wir schon zu sprechen; sie ist besonders deshalb von Wert für uns, weil sie uns ein gutes Bild von den Terrainverhältnissen liefert. Der Glockenberg ist eigentlich ein Sandsteinplateau von namhafter Höhe, welches oben in eine Flugsandebene übergeht. Statt steil abzufallen, zeigt sich die Uferhöhe durch eine „Felshohle", wie sich Rüppell ausdrückt, aufgeschlossen; dies ist ein schräg vom Meere aus ansteigender Einschnitt, dessen Böschungswinkel auf nahe an 50^0 geschätzt wird. Nicht blos die Decke, sondern auch der ganze Untergrund besteht aus feinem Sande, so dass jeder Fusstritt das labile Gleichgewicht stört. Man kann nach Willkür die ganze Masse zum Rollen, und damit zugleich zum Tönen, bringen, und auch ein Windstoss kann diesen Effekt erzielen. Dass die Reflexion des einmal erregten Schalles von den Wänden des Hohlraumes eine verstärkende Wirkung ausübt, wird man Rüppell unbedingt zugeben.

Ehrenbergs an Ort und Stelle gemachte Beobachtungen wurden nahe gleichzeitig mit denjenigen seines Landsmannes in Deutschland bekannt,[1]) machten aber weit mehr von sich reden. Dass die Bewegung des in der Hohlkehle aufsteigenden Wanderers die massgebende Ursache sei, wird unumwunden anerkannt. Neu ist, dass die Intensität des Tones als eine so beträchtliche geschildert wird. „Mit einem leisen Rauschen anfangend, ging das Geräusch allmählich in ein Murmeln, Summen und zuletzt in ein Dröhnen von solcher Heftigkeit

deutsch von W. G. Hankel, 15. Band, Leipzig 1860, S. 572. Der Herausgeber Hankel, welcher die Mitteilungen der deutschen Berichterstatter kannte, berichtigt den Irrtum des französischen Physikers in einer Randnote und konstatiert: „Das Geräusch entsteht nur durch das Herabrollen des Sandes".

[1]) Ehrenberg, Ueber das eigentümliche Getöse zu Nakuhs am Berge Sinai, Ann. d. Phys. u. Chem., 15. Band, S. 312 ff.; Schriften der Berliner Gesellschaft Naturforschender Freunde, 1829, S. 393 ff.; Laue, C. G. Ehrenberg, ein Vertreter deutscher Naturforschung im XIX. Jahrhundert, Berlin 1895, S. 98.

über, dass man es mit einem fernen Kanonendonner hätte vergleichen können, wenn es nicht anhaltender und gleichförmiger gewesen wäre". Ehrenberg bemerkte auch, dass das langsame Erlöschen des Getöses mit der Beruhigung der aufgerührten Sandlagen zeitlich Hand in Hand geht. Auch wies er, dem eine ganze Reihe spontaner Schallerscheinungen bekannt war, jeden Zusammenhang derselben mit dem Djebel Nakus zurück und liess einzig und allein die Rutschbewegung des Sandes als Tonquelle zu.

Der englische Archaeologe Palmer, der sich übrigens in dem diesem Phänomene gewidmeten Abschnitte seines Reisewerkes[1]) auch in naturwissenschaftlichen Dingen gut beschlagen zeigt, charakterisiert die Art des Tönens ganz ebenso, wie dies ziemlich viel früher Ehrenberg that. Je höher man das amphitheatralische Thal hinaufkam, umso mehr verstärkte sich der Schall, und ebenso waren die dröhnenden Klänge desto kräftiger, je weniger bereits die Ruhe der lockeren Sandmassen gestört war. Es ist, so hebt Palmer hervor, eine rein örtliche Erscheinung und hängt zugleich von der Reibung und von der Erwärmung ab. Die präzise Betonung dieses letzteren Momentes ist neu, indem früher nur Wood, wie wir uns erinnern, auf die starke Temperaturerhöhung der obersten Schichten des rutschenden Sandes hingewiesen hatte. Bei einem Thermometerstande von etwas über 16° sei die Schallentwicklung lange keine so mächtige gewesen, als bei einem Thermometerstande von nahe 42°. Auch merkt Palmer an, dass die Feinheit der Sandkörner einen unterstützenden Faktor darstelle.[2]) Jedenfalls steht der Bericht dieses englischen Reisenden, obwohl derselbe nicht in erster Linie von naturwissenschaftlichen Interessen geleitet war, in bezug auf Genauigkeit

---

[1]) E. H. Palmer, The Desert of the Exodus, 1. Teil, Cambridge 1871, S. 217 ff.

[2]) Einige benachbarte Sandhügel blieben, während der Glockenberg erdröhnte, völlig neutral, allein sie bestanden aus gröberen Körnern und besassen — hierauf wird gleich nachher zurückzukommen sein — sämtlich einen kleineren Böschungswinkel.

und allseitige Würdigung aller beeinflussenden Umstände obenan. Auch dadurch bekundet Palmer seine Objektivität, dass er nicht versucht, ein Schallphänomen, das nicht weit vom Glockenberge seinen Sitz hat, auf die gleiche Ursache zurückzuführen.[1])

Eine gewisse Schwierigkeit für den Erklärer bietet nun aber die neuerdings hervortretende Thatsache, dass der Djebel Nakus mit der Zeit entschieden schweigsamer[2]) geworden

---

[1]) Auch auf dem Sinai selbst hört man bisweilen dumpfe Töne, die den Arabern umso mehr Stoff zu superstitiöser Deutung geben, als der von Gott angeblich mit eigener Hand gespaltene Berg (Kazwînis Kosmographie, deutsch von Ethé, 1. Halbband, Leipzig 1868, S. 363) vom Volke mit banger Scheu betrachtet wird. Wir lesen bei Palmer (S. 251) über diese Lufterschütterungen: „They are in all probability caused by large masses of rocks becoming detached by the action of frost and rolling wight a mighty crass over the precipice into the valley below". Zweifellos wird hier angespielt auf ein der Wüste eigentümliches Vorkommnis, nämlich auf die als eine natürliche Folge des jähen Wechsels von Tageshitze und nächtlicher Kühle sich häufig vollziehende Abtrennung von Gesteinsstücken, die mit jähem Krachen abspringen. Es liegen hierüber unwidersprechliche Zeugnisse von J. G. Wetzstein (Reiseberichte über Hauran und die Trachonen, Berlin 1860, S. 20) und O. Fraas (Aus dem Orient, Stuttgart 1878, 1. Teil, S. 38 ff., 2. Teil, S. 110) vor, wie nicht minder von dem berühmten Afrikaforscher Livingstone.

[2]) Gegen Ende der siebziger Jahre befand sich Th. Löbbecke am Golfe von Suez. Der kurze Bericht, den er von seinem Besuche des Glockenberges abstattet (Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn, 1880, S. 82 ff.), und der von keiner besonderen Vertrautheit mit früheren Mitteilungen über den tönenden Sand zeugt, gewinnt dadurch an Bedeutung, dass es dem Erzähler nicht gelang, die Masse in Bewegung zu bringen und damit die Töne zu erzeugen. Erst der Abendwind verhalf ihm dazu, „einen eigentümlich vibrierenden" Ton zu vernehmen. den auch er mit dem Erklingen eines Gongs vergleicht. Jedenfalls also war jetzt, etwa zehn Jahre nach Palmers Anwesenheit an Ort und Stelle, die Sandmasse weniger leicht zum Tönen zu erregen. In den neunziger Jahren endlich bestieg Herr Professor Dr. Rothpletz den Uferhang, ohne überhaupt irgendwelcher Klangerscheinung inne zu werden; auch in der Tagespresse stösst man nicht mehr auf Angaben dieser Art.

ist. Zunächst scheint eine Naturerscheinung mit dem Orte, an dem sie zu wiederholten Malen beobachtet worden war, untrennbar verwachsen zu sein; freilich weiss man von den Echos, dass ganz geringe Umgestaltungen der reflektierenden Wände diesen Widerhall abgeschwächt oder ganz vernichtet haben,[1]) und so darf man von vornherein auf eine geminderte Stabilität akustischer Erscheinungen gefasst sein. Und im vorliegenden Falle liegt eine einfache Hypothese nahe genug, durch deren Anwendung man sich von einer fortschreitenden akustischen Trägheit des Sandes Rechenschaft zu geben vermag. Die Töne werden immer matter werden, je mehr sich das Profil der Sandanhäufung seiner natürlichen Gleichgewichtslage nähert.

Durch das Studium der Profile von Stratovulkanen, welche sich je gleichfalls zum grossen Teile aus losem Materiale aufbauen, ist man mit der Kurve bekannt geworden, welche die Oberfläche einer Sand- oder Schuttanhäufung bestimmt, wenn diese im stabilen Gleichgewichtszustande verharren soll. Nach J. Milne[2]) wäre dies eine sogenannte logarithmische Linie; indessen ist in dieser Bestimmung, wie aus den umfänglichen Versuchen von Loewe[3]) erhellt, nur eine Annäherung an die Wahrheit zu erblicken, indem man nicht einen konstanten, sondern thatsächlich einen vom Böschungswinkel selbst bis zu einem gewissen Grade abhängigen Reibungskoeffizienten zu Grunde zu legen hat. Auf die Form der Gleichung der Profilkurve kommt es hier nicht an; vielmehr genügt es, festgestellt zu haben, dass eine Anhäufung ungemein vieler, gleich grosser Körperchen, welche ganz den Wirkungen der Schwerkraft, Adhäsion und Reibung unterworfen

---

[1]) Gehlers Physikalisches Wörterbuch, 2. Auflage, besorgt von Muncke, 3. Band, Leipzig 1827, S. 96.

[2]) J. Milne, On the Form of Volcanos, Geological Magazine (2), 5. Band, S. 337 ff.; Further Notes on the Form of Volcanos, ebenda (2), 6. Band, S. 506 ff.

[3]) F. Loewe, Alte und neue Versuche über Reibung und Kohäsion von Erdarten, München 1872.

ist, unter dem Gesamteinflusse dieser Kräfte eine Gleichgewichtslage annimmt, für deren Oberfläche eine gegen aussen konkave Leitkurve von ganz bestimmter Beschaffenheit massgebend ist. Diese wird aber nicht sofort, sondern, wie man auch an den Schutthalden unserer Berge konstatieren kann, erst nach und nach erreicht, und wenn sie erreicht ist, so können örtliche Gleichgewichtsstörungen keinen nachhaltigen Effekt mehr erzielen. Offenbar meint Palmer dasselbe, wenn er sagt, die Neigung des Abhanges sei der „angle of rest" des Sandes im Normalstande. Man beachte wohl, dass von Rüppell und Ehrenberg der Böschungswinkel auf 50°, von Palmer hingegen nur auf 30° veranschlagt wird; wenn also auch wohl schwerlich die genannten Reisenden mit Klinometern versehen waren, um genauere Messungen vorzunehmen, so ist der Unterschied von 20° denn doch ein zu bedeutender, um blossen Schätzungsfehlern zugeschrieben werden zu können. Bedenkt man vielmehr, dass ein Zeitraum von mehr denn vierzig Jahren beide Beobachtungen trennt, so kann man sich der Vermutung nicht entziehen, dass im Laufe der Zeit eine Abflachung der Wände des Amphitheaters stattgefunden hat. Und dass es damit auch zu einer grösseren Verfestigung der Masse und infolgedessen wieder zu geringerer Geneigtheit des Sandes, die Rutschklänge hervorzubringen, kommen musste, ist nicht minder eine physikalische Notwendigkeit.

Anders liegen die Dinge, wenn man die von Lenz beschriebenen Sandhügel der westlichen Sahara ins Auge fasst. Dies sind nämlich echte Dünen. „Die langgestreckten Sanddünen von Igidi, welche ganze Bergreihen mit scharfen Kanten und Spitzen bilden, haben, wie alle Dünen, eine flachansteigende, dem Winde zugewendete Fläche und einen stärker geneigten, zum Teile sogar sehr steilen Absturz auf der entgegengesetzten Seite."[1]) Wenn also eine ganze Karawane sich

[1]) O. Lenz, S. 56, Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Kontinentaldünen geben Aufschluss: Sokolow-Arzruni, Die Dünen; Bildung, Entwicklung und innerer Bau, Berlin 1894; Bertololy, Kräuselungsmarken und Dünen, Münchener Geographische Studien, 9. Heft, 1900.

auf der Leeseite eines solchen Sandberges abwärts bewegt, so ist es nicht zu wundern, dass eine progressive Verschiebung der ganz labil gelagerten Korpuskeln eintritt, welche die bekannten Geräusche und Töne auslöst.

Auch Lenz macht, ebenso wie Seetzen und Ehrenberg es thaten, die Reibung für die erste Entstehung dieser Klänge verantwortlich, deren stetige Verstärkung dann unbedingt als eine Resonanzerscheinung aufgefasst werden muss. Ob man jedoch mit ihm den einzelnen Quarzkörnchen eine gewisse „Klangfähigkeit" beilegen darf, erscheint nicht sicher; wir kommen vielmehr auf die gleich eingangs verlautbarte Ansicht zurück, dass nicht sowohl die wechselseitige Reibung der einzelnen Teilchen an einander, sondern wesentlich der erzwungene Austritt der bis in grössere Tiefen hinab das lockere Gefüge der Sandmasse durchdringenden Luft sich zuerst als diffuses Reibungsgeräusch, wie es Meyn und Berendt kennen, und allgemach als wirklicher Reibungston im Sinne der Strouhal-Meldeschen Definition (s. o.) bemerklich macht. Bei den flachen baltischen Sandanhäufungen verblieb es beim Knistern, Knirschen, Kreischen; die mächtigeren Sandberge Afrikas, Arabiens, Turkestans gewähren die Möglichkeit wirklicher Tonbildung. Und mit dieser Auffassung sehr wohl vereinbar ist endlich auch die mehrseitig gemachte Wahrnehmung, dass Erhitzung des Sandes der Intensität des Schalles förderlich ist, indem sich eben die eingeschlossene Luft an sich schon in lebhafterem Bewegungzustande befindet.

Hiemit beschliessen wir den ersten Teil unserer Ausführungen. Das Phänomen des tönenden Sandes kann als ein in der Hauptsache geklärtes gelten, indem lediglich die sekundäre Mitwirkung anderer Faktoren, wie etwa der Windrichtung, mangels ausreichender Erfahrungsdaten noch einigermassen in Frage bleibt. Es wäre zu wünschen, dass man hinsichtlich der der zweiten und dritten Abteilung zugewiesenen Schallerscheinungen auch bereits zu einem gleich befriedigenden Gesamtergebnis gelangen könnte.

Sitzung vom 9. Februar 1901.

1. Herr H. Ebert hält einen Vortrag: „Weitere Beobachtungen der Luftelektricität in grösseren Höhen."

2. Herr F. Lindemann legt eine von dem auswärtigen Mitgliede der Classe, Herrn A. Voss in Würzburg, eingesandte Abhandlung: „Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik" vor.

3. Herr P. Groth überreicht eine Arbeit des Herrn Prof. Ernst Weinschenk dahier: „Die Kieslagerstätten im Silberberg bei Bodenmais, ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte der Falbänder", nebst einem Beitrag von Herrn Hüttenverwalter Kaspar Gruber in Bodenmais: „Der Schwefel- und Magnetkiesbergbau am Silberberge in Bodenmais". Die beiden Abhandlungen erscheinen in den Denkschriften der Akademie.

4. Herr K. A. v. Zittel legt eine Abhandlung des Herrn Obermedizinalrathes Dr. Joseph Georg Egger vor: „Ostracoden aus Meeresgrundproben, gelothet von S.M.Sch.Gazelle". Die Abhandlung wird in den Denkschriften veröffentlicht.

Weitere Messungen der elektrischen Zerstreuung in grossen Höhen.

Von Hermann Ebert.

(*Eingelaufen 16. Februar.*)

Nachdem durch zwei Fahrten mit dem Freiballon[1]) nachgewiesen worden war, dass man mit der neuen von Elster und Geitel ausgearbeiteten Methode die Grösse der elektrischen Leitfähigkeit der Atmosphäre im Luftballon in grossen Höhen mit kaum minder grosser Sicherheit wie am Boden messen kann, war es bei der Wichtigkeit der Kenntnis des Jonengehaltes der oberen Schichten erwünscht, bei möglichst ruhig gelagerter Atmosphäre eine neue Messungsreihe anzustellen. Auf die hierzu nötigen meteorologischen Bedingungen ist bei uns nur während des Winters mit einiger Sicherheit zu rechnen und zwar dann, wenn sich ein stabiles barometrisches Maximum mit klarem, kalten Frostwetter über dem Continente für längere Zeit erhält. Es wurde daher beschlossen eine neue, dritte Auffahrt bei der genannten Wetterlage zum Zwecke luftelektrischer Messungen vorzunehmen.

Bei dieser Fahrt, für welche die Mittel von dem Münchener Verein für Luftschiffahrt zur Verfügung gestellt wurden, und die wiederum Herr Dr. Robert Emden leitete, sollte ausserdem eine neue Aufstellart für das Instrument ausprobiert werden. Zu diesem Zwecke war am Gondelrande aussen ein kleines Tischchen durch übergreifende Metallbügel angehängt. Durch

1) Vergl. diese Berichte Bd. XXX, Heft III, p. 511, 1900.

die unteren äusseren Enden derselben gingen zwei grobgewindige Griffschrauben mit Platten an den dem Ballonkork zugekehrten Enden, so dass das Tischchen eingestellt werden konnte. Auf dasselbe wurde das Messinstrument mit allem Zubehör gesetzt. Diese Aufstellung hat sich als eine äusserst stabile und für das Beobachten sehr vorteilhafte bewährt. Endlich wurden bei dieser Fahrt auch Messungen mit einem das ganze Instrument umschliessenden, mit dem Zerstreuungskörper gleichnamig geladenen Fangkäfig angestellt, wodurch in den oberen Schichten sehr grosse Beträge der Zerstreuung erzielt wurden (bis zum 23-fachen der gleichzeitig am Boden gemessenen Zerstreuungen). Da nicht nur negative, sondern auch positive Ladungen mit wesentlich grösserer Geschwindigkeit bei Anwendung des Käfigs zerstreut wurden, so können Störungen durch direkte Bestrahlung des Zerstreuungskörpers (Hallwachs-Effekt) oder durch Ballonladungen nicht die Ursache dieser hohen Neutralisationsgeschwindigkeiten gewesen sein. Im Gegenteil erhält die von Elster und Geitel aufgestellte Ansicht, dass die Atmosphäre mit frei beweglichen elektrisch geladenen Partikelchen „Jonen“ erfüllt sei, eine neue Stütze durch diese Versuche mit dem Fangkäfig, welche zugleich zeigen, dass die Zahl und die Beweglichkeit dieser Teilchen in den höheren Schichten eine ausserordentlich grosse ist.

Während der ganzen, über fünf Stunden dauernden Fahrt wurden gleichzeitig nach einem genau verabredeten Plane in München Zerstreuungsmessungen von Herrn Ingenieur K. Lutz mit einem Instrumente vorgenommen, welches sowohl vor der Fahrt wie nach derselben mit dem im Ballon benutzten Instrumente verglichen worden war.

Dritte Fahrt am 17. Januar 1901.

Schon am 13. Januar bedeckte nach Ausweis der Wetterkarte und des Wetterberichtes der k. b. meteorologischen Centralstation den grössten Teil Europas hoher gleichmässig verteilter Druck, während eine anscheinend über dem Ocean liegende

Depression sich mit ihrem vorderen Rande nur an der Westküste der britischen Inseln bemerkbar machte.

In den continentalen Lagen herrschte im Flachland meist nebliges Wetter; im südlichen Bayern reichte die Nebeldecke bis hart an den Rand der Voralpen heran. Dagegen meldeten alle Hochstationen übereinstimmend wolkenlosen Himmel und sehr reine Gebirgsaussicht.

Am 14. steigerte sich die Herrschaft des hohen Luftdruckes noch mehr, und über Deutschland und Oesterreich lagerte der Kern eines intensiven Maximums mit 780 mm Druck. Gleichzeitig bildete sich allmählich eine Temperaturverteilung mit der Höhe heraus, die für unsere Fahrt bestimmend war, da sie die beste Gewähr für eine möglichst stabile Lagerung der Schichten bot: Während die Temperatur im Flachlande überall zu sinken begann, ging sie auf den Hochstationen in die Höhe.

Am 15. hatte sich die Luftdruckverteilung nicht geändert, noch immer behauptete das barometrische Maximum über dem Continente seine Herrschaft, die über dem Ocean ebenfalls noch immer sich haltende Depression machte sich nur im äussersten Westen geltend. Die Temperaturen sanken bei immer klarer werdendem Wetter im Flachlande immer tiefer, auf den Hochstationen wurde es immer wärmer, so dass bereits an diesem Tage Temperaturumkehr constatiert werden konnte; in München herrschte z. B. am Morgen — 11°, auf der Zugspitze — 8°.

Da die Wetterkarte vom 16. zeigte, dass das über dem Ocean liegende Minimum im Vorgehen begriffen war und daher der Druck im Westen des Continents zu sinken begann, so durfte die Fahrt nicht länger aufgeschoben werden, wenn wir noch von der überaus günstigen Witterungslage Nutzen ziehen wollten; sie wurde also für den nächsten Tag beschlossen. Noch immer behauptete der hohe Druck seine Vorherrschaft über dem Continente, wenn auch das Barometer etwas zurückzugehen begann. In Bezug auf die Höhenstationen herrschte noch immer Temperaturumkehr (München — 12°, Zugspitze — 7°).

Am Fahrttage, den 17. Januar, war keine wesentliche Aenderung in der allgemeinen Wetterlage eingetreten. Noch immer lag das ausgeprägte barometrische Maximum über dem grössten Teile Europas und verlor nur langsam an Intensität. Der Kern desselben wies über Deutschland und Oesterreich noch immer mehr als 770 mm Luftdruck auf. Die Depression dagegen, welche am 16. über den britischen Inseln erschienen war, zog dem Golfstrome folgend nach Norden hin ab. Ueberall herrschte in Central-Europa das heitere Frostwetter der letzten Tage, nur local durch tiefliegende Nebelschichten getrübt.

In München war am Morgen Rauhfrost gefallen und starker Nebel aufgetreten bei einer Temperatur von — 12°, 769 mm Druck und völliger Windstille. Die Bergstationen hatten alle heiteres, wolkenloses Wetter, die Zugspitze — 5° Temperatur.

Das klare Frostwetter dauerte auch noch den folgenden Tag an und erst am 19. trat im Westen Trübung mit zunehmender Temperaturerhöhung ein, während gleichzeitig eine tiefe Depression vor den Scilly-Inseln im Westen Englands erschien. —

Am 16. wurden die beiden Zerstreuungsapparate noch einmal miteinander verglichen; dazu wurden sie auf zwei Pfeilern der Attika des Mittelbaues der technischen Hochschule so aufgestellt, dass alle näherliegenden Gebäudeteile (Dachfirst des Haupttraktes u. s. w.) symmetrisch zu den beiden Standorten lagen; eventuelle Spitzenwirkungen oder sonstige Störungen durch das Gebäude mussten sich auf beide Instrumente in gleicher Weise äussern. Die Entfernung der beiden Instrumente von einander betrug 7,7 m, so dass auch eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen war.

Ein von der individuellen Beschaffenheit des Apparates unabhängiges Maass der elektrischen Zerstreuung geben die Grössen a (gleich der in einer Minute am Zerstreuungskörper neutralisierten Elektricitätsmenge, diese ausgedrückt in Procenten der ursprünglichen Ladung, vergl. die vorige Mitteilung p. 519). In der folgenden Tabelle beziehen sich die ungestrichelten Buchstaben auf das Balloninstrument, die gestrichelten auf den

Vergleichsapparat. Als Versuchsdauer wurde immer eine Viertelstunde gewählt. Hinzugefügt sind die nach der Fahrt erhaltenen Vergleichswerte, sowie die ein Maass für die Unipolarität der Leitfähigkeit abgebenden Werte $q = a_- / a_+$ und endlich das Verhältnis (r) der procentualen Entladungsgeschwindigkeit: Balloninstrument / Vergleichsinstrument für Ladungen von demselben Vorzeichen.

Zeit (p. m.)	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	r
		München, den 16. Januar 1901.					
$2^h\ 27^m$ — 42^m	+	1,36	0,41	0,96	0,42	0,93	0,98
3 15 — 30	—	1,30	0,39		0,39		1.00
		München, den 18. Januar 1901.					
2 45 — $3^h\ 0^m$	+	0,87	0,26	2,07	0,34	1,67	0,77
3 5 — 20	—	1,80	0,54		0,57		0,95
3 25 — 40	+	1,56	0,47	1,26	0,26	2,00	1,83
3 45 — $4^h\ 0^m$	—	1,97	0,59		0,51		1,15
						Mittel	1,11

Die beiden Apparate waren nicht ganz gleich dimensioniert; der im Ballon verwendete hatte einen Zerstreuungskörper von 10,4 cm Höhe und 5,0 cm Durchmesser; das unten benutzte Vergleichsinstrument dagegen einen solchen von 10,2 cm Höhe und 4,6 cm Durchmesser. Die relative Capacität n des Elektroskopes allein zu dem System: Elektroskop + Zerstreuungskörper hatte bei den Instrumenten den Wert 0,488 bezw. 0,450 (Mittel aus je 12 Einzelbestimmungen). Bildet man aus den mitgeteilten Vergleichszahlen r das Mittel, so findet man, dass die Angaben des Vergleichsinstrumentes auf diejenigen des im Ballon benutzten reduciert werden, wenn man die ersteren mit 1,11 multipliciert.

Ein Reductionsfactor von etwa derselben Grösse hat sich auch an anderen Tagen, an denen beide Instrumente an demselben Orte gleichzeitig benutzt wurden, ergeben. Man sieht,

dass gelegentlich nicht unerhebliche Abweichungen vom Mittel vorkommen. Immerhin werden durch die genannte Reduction wenigstens angenähert vergleichbare Werte erhalten. In allen folgenden Tabellen werden daher zum Vergleiche unter den gestrichelten Buchstaben die auf das Balloninstrument durch Multiplication mit 1,11 reducierten Angaben des Vergleichsinstrumentes aufgeführt, so oft der im Ballon benutzte Apparat ohne Fangkäfig, sondern nur mit dem gewöhnlich über ihn gesetzten Schutzdach gegen Sonnenstrahlung und Influenzwirkungen benutzt wurde.

Um aber auch für den Fall, dass das Balloninstrument mit dem Käfig ausgerüstet wurde, die Reduction der Vergleichszahlen zu ermöglichen, wurden die beiden Instrumente wiederholt verglichen:

Balloninstrument im Käfig,
Vergleichsinstrument unter dem Schutzdach.

Ich teile im Folgenden nur die beiden am Tage vor der Fahrt erhaltenen Vergleiche mit.

Zeit (p. m.)	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	R
München, den 16. Januar 1901.							
Balloninstrument im Käfig.							
$2^h\,52^m - 3^h\,7^m$	+	2,03	0,61	1,41	0,30	1,60	2,03
$3\ \ 50 - 4^h\,5^m$	—	3,00	0,90		0,48		1,88
						Mittel	1,96

Der Käfig wurde sehr weitmaschig gewählt, damit er die freie Circulation der Luft möglichst wenig behindere; er war cylinderförmig, 45 cm hoch und 25 cm im Durchmesser. Unten stand er auf einer runden Metallplatte mit Metallrand, welche auf einer mit Siegellackfüssen versehenen, dicken Glasplatte lag. Die Maschen hatten rhombische Gestalt und 46 bezw. 38 mm Diagonalenlänge im Lichten, gegenüber 1,6 mm Dicke des verzinkten Eisendrahtes, aus dem das Netz bestand. Der im

Inneren stehende Zerstreuungsapparat wurde nach dem Vorgange von Elster und Geitel vermittelst einer Sonde, einem in ein Glasrohr mittels Siegellack eingekitteten dicken Metalldrahtes, von der Trockensäule aus so geladen, dass das Drahtnetz, welches gleichzeitig zur Erde abgeleitet wurde, nichts von dieser Ladung empfing. Im Ballon wurde statt der Erdleitung eine längere Drahtleitung benutzt, welche am Rande des Ballonkorbes entlang geführt und mit allen grösseren leitenden Massen in der Gondel, u. A. dem Beobachter verbunden war. Sobald der Apparat im Inneren für sich bis zu einem Potentiale von der Höhe, wie sie auch sonst als Anfangsladung für die Messungen benutzt wurde, gegenüber dem ihn umschliessenden Metallhohlkörper (Netz + metallene Fussplatte), mit dem auch das Elektroskopgehäuse in leitender Verbindung stand, geladen war, wurde die Leitung von dem Drahtnetze abgenommen, so dass der Käfig nun völlig isoliert dastand, da er ja auf dem Glastischchen ruhte; nun wurde die Trockensäule mit dem eben benutzten Pole an den Käfig angeschlossen, ihr anderer Pol mit der Ableitung verbunden, so dass der Käfig mit demselben Vorzeichen wie der Zerstreuungskörper selbst geladen war. Dass das Netz, trotz seiner Maschenweite das von ihm eingeschlossene Elektroskop mit seinem Zerstreuungskörper vollkommen gegen äussere elektrostatische Einwirkungen schützte, war schon daran unmittelbar zu erkennen, dass die Blättchen weder bei den Beobachtungen an der Erde noch bei denen im Ballon irgend wie zucken, wenn die Ableitung oder die Trockensäule an den Käfig angelegt oder von ihm abgenommen wird. Durch besondere Versuche im Laboratorium habe ich mich aber ausserdem davon überzeugt, dass ein elektrisch geladenes Teilchen, welches durch die Maschen in das Innere des Käfigs gelangt ist, dessen elektrostatischen Wirkungen in der That vollkommen entzogen ist. Es wird nicht wieder herausgezogen, wenn die Käfigladung der seinigen etwa entgegengesetzt ist, selbst wenn man den Käfig so stark ladet, dass man kräftige Funken aus ihm ziehen kann.

Dieses Resultat steht vollkommen im Einklange mit den

Berechnungen, welche Maxwell in seinem Treatise, B. I, § 203 ff., über die elektrostatische Schutzwirkung von solchen Metallgittern angestellt hat. Hierdurch erklärt sich die jederzeit zu beobachtende gesteigerte Geschwindigkeit, mit der Ladungen im Inneren des gleichnamig geladenen Käfigs neutralisiert werden, in ungezwungener Weise, falls man sich auf den Standpunkt von Elster und Geitel stellt und annimmt, dass in der Atmosphäre in der That frei bewegliche, positiv und negativ geladene kleine Partikelchen jederzeit vorhanden sind, von denen in einem solchen geladenen Käfig eine grössere Anzahl angesammelt wird.

Die oben mitgeteilten Messungen zeigen, dass der hier verwendete Käfig die Entladungsgeschwindigkeit etwa verdoppelt. Nahezu dieselbe Zahl $R = 2$ hat sich an anderen Tagen ergeben, z. B. am 9. Dezember 1900, einem kalten, klaren Wintertage, an dem die Vergleichungen von früh morgens bis zum Abend fortgesetzt wurden. Wir wollen daher die Angaben des Vergleichsinstrumentes immer mit 2 multipliciert unter a' in den folgenden Tabellen dann aufführen, wenn oben im Ballon mit Käfig gearbeitet wurde. Diese Zahlen geben dann ungefähr die Entladungsgeschwindigkeit in Procenten der Anfangsladung an, welche von dem Balloninstrumente angezeigt würde, wenn dasselbe zur gleichen Zeit unten mit dem Käfig benutzt werden könnte. Freilich ist diese Beziehung der gleichzeitigen Beobachtungen auf einander eine nicht ganz sichere. Denn die Spannungen, bis zu denen der Käfig durch die Trockensäule geladen wird, wechseln mit dem Zustand der Säule, der bekanntlich selbst kein sehr constanter ist. Dass aber vor, während und nach der Fahrt die benutzte Ladesäule keine grossen Aenderungen erfahren hat, geht aus Folgendem hervor. Zur Erzielung eines geeigneten Ausschlages war die Spannung der ganzen Säule zu gross; sie musste an einer Stelle nahe der Mitte abgeleitet werden, wenn der für die Messung geeignetste Maximalausschlag am Elektroskop erhalten werden sollte. Die Stellen, an denen für die beiden Vorzeichen die Ableitung zu erfolgen hatte, blieben während der drei Beobachtungstage die

gleichen, ein Zeichen, dass sich wenigstens in dieser Zeit die Spannung der Säule nicht merklich verändert hatte. —

Am Fahrttage massen wir früh 8^h 40^m am Aufstiegplatze — 15,2° C. und 89% Feuchtigkeitsgehalt, einem Mischungsverhältnis (kg Wasserdampf pro kg Dampf-Luftgemisch) von 0,0011 entsprechend. Rauhfrost und Nebel waren ringsum. Während das Elektroskop mit Schutzdach negativ geladen auf einem Wagen stand, wurde die Ballonkugel, als sie aus der Ballonhalle gebracht wurde, so dicht wie möglich an das Instrument herangeführt. Nicht das geringste Zucken der Blättchen war bemerkbar, die Zerstreuung zeigte vor und nach dem Herannahen des Ballons keinen Unterschied. Dadurch wird die früher (vorige Mitteilung p. 520) geäusserte Befürchtung, der Ballon möchte wenigstens im Anfange, bis sich seine Eigenladung zerstreut hat, die Messungen beeinflussen, entkräftet und die Ergebnisse der Herren Tuma und Börnstein, welche auf den Mangel einer merklichen Eigenladung des Ballons hinweisen, auch durch die Zerstreuungsmethode bestätigt, eine Thatsache, welche natürlich das Vertrauen, welches man in die im Freiballon angestellten Messungen setzen darf, erheblich steigert. Sowohl am Aufstiegsorte vor der Fahrt wie am Landungsplatze nach derselben wurden Messungen mit beiden Vorzeichen vorgenommen; die folgende Tabelle zeigt, dass die erhaltenen Resultate untereinander gut übereinstimmen, so dass das Instrument durch die Fahrt nicht gelitten haben konnte; die Werte liegen ferner ganz in dem Bereiche derjenigen, welche sonst um die entsprechende Tageszeit am Boden erhalten wurden, sowie der am Vergleichsinstrumente erhaltenen Zahlen, wenn dieselben auch am Morgen etwas später, am Nachmittage, nach der Landung, etwas früher erhalten wurden, als die mit dem Balloninstrumente gefundenen Werte. Die Zahlen V der letzten Colonne geben den Vergleich der Beobachtungsorte ($V = a$ [Balloninstrument] / a' [Vergleichsinstrument, letzteres reduciert]).

Zeit	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	V
München, den 17. Januar, Vormittags.							
Exerzierplatz der Militär-Luftschifferabteilung.							
$8^h\ 30^m$ — 45^m	+	2,33	0,70	0,91	0,67	0,51	1,0
8 48 — 58	—	2,11	0,63		0,39		1,6
Hohenaltheim bei Nördlingen, den 17. Januar, Nachmittags.							
2 30 — 45	+	3,35	1,00	0,86	0,33	1,73	3,0
2 50 — $3^h\ 5^m$	—	2,88	0,86		0,57		1,5

Um $9^h\ 8^m$ fuhren wir mit starkem Auftrieb ab; in einer Minute hatten wir 79 m über dem Boden die obere Schicht des Nebels erreicht. Hier aber wurde der Aufstieg plötzlich gebremst, da wir mit unserer kalten Gasfüllung in eine sehr viel wärmere Luftschicht eingetreten waren. Erst als vier Sack Ballast ausgegeben waren, vermochten wir den Einfluss der erheblichen Temperaturumkehr zu überwinden und weiter zu steigen. Um $9^h\ 18^m$ wurde in 842 m Meereshöhe (318 m über dem Boden) + 1,2° Temperatur gemessen, so dass wir in ca. 16° wärmere Luftschichten einfuhren. Die durch die Bergstationen bereits angezeigte Temperaturumkehr wurde also auch im freien Luftmeer angetroffen und war hier sogar noch stärker ausgeprägt, weil sich das Luftmeer ca. 4°—6° wärmer als die gleich hoch gelegenen Hochstationen erwies. Ueber uns war tiefblauer wolkenloser Himmel, an dem selbst das leichteste Cirrusgewölk fehlte. Die Alpen waren von seltener Klarheit, Bodennebel bedeckte die Hochebene nur zum Teil, besonders dicht über München, so dass nur die runden Kuppen der Frauenthürme aus dem weissen, streifenförmig angeordneten Nebelmeere emporragten. Es konnte keinem Zweifel unterliegen, dass wir uns unter der Einwirkung a b s t e i g e n d e r Luftströme befanden, die uns die ionenreichere Luft der höheren

Schichten zutrieb und so durften wir ausnehmend grosse Zerstreuungsgeschwindigkeiten von vornherein erwarten.

Auch bei dieser Fahrt waren deutlich drei verschieden geartete Luftschichten zu unterscheiden, die sich durch verschiedene Temperaturen und Temperaturgradienten, verschiedenes Mischungsverhältnis und namentlich durch die verschiedene Richtung und Geschwindigkeit, in der und mit der sie uns bewegten, hinreichend scharf gegen einander abgegrenzt werden konnten.

1. Luftschicht: vom Boden bis ca. 1400 m.

In dieser untersten Schicht wurde zunächst die bereits erwähnte sehr starke Temperaturzunahme mit der Höhe unmittelbar über der Nebelschicht beobachtet. Der Temperaturgradient ging in ca. 1000 m in eine dem adiabatischen Gleichgewichte entsprechende Zunahme von rund 1° pro 100 m Anstieg über. Diese Temperaturverteilung war der Ausdruck einer äusserst stabilen Lagerung der dem Boden unmittelbar aufliegenden Schicht. Der relative Feuchtigkeitsgehalt war auf 49% herabgegangen (gegen 89% am Boden), das Mischungsverhältnis war auf 0,00245 gestiegen. In dieser untersten Schicht wurden elektrische Verhältnisse angetroffen, welche denen am Boden insofern glichen, als eine ausgesprochene Unipolarität (durch q gemessen) und ein Ueberwiegen an freien + Jonen angezeigt war; da die Beweglichkeit der Jonen in der klaren reinen Luft eine viel grössere als unten im Nebel sein musste, dürfen wir uns nicht wundern für den negativ geladenen Zerstreuungskörper eine ca. viermal so grosse Entladungsgeschwindigkeit zu finden, als sie gleichzeitig unten beobachtet wurde. Es wurde mit Schutzdach aber ohne Käfig gemessen.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis	Spannungen
9^h 18^m — 33^m	995 m	+ 1,6° C.	49 %	0,0024	189—183
9 37 — 52	1275	3,0	49	0,0025	199—172

2. Luftschicht: von 1400—2000 m.

Etwa um 10^h traten wir in eine eigentümlich beschaffene Luftschicht ein, die wir erst um 11^h 8^m etwa in 2000 m Höhe verliessen: eine nahezu vollkommen isotherme Schicht mit dem Temperaturgradienten Null. Bekanntlich bildet es noch ein ungelöstes Problem der Thermodynamik der Atmosphäre, wie solche isotherme Schichten von mehreren Hundert Metern Mächtigkeit im Luftmeere zu Stande kommen und wie sie sich zu erhalten vermögen. Der Uebergang war kein allmählicher, sondern ein plötzlicher mit 44 % relativer Feuchtigkeit, + 4,4° Temperatur und 0,0027 kg Mischungsverhältnis, Werte, welche bis zum Austritt aus der Schicht fast die gleichen blieben. Vielleicht hatten wir es sogar mit zwei übereinander liegenden und schwach gegeneinander bewegten isothermen Schichten, die in etwa 1750 m Höhe aneinander grenzten, zu thun.

In dieser Schicht wurde zum ersten Male mit Käfig gearbeitet. Das Schutzdach über dem Zerstreuungskörper wurde dabei weggelassen, da die Laboratoriumversuche gezeigt hatten, dass der Drahtkäfig genügenden elektrostatischen Schutz gewährte.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis	Spannungen
10^h 2^m — 17^m	1470 m	+ 4,4° C.	44 %	0,0027	192—141
10 22 — 27	1550	4,5	45	0,0028	180—141
10 29 — 40	1605	4,3	46	0,0028	197—126

Spannungs-abnahme pro 15 Minuten	Vorzeichen	*E*	a %	*q*	a' %	*q'*	*V*
6 Volt	+	1,38	0,41	4,58	0,51	0,86	0,80
27 „	—	6,32	1,89		0,44		4,3

Wie die vorstehenden Zahlen zeigen, wurden verhältnismässig sehr hohe Werte für die Zerstreuung gefunden. Dabei ist nicht nur die Neutralisationsgeschwindigkeit der negativen Ladungen gesteigert, sondern auch die der positiven, ja die Entladungsgeschwindigkeit der letzteren ist relativ mehr erhöht, als diejenige der negativen Ladungen, so dass das mittlere Verhältnis $q = a_- / a_+$ gegen die vorher mit Schutzdach erhaltenen Werte zurückgeht. Es kann also kein merklicher Hallwachseffekt vorliegen und die intensive Sonnenbestrahlung hat keinen Einfluss auf den vollkommen geschwärzten Zerstreuungskörper mehr, wie dies auch die Herren Elster und Geitel feststellten. Das Zurückgehen des Wertes für *q* zeigt an, dass sich die Unipolarität der luftelektrischen Leitung mit der Höhe mehr und mehr ausgleicht, während zugleich die absoluten Beträge der Leitfähigkeiten für beide Vorzeichen zunehmen, genau wie dies schon bei den früheren Fahrten gefunden worden war.

3. Luftschicht: über 2000 m.

Erst als wir um $11^h\ 8^m$ nach Ballastauswerfen die Höhe von 2000 m überschritten, kamen wir aus der isothermen

Spannungs-abnahme pro 15 Minuten	Vorzeichen	*E*	a %	*q*	a' %	*q'*	*V*
51 Volt	+	13,39	4,01	2,18	0,96	1,50	4,2
(117)	—	31,81	9,53		1,44		7,1
(97)	—	26,45	7,93				

Schicht heraus und traten in eine neue Luftschicht ein, was sich sofort auch an einer Aenderung der Fahrtrichtung zu erkennen gab; dieselbe ging bis dahin ziemlich genau nach Westen und bog jetzt nach Nordwesten um. In dieser Schicht nahm die Temperatur regelmässig von + 4,0° in der isothermen Schicht auf — 2,5° ab in der höchsten bei dieser Fahrt erreichten Höhe von rund 3200 m mit einem Gradienten von ca. 0,53 auf 100 m Erhebung. Dieser geringe Gradient ist wieder ein Zeichen von der ausserordentlich stabilen Lagerung aller Luftschichten an diesem Tage auch in diesen grösseren

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis	Spannungen
$10^h 52^m$ — $11^h 12^m$	1930 m	+ 3,3° C.	42 %	0,0027	189—170
11 17 — 32	2285	2,1	42	0,0025	198—168
11 42 — 47	2375	1,7	43	0,0024	174—122
11 49 — 59	2560	1,7	42	0,0024	183—104
12 4 — 9	2880	0,3	42	0,0023	142—104
12 11 — 17	2930	— 1,0	42	0,0023	178—104
12 19 — 24	3005	1,9	46	0,0023	179—125
12 32 — 47	3105	2,2	47	0,0023	198—183
12 51 — $1^h 6^m$	3060	2,1	46	0,0024	188—126
1 11 — 1 20	2730	+ 0,6	43	0,0024	188—184

Höhen. Die relative Feuchtigkeit erhielt sich auf 42—47 %, das Mischungsverhältnis ging von 0,0027 auf 0,0023 zurück. Noch während des Ueberganges aus einer in die andere Luftschicht wurde die erste der unten folgenden Messungen ohne Käfig aber mit Schutzdach angestellt. Wenn ihr auch wegen der grossen Vertikalbewegung kein allzugrosses Gewicht zukommt, so zeigt sie doch beim Vergleiche mit den in der ersten Schicht viel tiefer unten in gleicher Weise angestellten Messungen durch die Höhe der erhaltenen Zerstreuung für +, dass sich die relative Zahl der — Jonen in diesen höheren

Schichten erheblich vergrössert haben musste. Die — Zerstreuung zeigt dagegen nur eine geringe Zunahme, die durch q ausgedrückte Unipolarität wird kleiner.

In dieser Luftschicht wurden bei Anwendung des Käfigs (Zahlen unterhalb des ersten Striches) die grössten Entladungsgeschwindigkeiten erhalten, die ich je beobachtet habe. Während bei den Messungen am Boden für jede Beobachtung gewöhnlich ein Zeitraum von 20—30 Minuten gewählt wird, um einen deutlichen Rückgang der Blättchen zu beobachten, fielen dieselben hier oben so rasch zusammen, dass die Messung be-

Spannungsabnahme pro 15 Minuten	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	V
(14) Volt	+	3,44	1,03	2,07	0,36	1,11	2,9
30	—	7,12	2,13		0,40		5,2
(156)	+	46,21	13,86		0,60		20,8
(119)	+	36,80	11,04				
(114)	—	40,57	12,16	1,17		2,03	
(185)	—	58,33	17,48				11,9
(162)	—	46,78	14,03		1,22		
15	+	3,40	1,02	5,10	0,31	1,71	3,3
62	—	17,36	5,20		0,54		9,6
(7)	+	1,55	0,46				

reits nach 5 Minuten beendet war, da ein weiteres Warten zu zu kleinen Divergenzen geführt hätte, bei denen die Potentialmessungen ungenau werden. Dieses rasche Verschwinden der Ladungen hat den grossen Vorteil, dass viel mehr Einzelmessungen ausgeführt werden können, was den grossen, namentlich bei Hochfahrten mit Wasserstoffgas nicht zu unterschätzenden Vorzug bietet, dass man für einzelne Luftschichten geltende Werte erhalten kann, auch wenn man bei rascher Vertikalbewegung die Schichten schnell wechseln muss.

Die zwischen $11^h\ 42^m$ und $11^h\ 47^m$ in 2375 m Höhe er-

haltene Zerstreuungsgeschwindigkeit von 13,86% für + Ladung übertrifft diejenige, welche man gleichzeitig unten (nach den Angaben des Vergleichsinstrumentes und der oben angegebenen Reduction) bei demselben Instrumente mit dem Käfig erhalten haben würde um das 23 fache. Noch grösser war die Entladungsgeschwindigkeit der — Ladung zwischen $12^h\ 11^m - 17^m$ in 2930 m mit $a_- = 17{,}48\%$.

Während wir noch auf der grössten Höhe waren, wurde zwischen $12^h\ 32^m$ und $1^h\ 6^m$ nochmals mit Schutzdach beobachtet (Zahlen unter dem zweiten Strich).

Wie man sich die hierbei zu Tage tretende Unipolarität von einer Grösse, wie sie diesen hohen Schichten bei den anderen Fahrten nicht eigen gewesen ist, zu erklären habe, vermag ich vor der Hand noch nicht anzugeben.

Um $1^h\ 13^m$ begann der Ballon sehr rasch zu fallen, ohne dass der Fall weiter aufgehalten werden konnte. Die begonnene Messung mit + Ladung und Schutzdach ohne Käfig wurde indessen noch weiter fortgesetzt (letzte Reihe der Tabelle). Indessen besitzt der erhaltene Wert nicht dieselbe Sicherheit, wie die anderen Zahlen, da wegen allerlei Hantierungen in der Gondel, das Instrument nicht mehr so grosse Ruhe hatte wie zuvor. —

Wie früher, so wurde auch bei dieser Fahrt nicht nur am Anfang und am Ende der in der Tabelle angegebenen Zeiten, sondern auch in Zwischenzeiten, meist in Intervallen von je 5 Minuten abgelesen. Das gesamte im Ballon aus 49 Einzelablesungen erhaltene Zahlenmaterial lässt wieder erkennen, dass im Allgemeinen in gleich lange dauernden Unterabschnitten jeder Beobachtungsreihe etwa die gleichen Elektricitätsmengen unabhängig von der Höhe des Ladungspotentiales entladen werden (vergl. vorige Mitteilung Nr. 529), wenn dieses Mal diese Erscheinung auch nicht so deutlich wie sonst hervorgetreten ist.

Resultate:

1. Die Ergebnisse der früheren Fahrten haben sich vollkommen bestätigt.

2. Bei der sehr regelmässigen Schichtung der Atmosphäre bei dem barometrischen Wintermaximum, in welches diese dritte Fahrt fiel, war die nach oben hin abnehmende Unipolarität, also die Verminderung der Wirkung des negativ geladenen Erdkörpers bei erheblich zunehmender Entladungsgeschwindigkeit für beide Vorzeichen deutlich ausgeprägt.

3. Die Aufstellung des Zerstreuungsapparates auf einem ausserhalb der Gondel befestigten Tischchen hat sich sehr gut bewährt und empfiehlt sich aus verschiedenen Gründen mehr als die Aufhängung im Inneren des Ballonkorbes.

4. Durch Einbauen des Zerstreuungsapparates in einen gleichnamig geladenen Fangkäfig lässt sich die Zerstreuungsgeschwindigkeit für beide Vorzeichen erheblich steigern; so wurde in 2375 m Höhe eine 23 mal so grosse Entladungsgeschwindigkeit für + beobachtet, als dasselbe Instrument am Boden (nach Ausweis eines Vergleichsinstrumentes) mit Käfig ergeben haben würde. Dabei dürfte die Genauigkeit nur unbeträchtlich vermindert sein; dagegen wird der Vorteil erreicht, dass die Zahl der Einzelbestimmungen erheblich gesteigert werden kann.

5. Bei dieser Fahrt haben sich sehr grosse Beträge der Zerstreuung in der Höhe ergeben, offenbar unter der Wirkung einer schon seit vielen Tagen andauernden grossen Luftklarheit und absteigender Luftströme, welche sehr ionenreiche Höhenluft dem Instrumente, namentlich dem vom Schutzdach nicht bedeckten, zuführten.

6. Störungen durch Ballonladungen oder durch lichtelektrische Wirkungen waren nicht nachweisbar.

Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik.

Von A. Voss in Würzburg.

(Eingelaufen 16. Februar.)

Herr C. Neumann[1]) gelangt bei einer kritischen Besprechung des Ostwald'schen Principes des grösstmöglichen Umsatzes der Energie[2]) zu folgendem Satze:

„Ein beliebigen Bedingungen unterworfenes materielles System bewege sich unter Einfluss gegebener Kräfte, die ein Potential haben. Befindet sich dieses System zu Anfang eines unendlich kleinen Zeitelementes τ in Ruhe, so wird unter allen mit jenen Bewegungen und mit der Formel des Principes der lebendigen Kraft verträglichen virtuellen Bewegungen eine vorhanden sein, deren lebendige Kraft zu Ende der gegebenen Zeit τ am grössesten ist. Diese letztere wird alsdann diejenige sein, welche unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte während der Zeit τ in Wirklichkeit eintritt.“

Wenn es sich darum handelt, diesen Satz, der übrigens mit bekannten Sätzen über die Wirkung momentaner Kräfte zusammenhängt,[3]) auf den Fall auszudehnen, wo das System sich nicht in relativer Ruhe befindet, so wird die unbestimmte

[1]) C. Neumann, das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes, Leipz. Ber., p. 184 (1892).

[2]) W. Ostwald, Lehrbuch d. allg. Chemie, 2. Aufl., Bd. 2, p. 37 (1892).

[3]) Man vergleiche z. B. J. Routh, Dynamik der Systeme schwerer Körper, übers. v. A. Schepp, Bd. 1, p. 335 u. ff., sowie die Noten von J. Bertrand zur Mécanique analytique (Lagrange, Oeuvr. Compl. XI. p. 311).

Form, in welcher in der Mechanik von virtuellen Bewegungen und Verrückungen Gebrauch gemacht wird, hinderlich. Man versteht unter solchen bald fingirte Verschiebungen, dann wieder Geschwindigkeiten oder auch Beschleunigungen, welche den betrachteten Puncten zur Zeit t oder auch für die Lage, welche sie zur Zeit $t + dt$ einnehmen, zugeschrieben werden. Es beruhen darauf auch die Unklarheiten, welche über manche Sätze, wie z. B. über das ebenfalls mit dem obigen Theorem in engem Zusammenhange stehende Princip des kleinsten Zwanges noch gegenwärtig selbst in ausführlicheren Lehrbüchern[1]) enthalten sind.

Versucht man, dem obigen Falle, soweit er sich auf die Vorstellung einer bei einer virtuellen Bewegung erzeugten lebendigen Kraft bezieht, eine vollständig klare mechanische Bedeutung zu geben, so kommt man zu folgender Anschauung.

Werden die Coordinaten der Punkte (x_i), (y_i), (z_i) des Systems zur Zeit $t = 0$ ohne Unterschied mit x_i, ihre Massen durch m_i, die auf sie wirkenden Kraftcomponenten durch X_i bezeichnet, so dass

$$x_1 = (x_1),\quad x_2 = (y_1),\quad x_3 = (z)_1;\ x_4 = (x_2),\ \text{etc.}\ .\ .$$
$$m_1 = m_1,\quad m_2 = m_1,\quad m_3 = m_1\ ;\ .\ .$$
$$X_1 = X_1,\quad X_2 = Y_1,\quad X_3 = Z_1\ ;\ .\ .$$

sind, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung[2])

$$1)\qquad m x_i'' = X_i + \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

falls die Bedingungen durch die Gleichungen

$$\varphi_s = 0,\quad s = 1, 2 \ldots k$$

---

[1]) Vgl. z. B. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1880, 2. Aufl., Bd. 2, p. 502.

[2]) Die Differentialquotienten von x_i nach t sind durch nebengesetzte Striche bezeichnet, so dass $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}$ u. s. w.

ausgedrückt sind. Die lebendige Kraft T, nach Potenzen der Zeit t entwickelt, ist gegeben durch

$$2\,T = t^2 \sum m_i\, x''^2_i + \,..$$

Man führe nun das System unter denselben Kräften ebenfalls aus der Ruhelage, aber unter anderen Bedingungen

$$\psi_\sigma = 0\,, \quad \sigma = 1, 2 \,....\, l,$$

welche mit der Lage der Puncte verträglich sind, und bezeichne die entstehenden Beschleunigungen durch ξ''_i, so ist

$$2) \qquad m_i\, \xi''_i = X_i + \sum \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i}$$

und die lebendige Kraft T_1 gegeben durch

$$2\,T_1 = t^2 \sum m_i\, \xi''^2_i + \,..$$

Danach wird

$$2\,(T - T_1) = t^2 \sum m_i\, (x''_i - \xi''_i)^2 + 2\, t^2 \sum m_i\, \xi''_i\, (x''_i - \xi''_i)$$

oder, wie nach 1) und 2)

$$m_i\, (x''_i - \xi''_i) = \sum \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i} \right)$$

$$2\,(T - T_1) = t^2 \sum m_i\, (x''_i - \xi''_i)^2 + 2\, t^2 \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\, \xi''_i \;{}^{1)}.$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite verschwindet sicher dann, wenn die virtuelle Bewegung so festgesetzt wird, dass die Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ die Bedingungen $\varphi_s = 0$ vollständig enthalten, also z. B.[2]) aus letzteren und beliebigen weiteren ebenfalls von t unabhängigen ausgewählt wurden. Unter diesen Voraussetzungen ist daher T in der That ein Maximum.

Diese Betrachtung kommt übrigens vollständig mit der von Herrn Neumann zu Grunde gelegten Vorstellung virtueller Bewegungen überein. Dagegen brauchen die wirkenden

---

[1]) Alle $\sum$ Zeichen erstrecken sich immer auf sämmtliche mehrfach vorkommende Indices.

[2]) Die Bedingungen für ψ sind im folgenden allgemein definirt.

Kräfte keiner Bedingung irgend welcher Art zu unterliegen,[1]) während allerdings die Bedingungen von der Zeit unabhängig sein müssen.[2])

Der angegebene Satz lässt sich indessen noch erweitern. Er bleibt bestehen, wenn die ξ_i'' nur so gewählt sind, dass

$$\sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \xi_i''$$

einen positiven Werth hat. Dazu ist aber erforderlich, dass die virtuelle Arbeit der Reactionen des Systemes

---

[1]) D. h. bis auf die auch im folgenden festzuhaltende Voraussetzung, dass die Coordinaten der Systempuncte für die wirkliche und jede virtuelle Bewegung in der Form

$$x_i + A_i t + B_i t^2 + R_i t^3$$

wo R_i den Rest bezeichnet, darstellbar sind. Alsdann handelt es sich auch nicht mehr um eine unendlich kleine, sondern um eine hinreichend kleine Zeit, während der die Maximumeigenschaft besteht.

[2]) Um diesen Punct völlig sicher zu stellen, betrachte man etwa die Bewegung eines einzelnen Punctes von der Masse eins auf der Fläche $\varphi = 0$, deren Gleichung t enthält und definire die virtuelle Bewegung durch $\varphi = 0$, $\psi = 0$, wo ψ wieder t enthalten kann. Man findet dann vermöge der Gleichungen

$$x_i'' = X_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\xi_i'' = X_i + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

für den Ausdruck

$$\sum m_i \xi_i'' (x_i'' - \xi_i'')$$

den Werth

$$(\lambda - \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

während die Lagrange'schen Multiplicatoren λ, μ, ν die Gleichung befriedigen

$$(\lambda - \mu) \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \nu \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

so dass der angegebene Werth nur dann verschwinden würde, wenn φ und ψ t linear enthalten. Der Satz könnte also nur dann bestehen bleiben, wenn der Begriff der virtuellen Bewegung noch weiter als nothwendig eingeschränkt wird.

bei den ξ_i'' entsprechenden virtuellen Verschiebungen, die sonst völlig beliebig sein können, einen positiven Werth besitzt.

Auf den Fall, wo das System sich bereits in einem beliebigen Bewegungszustande befindet, lässt sich dieser Satz nicht unmittelbar übertragen. Auch kann man mit virtuellen Verschiebungen, welche lebendige Kraft hervorrufen, jetzt keinen klaren Sinn mehr verbinden, und die Benutzung solcher Vorstellungen muss nothwendiger Weise zu Missverständnissen führen. Trotzdem besteht ein dem obigen Maximaltheorem ähnliches aber allgemeineres, wenn man den strengen Begriff virtueller Bewegungen festhält, der im Vorstehenden entwickelt wurde. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Wenn die Geschwindigkeiten der Systempuncte x_i zur Zeit $t = 0$ mit a_i bezeichnet werden, so sind dieselben zur Zeit t

$$3)\qquad \frac{d x_i}{d t} = a_i + t x_i'' + \frac{t^2}{2} x'''_i + \ldots$$

also ist die lebendige Kraft gegeben durch

$$2T = 2T_0 + 2t \sum X_i a_i + t^2 \sum m_i (x''^2_i + a_i x'''_i) + \ldots$$

wobei $T_0 = \frac{1}{2} \sum m_i a_i^2$ und vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung

$$\sum m_i x'''_i a_i = \sum a_i \frac{d X_i}{d t} + \sum \lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k$$

bei festen Verbindungen φ_s wird.

Man kann aber auch von einer relativen lebendigen Kraft τ sprechen, welche den relativen Geschwindigkeitscomponenten $x_i' - a_i$ entspricht; diese hat den Werth

$$4)\qquad \tau = \frac{t^2}{2} \sum m_i x''^2_i + \ldots$$

so dass

$$\Omega = 2T - \tau = 2T_0 + 2t \sum X_i a_i$$
$$+ t^2 \sum \left(\frac{m_i x''^2_i}{2} + a_i \frac{d X_i}{d t} + \lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k \right)$$

wird. Für eine virtuelle Bewegung, deren Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ mit der Lage des Systems und jenen Geschwindigkeiten a_i verträglich sind, deren Beschleunigungen wie vorhin durch ξ_i'' bezeichnet werden, kann man daher setzen

$$\Omega' = 2T_0 + 2t\sum X_i a_i + t^2 \sum\left(\frac{m_i \xi''^2_i}{2} + \frac{dX_i}{dt} a_i + \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma a_i a_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) + ..$$

Demnach wird

$$\Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x''^2_i - \xi''^2_i) + t^2 \sum\left(\lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k + ..$$

Für die rechte Seite ergiebt sich aber weiter nach den Gleichungen 1) und 2)

$$\frac{t^2}{2} \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2$$

$$+ t^2 \sum \xi_i'' \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i}\right) + \left(\lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k$$

oder wegen der bekannten Identitäten

$$\sum \xi_i'' \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k = 0$$

$$5) \quad \Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 + t^2 \sum \lambda_s \left(\xi_i'' \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_s a_i a_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) + ..$$

Unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ die Bedingungen $\varphi_s = 0$ vollständig unter sich enthalten oder allgemeiner k der Functionen ψ_σ in deren ersten und zweiten Differentialquotienten mit denen der Functionen φ_s beziehlich für die Lage zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen, d. h. k der Mannigfaltigkeiten $\psi = 0$ die $\varphi = 0$ beziehlich osculiren, ist aber der zweite Theil auf der rechten Seite von 5) Null, also

$$\Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 + ..$$

beständig positiv. Es ist mithin der Ueberschuss Ω der doppelten lebendigen Kraft $2T$ über die relative lebendige Kraft τ ein Maximum im Vergleich zu dem

entsprechenden Ueberschuss, der für das System in derselben hinreichend kleinen Zeit bei einer virtuellen Bewegung desselben entsteht.[1])

Für die Differenz $2(\tau - \tau_1)$ findet man nach 3) unter der Voraussetzung, dass die $\psi_\sigma = 0$ die $\varphi_s = 0$ vollständig enthalten,

$$2(\tau - \tau_1) = t^2 \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 - 2t^2 \sum \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k;$$

dieselbe wird daher nicht, wie Herr Helm[2]) behauptet, der sich zur Ableitung einer Formel für diesen Werth virtueller Verschiebungen bedient hatte, durch den Ausdruck

$$t^2 \left(\sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 - 2\, T_0\right)$$

dargestellt.

Das angegebene Maximaltheorem kann übrigens auch noch unter der Voraussetzung erweitert werden, dass die Bedingungsgleichungen $\psi_\sigma = 0$ nur mit den bereits bestehenden Geschwindigkeiten verträglich sind, d. h. die Mannigfaltigkeiten $\psi = 0$ die $\varphi = 0$ sämmtlich für die Lage bei $t = 0$ berühren. Schreibt man nämlich den zweiten Theil von 5) (rechts) in der Gestalt

$$t^2 \sum (\xi_i'' - x_i'')\, \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

so erkennt man sofort:

Jener Ueberschuss ist auch ein Maximum gegenüber allen virtuellen Bewegungen, bei denen die Arbeit der Reactionen des Systems in Bezug auf die Abweichung $\xi_i'' - x_i''$ der Systempuncte einen positiven Werth hat.

Wir kehren jetzt zu den engeren Voraussetzungen über die $\psi_\sigma = 0$ zurück. Da die Maximumeigenschaft der Function Ω für die wirkliche Bewegung characteristisch ist, so muss

---

[1]) Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit 0 und t durch v_i^0, v_i, den Winkel desselben durch ω_i, so ist

$$\Omega = T + \sum m_i v_i v_i^0 \cos \omega_i - T_0.$$

[2]) G. Helm, die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwicklung, Leipz. 1898, p. 252.

man auch umgekehrt die Gleichungen derselben aus dieser Eigenschaft herleiten können. Wir beweisen daher den folgenden Satz:

Die Voraussetzung der Maximum-Minimumeigenschaft der Function Ω führt zu den Gleichungen der Bewegung, falls der allgemeine Satz über die Beziehung zwischen kinetischer Energie und Arbeit als gültig vorausgesetzt wird, d. h. die Bedingungen die Zeit nicht enthalten.

Entwickelt man in der Gleichung

$$T - T_0 = \int_0^t \sum X_i \, d x_i$$

beiderseits nach Potenzen von t, indem man für T seinen Werth aus 3) bildet, so folgt

$$t \sum m_i a_i x_i'' + \frac{t^2}{2} \sum (m_i x_i''^2 + a_i m_i x'''_i) + \ldots$$

$$= t \sum X_i a_i + \frac{t^2}{2} \sum \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} \right) + \ldots,$$

also müssen die Gleichungen

$$\text{6)} \quad \begin{aligned} &\sum m_i a_i x_i'' = \sum X_i a_i \\ &\sum (m_i x_i''^2 + a_i m_i x'''_i) = \sum \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} \right) \end{aligned}$$

gelten. Der Ausdruck

$$\Omega = 2\, T_0 + 2\, t \sum a_i x_i'' m_i + t^2 \sum \left(\frac{m_i x_i''^2}{2} + m_i a_i x'''_i \right) + \ldots$$

wird daher

$$2\, T_0 + 2\, t \sum X_i a_i + \frac{t^2}{2} \sum \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} - \frac{m_i x_i''^2}{2} \right) + \ldots$$

und soll ein Max.-Min. werden, falls die Bedingungsgleichungen

$$\text{7)} \quad \begin{aligned} &\sum m_i a_i x_i'' = \sum X_i a_i \\ &\sum \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} x_i'' + P_s = 0 \end{aligned}$$

für die x_i'' bestehen. Dies gibt

$$X_i - m_i x_i'' = \mu a_i - \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i};$$

multiplicirt man diese Gleichungen mit den a_i und summirt, so folgt nach 7) wegen

$$\sum a_i \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0,$$

$$\mu \sum a_i^2 = 0.$$

Entweder sind nun alle a_i gleich Null; dann befindet sich das System in relativer Ruhe. Oder das System hat einen beliebigen Bewegungszustand, dann muss $\mu = 0$ sein. In beiden Fällen ergeben sich so die Gleichungen

$$m_i x_i'' = X_i + \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

wie gezeigt werden sollte.

Wir geben dem bewiesenen Satze schliesslich noch die folgende Form:

Die Bewegung eines beliebigen materiellen Systems unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte und unter festen Verbindungen ist in jedem Augenblicke dadurch characterisirt, dass der Ueberschuss der gewöhnlichen Beschleunigung der kinetischen Energie des Systems über die Beschleunigung der halben relativen kinetischen Energie desselben für die wirklich eintretende Bewegung einen grösseren Werth hat, als für irgend eine mit den Bedingungen verträgliche virtuelle Bewegung.

Mit allgemeinen Gesichtspuncten teleologischer Art dürfte sich derselbe in ungezwungener Weise nicht in Verbindung bringen lassen.

Der Satz kann wegen seiner Beschränkung auf feste Verbindungen weder das d'Alembert'sche noch das mit letzterem für Bedingungs-Gleichungen äquivalente Gauss'sche Princip ersetzen. Für das letztere erhält man übrigens im Anschluss an die entwickelten Anschauungen eine Ausdrucksweise, die

gewisse Vortheile bieten dürfte. Bewegt sich ein Punct des Systems, der zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten x_i^0, die Geschwindigkeitscomponenten a_i hat, unter Einfluss der Kräfte X_i und der Bedingungen $\varphi_s = 0$, so sind seine Coordinaten zur Zeit t

$$x_i = x_i^0 + a_i t + x_i'' \frac{t^2}{2} + \ldots$$

und für eine virtuelle Bewegung

$$\xi_i = x_i^0 + a_i t + \xi_i'' \frac{t^2}{2} + \ldots$$

Bezeichnet man als Grösse des Zwanges den mit Hülfe der freien Bewegung jedes Punctes

$$(x_i) = x_i^0 + a_i t + \frac{X_i}{2 m_i} t^2 + \ldots$$

gebildeten Ausdruck

$$Z = \sum m_i \left[(x_i) - x_i\right]^2$$

so ist der Zwang für die virtuelle Bewegung

$$Z_1 = \sum m_i \left[(x_i) - \xi_i\right]^2.$$

Alsdann ist, ohne dass der Begriff der virtuellen Bewegung weiter eingeschränkt zu werden braucht, als dass die ersten und zweiten Differentialquotienten nach den x_i und t von k der Functionen $\psi_\sigma = 0$ beziehlich mit denen der Functionen $\varphi_s = 0$ für $t = 0$ übereinstimmen, die Differenz $Z - Z_1$ für eine hinreichend kleine Zeit stets negativ oder die Beschleunigung dritten Grades von Z ist für die wirkliche Bewegung stets kleiner als für jede virtuelle.

Sitzung vom 2. März 1901.

1. Herr C. v. Kupffer hält einen Vortrag: „Ueber einen bis jetzt unbekannten Gehirnnerven". Die Resultate werden anderweit veröffentlicht.

2. Herr J. Rückert berichtet über eine im Anatomischen Institut München von Herrn A. Hasselwander ausgeführte Untersuchung: „Ueber die Ossification des menschlichen Fussskelets".

3. Herr Ad. v. Baeyer spricht über „Aethyl Hydroperoxyd". Die Abhandlung wird an anderer Stelle zur Veröffentlichung gelangen.

Herr J. Rückert berichtet über eine im Anatomischen Institut München von Herrn A. Hasselwander[1] ausgeführte Untersuchung:

Ueber die Ossification des menschlichen Fussskelets.

(Eingelaufen 2. März.)

Das Untersuchungsmaterial bestand in den Füssen von 277 Föten, Kinderleichen und lebenden Kindern. Sämmtliche Objekte, gleichviel ob lebende oder todte, wurden zuerst mittelst der Röntgenphotographie untersucht. Daran schloss sich für den grösseren Theil des Materials, nämlich die Füsse von 188 Föten und Kinderleichen, die anatomische Untersuchung, die theils durch makroskopische und mikroskopische Präparation, theils durch einfache Aufhellung mittelst der von O. Schultze empfohlenen Kaliglycerinbehandlung vorgenommen wurde. Die Kombination des röntgographischen mit dem rein anatomischen Untersuchungsverfahren hat den grossen Vortheil, dass sie Mängel, welche jeder dieser beiden Methoden bei alleiniger Anwendung anhaften, beseitigt.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind folgende:

Calcaneus.

In mehr als der Hälfte der Fälle tritt bei $4^1/_2$—5-monatlichen Föten eine dünne periostale Knochenscheibe auf, die der

[1]) Herr Hasselwander wird später eine ausführliche mit Abbildungen versehene Darstellung seiner Untersuchungen an anderer Stelle publiciren.

besitzt, erscheint der Ossificationspunkt zuerst, dann folgen die Köpfchen-Epiphysen II, III, IV und V.

An allen denjenigen Knorpelepiphysen, die einen Knochenkern bekommen, tritt an der Grenze zwischen Epiphyse und Diaphyse besonders intensive Säulenknorpelbildung auf. Dieser histologische Befund harmoniert mit den schon von anderen Autoren durch Messung konstatierten lebhafteren Wachstum an den betreffenden Epiphysen.

Nach den bisherigen Angaben in der Litteratur kommt am Metatarsus nur in der Köpfchenepiphyse der grossen Zehe eine Pseudoepiphysenbildung vor, in Wirklichkeit finden wir aber diesen Vorgang, der eine Uebergangsstufe zwischen der typischen Epiphysenbildung und dem gänzlichen Ausfall derselben vorstellt, ab und zu auch an den Basalepiphysen der Metatarsen, jedoch in etwas schwächerem Masse als an der Köpfchenepiphyse des Hallux.

Phalanx I.

Diaphyse. Die Ossification beginnt durchschnittlich in der 14. Fötalwoche, was mit der kürzlich gemachten Angabe von Lambertz übereinstimmt. Die Schwankungsbreite erstreckt sich von der 12. zur 16. Woche.

Die von dem eben genannten Autor statuierte Reihenfolge, nach welcher die Ossification der Basalphalangen zuerst an der ersten Zehe auftreten und von da fibularwärts bis zur V. Zehe fortschreiten soll, wurde nicht immer gefunden.

Der Kern der (proximalen) Epiphyse tritt gewöhnlich im Verlauf des 3. Jahres auf und zwar zuerst an den mittleren Zehen, zuletzt an den randständigen, mit einer Schwankungsbreite von 1 Jahr 5 Monat bis 3 Jahren.

Phalanx II.

Dass der Diaphysenkern an der Mittelphalanx später auftritt, als an den übrigen Phalangen, ist eine bekannte Thatsache, aber die Grösse des Unterschiedes ist in der Litte-

ratur für alle Zehen, namentlich für die V., viel zu gering angegeben, und ferner sind die Differenzen, welche zwischen den einzelnen Zehen in dieser Richtung sich ergeben, ungenügend berücksichtigt.

Es zeigt sich in dieser Hinsicht folgendes:

An der II. Zehe erscheint die Ossification der Mittelphalanx gewöhnlich im 6. Monat des Fötallebens, ausnahmsweise schon im 4., an Zehe III im 7. Fötalmonat, hie und da schon im 5., während sie im 9. noch fehlen kann, an Zehe IV ebenfalls schon im 7. Fötalmonat, jedoch mit einer Schwankungsbreite vom 5. Fötal- bis 7. Lebensmonat.

Eine besondere Stellung nimmt die Mittelphalanx der V. Zehe ein, insoferne der zeitliche Eintritt von deren Ossification in evidenter Weise davon abhängig ist, ob die knorplige Anlage dieses Skeletstücks von dem Knorpel der Endphalange getrennt oder mit ihm verschmolzen ist. Ist das erstere der Fall, was in etwa 50% der daraufhin untersuchten Kinder und Föten gefunden wurde, so erscheint der Knochenkern in der Diaphyse der Mittelphalanx durchschnittlich im 10. Fötalmonat, ausnahmsweise wurde er schon im 7. Monat des intranterinen Lebens konstatiert, und im 7. Monat nach der Geburt noch vermisst.

In der anderen Hälfte der Fälle dagegen, in welcher die oben genannte, von Pfitzner zuerst beschriebene Knorpelverschmelzung vorlag, trat der Kern mit grossen zeitlichen Schwankungen bei den einzelnen Individuen auf und erheblich später als bei der ersteren Kategorie.

Unter 61 untersuchten Individuen vom 7. Fötalmonat bis zum Ende des 2. Jahres fand er sich nur bei 6 Individuen vor, darunter einmal schon im 9. Fötalmonat, während die übrigen 5 Fälle dem 1. und 2. Lebensjahr angehörten. Konstant vorhanden ist er erst vom Ende des 3. Lebensjahres an. Dieses verspätete und für die einzelnen Zehen sehr ungleichmässige Auftreten der Ossification in den Mittelphalangen weist auf eine im Gang befindliche Rückbildung dieses Skeletstücks hin,

die vom fibularen Fussrand aus gegen den tibialen zu fortschreitet. Am fertigen Fussskelet existiert, wie Pfitzner eingehend gezeigt hat, eine allgemeine Neigung der Mittelphalangen zur Verkürzung.

Was den feineren Vorgang bei der Ossification der Mittelphalangen anlangt, so kann man hier drei auf die einzelnen Zehen folgendermassen sich verteilende Typen unterscheiden:

1) an der II. Zehe und bei einem Teil der Füsse an der III. Zehe, ausnahmsweise an der IV. tritt der normale Typus der Röhrenknochenbildung auf.

2) An der III. Zehe in einem Teil der Fälle, an der IV. Zehe in den meisten Fällen erscheint zuerst ein periostales Knochenplättchen am dorsalen Umfang der Diaphyse, und geht von dieser Stelle aus die enchondrale Ossification zapfenartig in die Tiefe,

3) an der IV. Zehe in einigen Fällen, und stets an der V. Zehe ist nur ein enchondraler Knochenkern vorhanden, wie Pfitzner schon beschrieben hat. Auch in dem histologischen Verhalten des Ossificationsvorganges macht sich somit eine Abstufung von den tibialen zu den fibularen Zehen bemerkbar.

Die Epiphyse der Mittelphalanx fehlt wie Pfitzner gezeigt hat stets an der V. Zehe, nur in einem Fall fand sich eine Pseudoepiphyse, an der II.—IV. ist immer eine Epiphyse oder Pseudoepiphyse vorhanden. Sie treten auf zwischen $2^1/_2$ und 3 Jahren, verfrüht schon mit 2 Jahren, während sie ausnahmsweise mit 4 Jahren 9 Monaten noch fehlen.

Auch in Bezug auf den Untergang der echten Epiphysen existiert eine Stufenreihe, die vom tibialen zum fibularen Fussrand führt; an der II. Zehe ist die Entwicklung einer echten Epiphyse die Regel, an der III. Zehe ist bei einem kleineren Teil der Fälle die Epiphyse durch eine Pseudoepiphyse ersetzt, an der IV. Zehe ist dies meist der Fall und an der V. ist überhaupt von einer Epiphysenbildung nichts mehr erhalten, abgesehen von dem seltenen Fall einer Pseudoepiphysenbildung daselbst.

Phalanx III.

Die Diaphyse der Endphalanx an der I.—IV. Zehe erscheint zwischen der 9. und 11. Fötalwoche. Ein grösserer Unterschied zwischen diesen 4 Zehen in Bezug auf das zeitliche Auftreten des Kernes besteht nicht; doch kann man sagen, dass die fibularen im Allgemeinen etwas später ossificieren als die tibialen und dass speciell die erste Zehe den übrigen stets vorangeht, so dass ihre Endphalanx der zuerst verknöchernde Röhrenknochen des Fusses ist.

In der Endphalanx der V. Zehe wurde erst vom 4. Fötalmonat an ein Knochenkern gefunden, doch wurde er öfters noch an erheblich älteren Füssen vermisst und zwar dann immer an solchen, die eine Verschmelzung mit der Mittelphalange besassen. Es macht sich also an der kleinen Zehe auch für die Endphalanx eine gewisse Inconstanz bemerkbar, wenn auch in viel geringerem Grade als für die Mittelphalange. Auch in Bezug auf den histologischen Vorgang der Ossification zeigt die Endphalange Schwankungen.

Pfitzner hat angegeben, dass an derselben im Gegensatz zu den übrigen Zehen die Knochenbildung auf die periostale Ossification der Endkappe beschränkt sei. Dies kann aber höchstens für einen Teil der Füsse Geltung haben, an denen sich in der That nur die periostale Endkappe vorfand, an anderen, vielleicht der Mehrzahl der Füsse, schliesst sich an diese Ossification eine enchondrale wie bei Zehe I—IV an.

Unter den Epiphysen der Endphalanx nehmen die der I und V eine besondere Stellung ein; es sollen daher zuerst die Epiphysen der Zehen II—IV besprochen werden. Hier tritt der Kern durchschnittlich im fünften Jahr auf, also ein wenig später als an den übrigen Phalangen. Ausnahmsweise wurde er schon bei 3 Jahren 1 Monat gesehen und in einem vereinzelten Fall noch mit 7 Jahren 4 Monaten an einer Zehe vermisst.

Bei Zehe V besteht ein durchgehender Unterschied, je nachdem eine Verschmelzung der Endphalanx mit der Mittelphalanx existiert oder nicht. Im letzteren Fall tritt der Epi-

physenkern zur gleichen Zeit auf, wie an den Zehen II—IV, eher noch etwas früher. Im ersteren Fall dagegen fehlt der Epiphysenkern vollständig. Es steht dies in Widerspruch zu den Angaben Pfitzner's, nach welchen der Epiphysenkern der V. Zehe, ohne dass eine Unterscheidung zwischen beiden Fällen gemacht wird, stets erhalten bleiben und gross werden soll. Es zeigt sich also an Zehe V bei Verschmelzung der beiden Phalangen auch an der Epiphyse der Endphalange eine entschiedene Rückbildungserscheinung.

Die Epiphyse der Endphalange an Zehe I steht zu denen der übrigen Zehen durch eine auffallend frühzeitige Ossification in einem unvermittelten Gegensatz. Der Kern tritt gewöhnlich im 3. Lebensjahr auf, wiederholt wurde er bei Kindern des zweiten Jahres konstatiert. Bei einem polydactylen Kind von 3½ Monaten fand sich im Röntgenbild an beiden Füssen zwischen End- und Grundphalange der grossen Zehe ein kleiner Kern, der kaum anders denn als früh aufgetretener Epiphysenkern der Endphalange gedeutet werden konnte. Durch dieses frühe Auftreten der Epiphyse unterscheidet sich die Endphalange des Hallux nicht nur von den Endphalangen der übrigen Zehen, sondern von sämtlichen Röhrenknochen des Fusses.

In diesem Befund können diejenigen Forscher, welche am Daumen und der Grosszehe einen Ausfall der Mittelphalange annehmen, eine ontogenetische Unterlage für ihre Ansicht erblicken, indem sie sich vorstellen, dass die früh entstehende Epiphyse der Endphalanx einer Diaphyse der vermissten Mittelphalanx entspricht. Die Mittelphalanx des Hallux würde alsdann nicht verloren gegangen sein, sondern würde, nachdem sie sich mit der Endphalanx vereinigt — eine Vereinigung wie sie an den fibularen Zehen, besonders der V. (vgl. Pfitzner's Untersuchungen) jetzt noch im Gange ist — zur Bedeutung einer Epiphyse der Endphalange herabgesunken sein. Es erscheinen aber solche Schlussfolgerungen deshalb zum mindesten verfrüht, weil für die Vorfrage, ob überhaupt an Pollex und Hallux ein Glied verloren gegangen ist, die vergleichend anatomische Unterlage fehlt.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 80. Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

sowie des 142. Stiftungstages der Akademie

am 18. März 1901.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie, Geheimrath Dr. K. A. v. Zittel, mit folgender Ansprache:

Königliche Hoheiten!
Hochgeehrte Festversammlung!

Noch ist der Jubel, welcher gestern ganz Bayern durchbraust hat, nicht völlig verklungen; noch herrscht in allen Theilen der Wittelsbach'schen Lande eine gehobene Feststimmung, gilt es doch den 80. Geburtstag unseres ehrwürdigen und geliebten Regenten zu feiern.

Auch die Königl. bayer. Akademie der Wissenschaften, diese ureigenste Schöpfung der Wittelsbacher, wollte nicht zurückbleiben, wenn es sich darum handelte, ihrem erlauchten Protektor die Gefühle der Dankbarkeit und Ergebenheit zu Füssen zu legen. Eine Deputation, bestehend aus dem Präsidenten und den Classensekretären, welcher sich ein Vertreter der historischen Commission anschloss, haben Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten Luitpold ihre Glückwünsche dargebracht, die auch in huldvollster Weise entgegen genommen wurden.

Und in der That, wenn wir zurückblicken auf die Entwickelung unserer Akademie und der im General-Conservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen vereinigten Museen und Institute während der weisen und erleuchteten Regierung unseres jetzigen Protektors, so haben wir alle Ursache dankbar zu sein.

Getreu den ruhmreichen Ueberlieferungen seiner Königlichen Vorgänger hat auch Seine Königliche Hoheit Prinz Luitpold unserer Akademie in reichem Masse die Unterstützung und Förderung zu Theil werden lassen, ohne welche sie ihre wissenschaftlichen Aufgaben nicht hätte erfüllen können.

In den Jahren 1887—89 fand der Umbau des Wilhelminschen Gebäudes statt, durch welchen die Akademie diesen würdigen Festsaal, günstig gelegene und helle Sitzungszimmer und grössere Geschäftsräume erhielt. Eine durchgreifende Aenderung in der Vertheilung der Localitäten des Wilhelminum gestattete eine Neuaufstellung und bessere Anordnung der Museen, wodurch manche schwere Missstände beseitigt oder doch gemindert wurden. Gleichzeitig erhielten die naturhistorischen Sammlungen den modernen Anforderungen der Forschung und des Unterrichts entsprechende Lehr-Institute.

Diese Einrichtung bedeutet wohl die einschneidendste Umgestaltung, welche unsere wissenschaftlichen Staatssammlungen erfahren haben. Bis dahin war ihre Benützung eigentlich nur den Beamten der betreffenden Conservatorien und einzelnen begünstigten Specialisten gestattet; mit der Errichtung der Lehr-Institute aber wurden sie auch vorgeschritteneren Studierenden zugänglich und welchen Aufschwung die naturhistorischen Disciplinen in München seitdem genommen haben, geht aus der stattlichen Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten hervor, welche in den neuen Instituten alljährlich ausgeführt werden.

Mit warmem Interesse hat unser hoher Protektor das Gedeihen der Akademie und der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates verfolgt und so oft sich Gelegenheit bot, dasselbe durch allerhöchstes Eingreifen zu fördern, durften wir auf das huldvollste Wohlwollen rechnen. Auch den mancherlei Stiftungen und Zuwendungen, durch welche die Akademie in den

letzten Jahren finanziell gekräftigt und zu grösseren wissenschaftlichen Unternehmungen befähigt wurde, hat Seine Königliche Hoheit stets die lebhafteste Anerkennung gezollt.

Unbehelligt von äusseren Angriffen und inneren Dissidien war es der Akademie vergönnt unter der schirmenden Hand ihres allerhöchsten Protektors ihre Thätigkeit auszuüben. Sind auch keine besonderen Ereignisse in den letzten zwei Jahrzehnten zu verzeichnen, so war doch der Fortschritt in ihrer ganzen Entwickelung ein durchaus befriedigender. Entsprechend ihrer Bestimmung ist sie eine Freistätte der Forschung geblieben und wie unter ihrem erlauchten Stifter und den bisherigen Königen von Bayern, so erfreut sie sich auch heute der unumschränkten geistigen Freiheit. Und dies ist die werthvollste Gabe, welche wir unserem gütigen Schirmherrn verdanken, denn nur da, wo dem Suchen nach Wahrheit keine Hindernisse im Wege stehen, kann ächte Wissenschaft gedeihen. Möge sich unsere Akademie noch lange des Schutzes und der Huld Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold erfreuen!

Um die festliche Stimmung der heutigen Freudenfeier nicht zu stören, sollen die Nekrologe unserer verstorbenen Mitglieder, sowie die Erinnerungsrede auf unseren unvergesslichen früheren Präsidenten Geh. Rath von Pettenkofer auf die nächste Festsitzung im Herbst verschoben werden.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 4. Mai 1901.

1. Herr W. Dyck legt zwei Abhandlungen des correspondirenden Mitgliedes der Classe, Rektor Dr. Georg Recknagel in Augsburg, vor

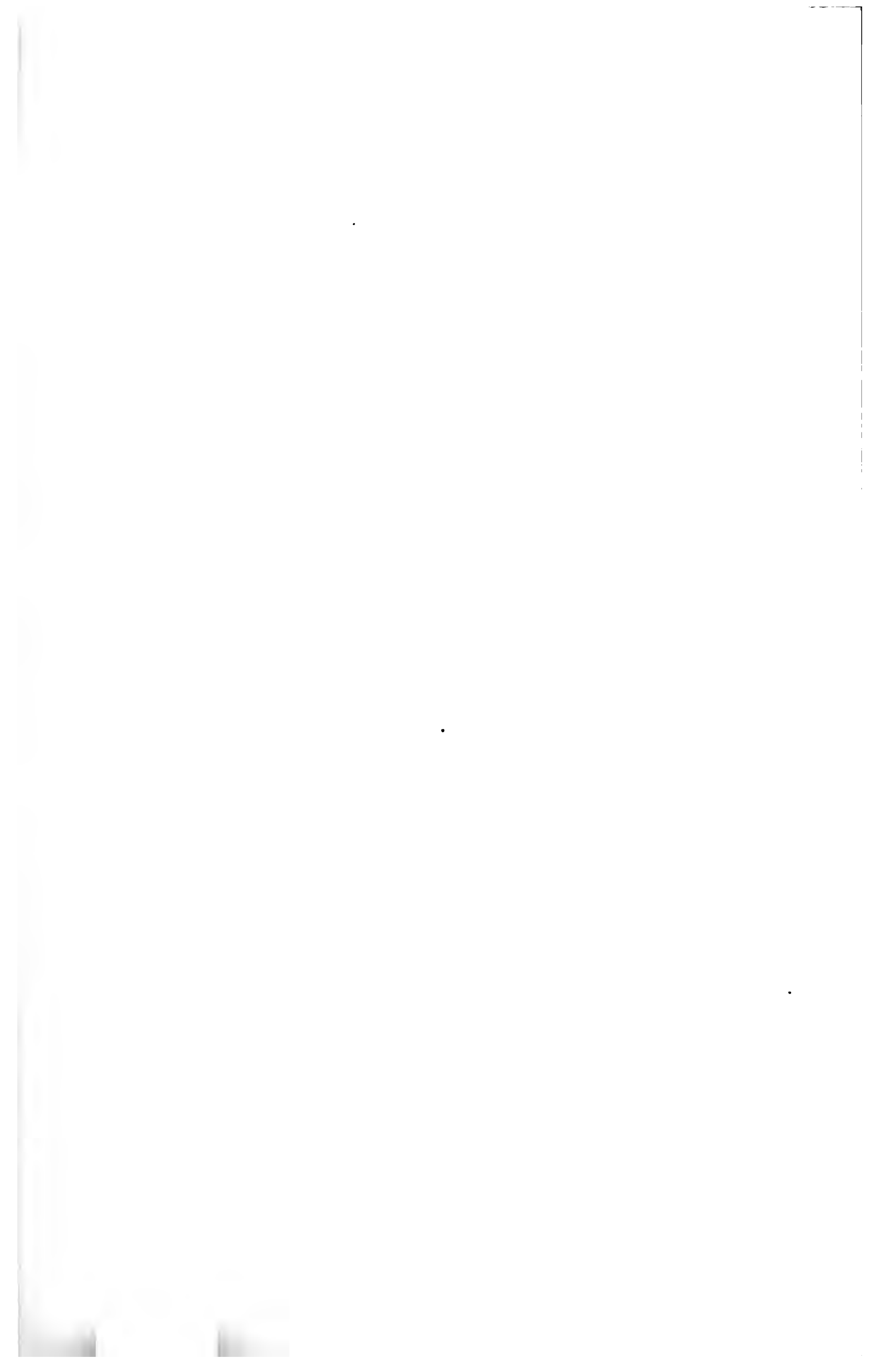
   a) über Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung,

   b) über Erwärmung geschlossener Lufträume.

2. Herr H. Seeliger überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. M. Wolf, Direktor der Sternwarte in Heidelberg: „Die Entdeckung und Catalogisirung von kleinen Nebelflecken durch die Photographie.“

3. Herr Aug. Rothpletz hält einen Vortrag „Ueber die Jodquellen in Tölz.“

4. Herr F. Lindemann legt eine Arbeit des auswärtigen Mitgliedes der Classe, Prof. Dr. Aurel Voss in Würzburg vor: „Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik, I. Ueber die energetische Begründung der Mechanik.“



Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung.

Von G. Recknagel.

(Eingelaufen 20. März.)

1. Voraussetzungen. Ein mit Luft von konstanter Masse (L) und überall gleich hoher Temperatur (J) erfüllter Raum ist durch seine Begrenzung von der übrigen Luft vollkommen abgeschlossen. Er kehrt der äusseren freien Luft, deren Temperatur (A) konstant angenommen wird, nur eine homogene Wand (Mauer) von gegebener Fläche (F) und gleichmässiger Dicke (δ) zu. Die ganze übrige Begrenzung wird als wärmedicht angenommen, d. h. sie gibt weder Wärme an die Luft des Raumes ab, noch nimmt sie solche von ihr auf.

Denkt man sich die Mauer, auf deren beiden Grenzflächen die Abscissenaxe senkrecht stehen soll, durch Schnitte, die den Grenzflächen parallel geführt sind, in Schichten von der Dicke dx geteilt, so wird angenommen, dass jede einzelne Schicht von Anfang an durchaus die gleiche Temperatur hat, und dass die Temperaturen der Schichten von innen nach aussen stetig abnehmen. Bezeichnet man die Anfangstemperaturen 1) der inneren Luft mit J_0, 2) der Innenwand mit $\mathfrak{T}_{i0}$, 3) der Aussenwand mit $\mathfrak{T}_{a0}$, 4) der Aussenluft mit A und 5) der Mauerschicht, die sich in der Entfernung x von der Innenwand befindet, mit U_0, so wird demnach vorausgesetzt

$$J_0 > \mathfrak{T}_{i0} > U_0 > \mathfrak{T}_{a0} > A.$$

Ferner $U_0 = f(x)$ und $\frac{d\,U_0}{d\,x}$ durchaus negativ.

Es soll untersucht werden, wie sich von diesem „Anfangszustande" aus im Laufe der Zeit (Z) die Temperaturen J der Innenluft, $\mathfrak{T}_i$ der Innenwand, U der Mauerschicht im Abstande x, $\mathfrak{T}_a$ der Aussenwand verändern, und wieviel Wärme in gegebener Zeit an die Aussenluft verloren geht. Die genannten vier Temperaturen sind somit als Funktionen der Zeit zu denken, und diese Funktionen sollen ermittelt werden.[1])

2. Die Grundlage der folgenden Rechnung gibt der Satz: die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit aus der Schicht (x, U) in die Schicht ($x + dx$, $U - dU$) übergeht, ist dem Temperaturgefälle

$$-\frac{dU}{dx}$$

proportional.

Die Wärmemenge, die man dem Temperaturgefälle als Faktor beizugeben hat, um die in der Zeiteinheit übergehenden Kalorien zu erhalten, hängt von der Grösse der gewählten Zeiteinheit, von der Grösse der Wandfläche und vom Material der Mauer ab. Nimmt man als Zeiteinheit die Stunde, als Wandfläche ein Quadratmeter, so heisst der dem Temperaturgefälle beizugebende Faktor λ das innere Leitungsvermögen des betreffenden Materials.

Demnach ist die bei dem Gefälle $\left(-\frac{dU}{dx}\right)$ in der Stunde

---

[1]) Es werden dabei die Hilfsmittel benützt, welche Fourier in der Theorie analytique de la Chaleur gibt. Doch darf bemerkt werden, dass Fourier den Fall einer veriablen Lufttemperatur überhaupt nicht behandelt hat, und dass das von ihm Gebotene für diesen Fall nicht ausreicht. Von späteren Arbeiten in dieser Richtung ist mir durch Byerly, An Elem. treatise on Fourier's Series etc. S. 123 bekannt, dass E. W. Hobson das Problem behandelt hat: die Wärmebewegung in einem unendlich langen festen Körper von der Anfangstemperatur Null zu ermitteln, wenn eine ebene Grenzfläche derselben an Luft grenzt, deren Temperatur eine gegebene Funktion der Zeit ist. Der von Byerly gegebenen Probe nach zu urteilen, erfolgt die Behandlung durch das ebenfalls von Fourier eingeführte $\int e^{-z^2} dz$, dessen Grenzen den Bedingungen des Problems angepasst werden.

durch 1 Quadratmeter des Querschnittes (x, U) einer Mauer vom inneren Leitungsvermögen λ gehende Wärmemenge

$$-\lambda \frac{dU}{dx} \text{ Kalorien.}^{1)}$$

3. Indem man von der Wärmemenge, welche in der Zeit dz in die Schicht (x, U) von der Dicke dx eintritt, die gleichzeitig austretende Wärmemenge subtrahiert, bleibt die zur Temperaturerhöhung $\frac{dU}{dz}\,dz$ der Schicht verwendete Wärme übrig, für welche man mittelst eben dieser Temperaturerhöhung noch einen zweiten Ausdruck gewinnt. Durch Vergleichung beider erhält man die Differenzialgleichung

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\lambda}{s\,w}\,\frac{d^2 U}{dx^2}, \qquad \text{(I)}$$

in welcher S das Gewicht eines Kubikmeters Mauer, w die Wärmekapazität des Materials bezeichnet.[2] Statt $\frac{\lambda}{s\,w}$ wird künftig $\varkappa$ geschrieben.

4. Dieser Differenzialgleichung genügt die Funktion

$$U = A + (a \cos m x + b \sin m x)\, e^{-\varkappa m^2 z}. \qquad \text{(II)}$$

Dieselbe enthält die drei Konstanten m, a, b, mittelst deren man den Eigentümlichkeiten des Problems gerecht werden kann, und überdies die Annahme, dass sich mit unendlich wachsender Zeit die Temperatur der Mauer überall der konstanten Temperatur der äusseren Luft nähert.[3]

5. Einführung der Eigentümlichkeiten des Problems. Die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit von der Aussenwand (F) der Mauer abgeht, nämlich

$$F(\mathfrak{T}_a - A)\, h_2$$

---

[1] **Fourier**, Chap. I Nr, 72 und an anderen Orten.
[2] **Fourier**, Chap. II Nr. 142.
[3] **Fourier**, Chap. IV Nr. 239 und ff.

(wobei h_2 den äusseren Leitungskoeffizienten der Aussenwand bezeichnet), ist der Wärmemenge gleich, welche in derselben Zeit durch die äusserste Schicht der Mauer geht, nämlich

$$-F\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta,$$

wobei durch den Index δ angedeutet werden soll, dass in $\frac{dU}{dx}$ der Grenzwert δ an die Stelle von x gesetzt werden soll.[1])

Die Gleichung

$$(\mathfrak{T}_a - A)\,h_2 = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta \qquad \text{(III)}$$

geht durch Substitution aus II ($U = \mathfrak{T}_a$ für $x = \delta$) über in

$$h_2\,(a \cos m\,\delta + b \sin m\,\delta) = \lambda\,m\,(a \sin m\,\delta - b \cos m\,\delta). \qquad \text{(IV)}$$

Man erhält so die erste Beziehung zwischen den eingeführten Konstanten a, b, m, den Leitungsvermögen λ, h_2 und der Mauerstärke δ.

Dividiert man durch $\lambda\,a \cos m\,\delta$, schreibt p_2 für $\frac{h_2}{\lambda}$, β für $\frac{b}{a}$ und löst nach tang $m\,\delta$ auf, so erhält man

$$\operatorname{tang} m\,\delta = \frac{p_2 + \beta\,m}{m - \beta\,p_2} \qquad \text{(IV a)}$$

Denkt man sich β bestimmt, so ergeben sich hieraus unendlich viele Werte von m von der Form

$$m_n = [2\,(n-1) + \gamma_n]\,\frac{\pi}{2\,\delta},$$

worin nach und nach für n alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ zu setzen sind, während γ_n als ächter Bruch gedacht ist.

Es ist demnach eine Erweiterung der Gleichung II vorzunehmen, so dass rechts eine unendliche Reihe von Gliedern auftritt, die dem ersten konform gebildet sind.

---

[1]) Fourier, Chap. II Nr. 146—154.

$$U = A + (a_1 \cos m_1 x + b_1 \sin m_1 x) e^{-\varkappa m_1^2 z}$$
$$+ (a_2 \cos m_2 x + b_2 \sin m_2 x) e^{-\varkappa m_2^2 z}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x) e^{-\varkappa m_n^2 z}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II a)}$$

Zur Abkürzung soll im Folgenden e_1 für $e^{-\varkappa m_1^2 z}$, e_2 für $e^{-\varkappa m_2^2 z}$, e_n für $e^{-\varkappa m_n^2 z}$ geschrieben werden.

6. Fortsetzung. Wie für die Aussenwand so gilt analog auch für die Innenwand die Gleichung

$$(J - \mathfrak{T}_i) h_1 = - \lambda \left| \frac{dU}{dx} \right|_0 \qquad \text{(V)}$$

welche aussagt, dass die in der Zeiteinheit vom Quadratmeter aufgenommene Wärme $(J - \mathfrak{T}_i) h_1$, derjenigen gleich ist, die gleichzeitig durch die innerste Mauerschicht, ihrem Temperaturgefälle und ihrer Leitungsfähigkeit gemäss, in die Mauer eindringt.

Setzt man in Gl. (II a) $x = 0$, so geht U in $\mathfrak{T}_i$ über, und es wird

$$\mathfrak{T}_i - A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n e_n).$$

Ferner ist

$$\left| \frac{dU}{dx} \right|_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n m_n e_n).$$

Durch Substitution dieser Werte in Gl. V erhält man einen Ausdruck für die Temperatur J der Innenluft, nämlich $\left(\frac{h_1}{\lambda} = p, \text{ gesetzt}\right)$

$$J = A + (a_1 - \frac{1}{p_1} b_1 m_1) e_1 + (a_2 - \frac{1}{p_1} b_2 m_2) e_2 + \ldots.$$

oder

$$J = A + \sum [(a_n - \frac{1}{p_1} b_n m_n) e_n] \qquad \text{(V a)}$$

Ein zweiter Ausdruck für die Temperatur J wird auf folgende Weise gefunden.

Bezeichnet man mit $(-dJ)$ die Aenderung, welche die Temperatur J in der Zeit dz dadurch erfährt, dass der Luft die Wärmemenge

$$-\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_0 F\,dz$$

entzogen wird, mit L die (konstant angenommene) Masse der eingeschlossenen Luft, mit c ihre Wärmekapazität, so ist

$$-dJLc = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_0 F\,dz,$$

was sich, da $\left|\frac{dU}{dx}\right|_0$ eine Funktion der Zeit Z allein ist, sofort integrieren lässt.

Da für $Z = 0$, $J = J_0$, erhält man

$$(J_0 - J)\,L\,c = \frac{\lambda F}{\varkappa} \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n}(e_n - 1)\right].$$

Erinnert man sich an den Wert von $\varkappa = \frac{\lambda}{s\,w}$, dividiert beiderseits durch $F s w$ und setzt den im allgemeinen kleinen Bruch $\frac{L c}{F s w} = \varrho$, so erhält man die Form

$$(J_0 - J)\,\varrho = \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n}(e_n - 1)\right] \tag{VI}$$

Nach Gl. (Va) geht J für $Z = \infty$ oder $e_n = 0$ in A über. Somit gilt auch

$$(J_0 - A)\,\varrho = -\Sigma \left(\frac{b_n}{m_n}\right) \tag{6}$$

Zieht man Gl. VI von Gl. (6) ab, so bleibt

$$J = A - \frac{1}{\varrho} \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n} e_n\right]. \tag{VI a}$$

Da nun die beiden Ausdrücke für die Temperatur J, welche die Innenluft zur Zeit Z hat, identisch sein müssen, so

folgt aus (Va) und (VIa) die Gleichheit der Koeffizienten beider Reihen:

$$a_n - \frac{1}{p_1} b_n m_n = - \frac{b_n}{\varrho m_n}$$

und somit eine zweite Beziehung zwischen den eingeführten Konstanten a, b, m, welche alsbald in der Form $\left(\frac{b_n}{a_n} = \beta_n\right)$

$$\beta_n = - p_1 \frac{\varrho m_n}{p_1 - \varrho m_n^2} \tag{VII}$$

Verwendung finden wird.

7. Berechnung der m. Indem man aus (VII) in (VIa) substituiert, erhält man

$$m \operatorname{tang} m \delta = p_2 - \frac{\varrho (m^2 + p_2^2)}{1 - \varrho \left(\frac{m^2}{p_1} - p_2\right)},$$

wo m die einzige Unbekannte ist.

Da

$$m = (2(n-1) + \gamma) \frac{\pi}{2 \delta},$$

so wird allgemein

$$\operatorname{tang} m \delta = \operatorname{tang} \left(\gamma \frac{\pi}{2}\right).$$

Da δ bekannt und n die gewählte Ordnungszahl der m ist, so ist auch im Werte von m der Bruch γ die Unbekannte, und z. B. für $\delta = \frac{1}{4}$ Meter das dritte m von der Form

$$m_3 = (4 + \gamma_3) 2 \pi.$$

Diese Einführung des γ bietet den Vorteil, dass bei Versuchen mit nahe liegenden Werten von γ die rechte Seite nur geringen Aenderungen unterliegt, während die linke Seite sehr empfindlich reagiert.

8. Berechnung der a. In der Reihe

$$U - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

können nun die m und β aus den Konstanten des Problems (h_1, h_2, λ, δ, ϱ) berechnet werden. Es erübrigt noch, die Koeffizienten a zu bestimmen, was dadurch geschieht, dass man den „Anfangszustand", d. h. die Funktion von x, durch welche der Ueberschuss der Anfangstemperatur U_0 der Mauer über A gegeben ist, durch die Reihe

$$U_0 - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)] \qquad \text{(VIII)}$$

darstellt. Hiefür stehen noch die Koeffizienten a zur Verfügung.[1])

---

[1]) Fourier hat für solche Darstellungen eine Methode angegeben, die ich am ausführlichsten Chap. VI Nr. 315 und 316 beschrieben finde, wo sie verwendet wird, um den Anfangszustand eines unendlich langen Cylinders darzustellen. Auf den vorliegenden Fall übertragen, würde die Vorschrift etwa so lauten: Es sei $U_0 - A = f(x)$ und $\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x$ mit u_n bezeichnet, so soll durch geeignete Bestimmung der a werden

$$f(x) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots . a_n u_n + \ldots$$

„Um den ersten Koeffizienten (a_1) zu bestimmen, multipliziere man jedes Glied der Gleichung mit $\sigma_1 d x$, wobei σ_1 eine Funktion von x ist, und integriere dann von $x = 0$ bis $x = \delta$. Die Funktion σ_1 ist so zu bestimmen, dass nach Ausführung der Integrationen die rechte Seite der Gleichung sich auf das erste Glied reduziert, d. h. dass alle übrigen Integrale Null werden. Um den zweiten Koeffizienten a_2 zu bestimmen, multipliziert man mit $\sigma_2 d x$ etc." ..... „Es handelt sich jetzt darum, die Funktionen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ zu finden." Fourier gibt hiefür in Nr. 316 eine Anleitung, die sich zwar auf das spezielle Problem des Cylinders bezieht, aber leicht auf andere Fälle übertragen werden kann.

Ein übersichtliches Beispiel hiezu findet man Chap. V Nr. 291, wo der Anfangszustand $F(x)$ einer Kugel durch die Reihe

$$F(x) = \frac{1}{x} (a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x \ldots)$$

dargestellt werden soll, und die n ebenso wie meine m die Wurzeln einer transscendenten Gleichung $\left[\frac{n X}{\operatorname{tang} n X} = 1 - h X\right]$ sind, die ähnlich wie Gl. (IVa) durch Vergleichung der von der Oberfläche abgehenden mit der aus der äussersten Kugelschicht heraus dringenden Wärme gefunden ist. (X ist der Kugelradius.) Fourier multipliziert, um a_1 zu bestimmen, mit $x \sin n_1 x$, integriert zwischen den Grenzen 0 und X, und kann mit-

Um den Koeffizienten a_r zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten der Gl. VIII mit

$$(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)\, d\, x$$

und integriert zwischen den Grenzen 0 und δ.

Links erhält man eine Funktion von $m_r, \delta \ldots$, die mit $\varphi(m_r)$ bezeichnet werden soll:

$$\varphi(m_r) = \int_0^\delta (U_0 - A)(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)\, d\, x.$$

Rechts erhält man eine unendliche Reihe, deren allgemeines (n^{tes}) Glied:

$$t_n = a_n \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d\, x$$

untersucht werden soll.

Das unbestimmte Integral bringt man leicht auf die Form:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{m_r^2 - m_n^2} \Big\{ & m_r \sin m_r x \cos m_n x - m_n \cos m_r x \sin m_n x \\ & - \beta_r (m_r \cos m_r x \cos m_n x + m_n \sin m_r x \sin m_n x) \\ & + \beta_n (m_r \sin m_r x \sin m_n x + m_n \cos m_r x \cos m_n x) \\ & - \beta_r \beta_n (m_r \cos m_r x \sin m_n x - m_n \sin m_r x \cos m_n x) \Big\}\end{aligned}$$

---

telst der transscendenten Gleichung nachweisen, dass rechts alle Integrale verschwinden bis auf das erste.

In ganz analoger Weise führt die Methode Fouriers zum Ziel, wenn man sich im vorliegenden Probleme auf die Annäherung beschränkt, die man unter Ausserachtlassung des Einflusses der Luft ($\beta = 0$) gewinnt.

Die Schwierigkeit der hier behandelten Aufgabe fand ich darin, dass für $u_1 = \cos m_1 x + \beta_1 \sin m_1 x$ eine Funktion, welche die Rolle des obigen σ_1 oder des beispielsweisen $x \sin n_1 x$ übernehmen konnte, nicht zu ermitteln war. Am günstigsten gestaltete sich die Rechnung für $\sigma_1 = u_1$. Zwar verschwanden die Integrale auf der rechten Seite nicht, sondern bildeten jedesmal eine unendliche Reihe bestimmter mit den Koeffizienten a multiplizierter Grössen. Die Lösung gelang aber dadurch, dass die Summe dieser Reihe angegeben werden konnte. Der Text gibt die detaillierten Nachweise.

daraus folgt:

$$t_n = \frac{a_n}{m_r^2 - m_n^2} \Big\{ m_r \sin m_r \delta \cos m_n \delta - m_n \cos m_r \delta \sin m_n \delta$$
$$- \beta_r (m_r \cos m_r \delta \cos m_n \delta + m_n \sin m_r \delta \sin m_n \delta)$$
$$+ \beta_n (m_r \sin m_r \delta \sin m_n \delta + m_n \cos m_r \delta \cos m_n \delta)$$
$$- \beta_r \beta_n (m_r \cos m_r \delta \sin m_n \delta - m_n \sin m_r \delta \cos m_n \delta) \Big\}$$
$$+ a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}.$$

Es lässt sich nachweisen, dass der Ausdruck in {} Null ist. Gemäss Gl. (IV) ist für jedes m und das zugehörige β

$$\frac{m(\sin m \delta - \beta \cos m \delta)}{\cos m \delta + \beta \sin m \delta} = \frac{h_2}{\lambda}.$$

Somit

$$\frac{m_r(\sin m_r \delta - \beta_r \cos m_r \delta)}{\cos m_r \delta + \beta_r \sin m_r \delta} = \frac{m_n(\sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)}{\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta}.$$

Führt man hier die Multiplikation mit dem Produkte der Nenner aus und ordnet nach den β, so erhält man das Behauptete: $\{\} = 0$.

Es verschwindet somit in jedem Gliede (t_n), in welchem m_n von m_r verschieden ist, der erste Summand, und erhält sich nur in dem einen Gliede t_r, in welchem wegen $n = r$ auch der Nenner $m_r^2 - m_n^2$ zu Null wird, in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, deren wirklicher Wert noch zu bestimmen ist und vorläufig durch $a_r Q$ bezeichnet werden soll.

Der zweite Summand von t_n:

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

wird von dem Nenner $m_r^2 - m_n^2$ frei, wenn man aus Gl. VII die Werte der β, nämlich

$$\beta_r = - \frac{\varrho p_1 m_r}{p_1 - \varrho m_r^2}, \quad \beta_n = - \frac{\varrho p_1 m_n}{p_1 - \varrho m_n^2}$$

einsetzt, und erhält die Form:

$$-\frac{a_n \varrho p_1^2}{(\varrho m_r^2 - p_1)(\varrho m_n^2 - p_1)}$$

$$= \frac{p_1}{p_1 - \varrho m_r^2} \cdot \left(-\frac{a_n p_1 \varrho}{p_1 - \varrho m_n^2}\right)$$

$$= \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \cdot \left(-\frac{a_n \beta_n}{m_n}\right) \text{ oder } \frac{\beta_r}{\varrho m_r}\left(-\frac{b_n}{m_n}\right).$$

Somit gilt die Gleichung

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{\varrho m_r}\left(-\frac{b_1}{m_1} - \frac{b_2}{m_2} - \ldots \frac{b_r}{m_r} \ldots - \frac{b_n}{m_n} \ldots\right)$$

oder

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(-\frac{b_n}{m_n}\right).$$

Nun ist aber nach Gl. (6)

$$(J_0 - A)\varrho$$

die Summe der Reihe $\sum\left(-\frac{b_n}{m_n}\right)$. Folglich wird

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{m_r}(J_0 - A). \tag{IX}$$

Es ist noch Q zu bestimmen.

In der Reihe $\frac{\beta_r}{\varrho m_r}\sum\left(-\frac{b_n}{m_n}\right)$ ist auch der zweite Summand des Gliedes t_r enthalten, nämlich

$$\frac{\beta_r}{\varrho m_r}\left(-\frac{b_r}{m_r}\right) = -\frac{a_r}{\varrho}\frac{\beta_r^2}{m_r^2},$$

so dass der volle Wert desselben ist

$$t_r = a_r Q - \frac{a_r}{\varrho}\left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2.$$

Andererseits ist (unter Benützung von Gl. IV)

$$t_r = a_r \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)^2 \, dx$$

$$= a_r \left[\delta \frac{1+\beta_r^2}{2} + \left(1 + \frac{\beta_r}{m_r} p_2\right) \cdot \frac{\sin m_r \delta}{2 m_r} \cdot \frac{\cos (m_r \delta - \varphi_r)}{\cos \varphi_r} \right] \quad \text{(X)}$$

wobei $\beta_r = \operatorname{tang} \varphi_r$ gesetzt ist.

Schreibt man zur Abkürzung für das mit a_r multiplizierte Integral das Zeichen B_r, so dass

$$t_r = a_r B_r,$$

so folgt nun Q aus

$$a_r B_r = a_r Q - \frac{a_r}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2$$

$$Q = B_r + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2.$$

Nach Substitution dieses Ausdruckes in IX wird der gesuchte Koeffizient

$$a_r = \frac{\varphi(m_r) - \frac{\beta_r}{m_r}(J_0 - A)}{B_r + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2}. \quad \text{(XI)}$$

---

9. Zusammenstellung der Resultate.

1) Für die Temperatur U, welche die im Abstande x von der Innenwand befindliche Schicht der Mauer zur Zeit Z besitzt, gilt

$$U - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, e^{-\varkappa m_n^2 Z}\right].$$

Zunächst sind die m nach dem in Nr. 7 angegebenen Verfahren zu berechnen, worauf die β aus Nr. 6, Gl. VII erhalten werden.

Schliesslich erhält man die a, wenn der Anfangszustand ($U_0 - A$) der Mauer und die anfängliche Temperatur (J_0) der eingeschlossenen Luft bekannt sind, aus Nr. 8 Gl. X

$$a_n = \frac{\varphi(m_n) - \frac{\beta_n}{m_n}(J_0 - A)}{B_n + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\beta_n}{m_n}\right)^2},$$

wobei

$$\varphi(m_n) = \int_0^\delta (U_0 - A)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d\, x$$

$$B_n = \int_0^\delta (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)^2\, d\, x.$$

2) Daran reihen sich als besondere Fälle: die Temperatur $\mathfrak{T}_a$ der Aussenwand ($x = \delta$):

$$\mathfrak{T}_a = A + \Sigma\left[a_n(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

und die Temperatur $\mathfrak{T}_i$ der Innenwand ($x = 0$):

$$\mathfrak{T}_i = A + \Sigma\left[a_n\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right].$$

3) Die Temperatur (J) der Innenluft ist nach Gl. VIa:

$$J = A - \frac{1}{\varrho}\Sigma\left[\frac{\beta_n}{m_n}\, a_n\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

4) Die in der Zeit Z an die äussere Luft abgegebene Wärme V (der Wärmeverlust) ist gegeben durch

$$V = \int_0^Z (\mathfrak{T}_a - A)\, h_2\, F\, d\, z.$$

Durch Ausführung der Integration wird

$$V = \frac{h_2 F}{\varkappa}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{a_n}{m_n^2}(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\right]$$

$$-\frac{h_2 F}{\varkappa}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{a_n}{m_n^2}(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right],$$

und es stellt der Minuend die ursprünglich in dem Objekte (Innenluft und Aussenmauer) über dem Temperaturniveau

A enthaltene Wärme dar, während der Subtrahend aussagt, wieviel von dieser Wärme zur Zeit Z noch vorhanden ist.

10. Anwendungen. Als Anfangszustand des Abkühlungsprozesses bietet das grösste Interesse der Dauerzustand, in welchem sich ein vollkommen durchgeheiztes Zimmer befindet.

Im Dauerzustande $\left(\frac{d^2 U}{d x^2} = 0\right)$ gelten die Beziehungen

$$h_1 (J_0 - \mathfrak{T}_{i0}) = \lambda \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} = h_2 (\mathfrak{T}_{a0} - A)$$

und, insofern er als Anfangszustand des Abkühlungsprozesses angenommen wird

$$U_0 = \mathfrak{T}_{i0} - \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} x$$

oder

$$U_0 - A = (\mathfrak{T}_{i0} - A) - \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} x.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{T}_{i0} - A = (J_0 - A) \frac{\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}},$$

$$\frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} = (J_0 - A) \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}.$$

Führt man die einfachere Bezeichnung ein

$$U_0 - A = C - D x,$$

so wird in Nr. 9. 1)

$$\varphi(m_n) = \int_0^\delta (C - D x)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d x.$$

$$= \frac{C}{m_n} (\beta_n + \sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)$$

$$- \frac{D}{m_n^2} [-1 + m_n \delta (\sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)$$

$$+ (\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)],$$

was mit Hilfe der Gl. IV auf

$$\frac{D + m_n \beta_n C}{m_n^2}$$

zurückgeführt werden kann.

11. Als Beispiel für numerische Rechnung sei ein Zimmer gewählt von 5 m Länge, 5 m Breite, 4 m Höhe, welches eine Wand von $5 \cdot 4 = 20$ qm Fläche und 0,25 m Dicke der freien Luft zukehrt. Die Wand ist von Backsteinmauerwerk, so dass $\lambda = 0{,}7$, $h_1 = 6$ und unter der Annahme von Windstille auch $h_2 = 6$ angenommen werden darf. Ferner ist $S = 1800$ kg, $w = 0{,}2$, also $\varkappa = \frac{7}{3600}$. $\varrho = \frac{c L}{F s w}$ wurde zu 0,004 angenommen.

Wenn man kleinere Werte als 1 (1 Stunde) für Z nicht heranziehen will, genügen 6 Glieder der Reihe in Nr. 9. 1), um die Temperaturen auf 0,1° Cels. genau zu berechnen. Die bezüglichen Koeffizienten sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	m	$\sphericalangle m\delta$	β	a
(1)	4,38	62° 9′	− 0,01751	0,63894 $(J_0 - A)$
(2)	14,45	180° + 27° 0′	− 0,06407	0,07651 "
(3)	25,82	360° + 9° 50′	− 0,1499	0,03235 "
(4)	37,04	540° − 9° 20′	− 0,4120	0,02395 "
(5)	45,48	720° − 68° 32′	− 5,213	+ 0,00407 "
(6)	53,24	720° + 42° 34′	+ 0,6636	− 0,01000 "

12. Nimmt man $J_0 = +20°$, $A = -20°$, so berechnen sich die Temperaturen, welche die Innenluft, die Innenwand, einzelne Mauerschichten und die Aussenwand nach Verlauf von 1, 2, 10 Stunden besitzen, wie folgt:

Abstand von der Innenwand	Ursprüngl. Temperatur	Temperatur nach 1 Stunde	Temperatur nach 2 Stunden	Temperatur nach 10 Stunden	
	(J_0)	(J_1)	(J_2)	(J_{10})	
Innenluft	+ 20	7,8	5,6	— 2,1	
x	U_0	U_1	U_2	U_{10}	
0	10,35	7,1	5,2	— 2,2	(Innenwand)
0,2 δ	6,2	5,4	4,1	— 2,7	
0,4 δ	2,1	1,9	0,9	— 4,0	
0,7 δ	— 4,1	— 4,1	— 4,2	— 7,4	
δ	— 10,35	— 10,35	— 10,5	— 12,2	(Aussenwand)

Es ist bemerkenswert, dass die Temperaturen der Innenluft und der Innenwand, die für die Bewohner von unmittelbarem Interesse sind, nach Abstellung der Heizung sehr rasch abnehmen, während die Temperatur der Aussenwand eine zähe Ausdauer zeigt. Sie sinkt in 10 Stunden um nicht ganz 2°, während die Zimmerluft um mehr als 22°, die Innenwand um $12^1/_2$° kälter wird.

Der auch nach Abstellung der Heizung in der früheren Richtung fortfliessende Wärmestrom verhält sich demnach wie ein Wasserlauf, der in seinem Oberlaufe durch eine Schleusse abgesperrt wird. Während hier alsbald Ebbe eintritt, erleidet die Stromstärke im Unterlaufe noch längere Zeit hindurch keine erhebliche Aenderung.

Damit in Zusammenhang steht das Rechnungsergebnis Nr. 9. 4), welches für den gesamten Wärmeverlust in 10 Stunden

10888 Kalorien

gibt, nicht viel weniger als die Wärmemenge von

11600 Kalorien,

welche man hätte aufwenden müssen, um den Dauerzustand in diesen 10 Stunden aufrecht zu halten.

Will man nach zehnstündiger Unterbrechung der Heizung das Zimmer zunächst wieder bewohnbar machen, und dann vollständig durchheizen, so hat man in der folgenden Heizperiode nicht nur die gleichzeitigen Wärmeverluste zu decken, die nicht viel geringer sind als die im Dauerzustand stattfindenden, sondern auch jene verlorenen 10888 Kalorien allmählich wieder zuzuführen. Welche Mittel und wieviel Zeit hiezu nötig sind, soll in der Folge dargelegt werden.

Ueber Erwärmung geschlossener Lufträume.

Von G. Recknagel.

(Eingelaufen 4. Mai.)

1. Es soll ermittelt werden, wie die Erwärmung eines geschlossenen mit Luft erfüllten Raumes vor sich geht, dem eine konstante Wärmequelle von bekannter Leistung Wärme zuführt, während eine homogene Wand von bestimmter Fläche (F), gegebener Dicke (δ) und bekanntem Material (s Gewicht des Kubikmeters, w Wärmekapazität des Kilogramms, λ innere Leitungsfähigkeit, h_1 äussere Leitungsfähigkeit der Innenseite, h_2 äussere Leitungsfähigkeit der Aussenseite) der äusseren Luft zugekehrt ist, deren Temperatur A durchaus konstant ist. An den übrigen Wandflächen wird Wärme weder aufgenommen noch abgegeben.

Ueber den Anfangszustand wird die Annahme gemacht, dass er durch irgend einen Abkühlungsprozess entstanden ist, durch welchen die Innenluft die Temperatur J_0, die Mauerschicht in der Entfernung x die Temperatur $U_0 = f_0(x)$ erhalten hat. Besondere Werte sind $f_0(0) = \mathfrak{T}_{i0}$, $f_0(\delta) = \mathfrak{T}_{a0}$.

Nach Verlauf von z Stunden sind diese Temperaturen J, $U = f(x, z)$, $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}_a$.

2. Von der Wärmezufuhr gewinnt man am leichtesten eine deutliche Vorstellung, wenn man an eine Luftheizung denkt, die durch eine Oeffnung vom Querschnitt q Luft von der Temperatur R^0 Celsius mit der Geschwindigkeit v zuführt. Man erhält dann stündlich 3600 $v\,q$ Kubikmeter Luft, vom Gewichte

$3600\, v\, q\, \frac{1{,}293}{1 + \alpha R} \cdot \frac{B}{760}$ Kilogramm, die bei jedem Grad, um den sie sich abkühlt, die Wärmemenge

$$3600 \cdot v\, q\, \frac{1{,}293}{1 + \alpha R} \cdot \frac{B}{760}\, c = Q\, c$$

abgibt, wenn c die Wärmekapazität bei konstantem Druck bezeichnet. In dem an die Zeit Z anschliessenden Zeitelemente $d\,z$ dringt die Luftmenge $Q\,d\,z$ ein, welche sich mit der Zimmerluft von der Masse L und der Temperatur J mischt und eine Erhöhung dieser Temperatur um $d\,J$ hervorbringt, während sie sich selbst von R auf $(J + d\,J)$ Grade abkühlt. Zugleich muss, damit diese Temperaturerhöhung eintritt, von der zugeführten Wärme der Verlust gedeckt werden, den die Innenluft durch Wärmeabgabe an die Innenwand erleidet, nämlich $(J - \mathfrak{T}_i)\, F\, h_1\, d\,z$. Man erhält demnach (von unendlich Kleinem zweiter Ordnung abgesehen) die Gleichung:

$$c\, Q\, d\,z\, (R - J) = c\, L\, d\,J + (J - \mathfrak{T}_i)\, F\, h_1\, d\,z. \tag{I}$$

Hier sind J und $\mathfrak{T}_i$ Funktionen der Zeit (Z). Die Masse L der Innenluft ist nicht völlig konstant. Denn da durch Abzüge und Poren fortgesetzt soviel Luft entweicht, als zum Ausgleich des innern Luftdruckes mit dem äusseren dient, so vermindert sich die Dichtigkeit der inneren Luft infolge der stetigen Temperatursteigerung in dem Maße, dass $L = \frac{L_0}{1 + \alpha J}$, wenn L_0 die bei 0° C. den Raum ausfüllende Luftmasse und α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft bezeichnet. Da durch Berücksichtigung dieser Dichtigkeitsänderung auch L als Funktion der Zeit und damit eine Komplikation in die Rechnung eingeführt würde, die zur erreichbaren Genauigkeit ausser Verhältnis stünde, wird L konstant angenommen.[1])

---

[1]) Die Ungenauigkeit, welche dadurch in die Rechnung kommt, dass man für L einen konstanten Mittelwert annimmt, z. B. den für 10° C. geltenden $\frac{L_0}{1{,}037}$ beträgt demnach bei Heizung von 0° auf 20° C.

3. Eine zweite Gleichung erhält man, wenn man das Schicksal der durch die Innenfläche in die Wand eindringenden Wärme weiter verfolgt. Sie kann teils zur Temperaturerhöhung der Mauerschichten verwendet werden und teils von der Aussenwand ins Freie entweichen.

$$(J - \mathfrak{T}_i) F h_1 \, dz = dz \int_0^\delta F s w \frac{dU}{dz} dx + (\mathfrak{T}_a - A) F h_2 \, dz. \quad \text{(II)}$$

Bedenkt man, dass (vgl. „Abkühlung" Nr. 5 und 6)

$$(J - \mathfrak{T}_i) h_1 = -\lambda \left| \frac{dU}{dx} \right|_0; \quad (\mathfrak{T}_a - A) h_2 = -\lambda \left| \frac{dU}{dx} \right|_\delta$$

und

$$\left| \frac{dU}{dx} \right|_\delta - \left| \frac{dU}{dx} \right|_0 = \int_0^\delta \frac{d^2 U}{dx^2} dx,$$

so erhält man aus II:

$$\lambda \int_0^\delta \frac{d^2 U}{dx^2} dx = \int_0^\delta s w \frac{dU}{dz} dx$$

woraus man die Beziehung zwischen der Temperatur U und den beiden unabhängigen Variabeln x und z ableiten kann:

$$\lambda \frac{d^2 U}{dx^2} = s w \frac{dU}{dz}. \quad \text{(III)}$$

4. Die weitere Entwicklung muss sich an den Grenzfall anschliessen, in welchem die variablen Temperaturen J und U die höchsten durch die gegebene Wärmequelle erreichbaren Werte angenommen haben und auf diesen konstant erhalten werden. Diese Grenzmaxima sollen durch den Index m kenntlich gemacht werden.

Da in diesem Falle dJ und $\frac{dU}{dz} dz$ Null sind, so folgt aus I

$$c Q (R - J_m) = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) F h_1 \quad \text{(I a)}$$

d. h. alle zugeführte Wärme dringt in die Wand ein.

---

weniger als 4 Prozent der Luftmasse und ist bei dem geringen Einfluss, den die Grösse dieser Masse überhaupt auf den Vorgang ausübt, ohne Bedeutung.

Aus II erhält man:

$$(J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1 = (\mathfrak{T}_{am} - A)\, h_2 \tag{IIa}$$

d. h. ebensoviel Wärme, als durch die Innenwand eindringt, wird an der Aussenwand abgegeben.

Für die Temperaturverteilung innerhalb der Mauer hat man aus (III)

$$\frac{d^2 U_m}{d x^2} = 0$$

woraus

$$U_m = C_m - D_m x. \tag{IV}$$

Dabei ist $C_m = \mathfrak{T}_{im}$ die Maximaltemperatur der Innenwand, und aus $\mathfrak{T}_{am} = C_m - D_m \delta$ folgt:

$$D_m = \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}.$$

Aus IV folgt auch:

$$\frac{d U_m}{d x} = - D_m$$

und da

$$- \lambda \left| \frac{d U_m}{d x} \right|_0 = (J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1$$

und

$$\left| \frac{d U_m}{d x} \right|_0 = \frac{d U_m}{d x} = - D_m,$$

so ergibt sich

$$\lambda D_m = (J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1$$

oder

$$\lambda \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta} = (J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1. \tag{IIIa}$$

Es werden nun aus den Gleichungen Ia, IIa, IIIa die Zwischentemperaturen $\mathfrak{T}_{am}$ und $\mathfrak{T}_{im}$ eliminiert. Aus

$$\mathfrak{T}_{am} - A \quad = \frac{h_1}{h_2} (J_m - \mathfrak{T}_{im})$$

$$\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am} = \frac{h_1 \delta}{\lambda} (J_m - \mathfrak{T}_{im})$$

erhält man

$$\mathfrak{T}_{im} - A = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda} \right)$$

oder

$$\mathfrak{T}_{im} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda} \right) = J_m \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda} \right) + A.$$

Führt man hier den **Transmissionskoeffizienten** p ein mit der Definition:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{\delta}{\lambda},$$

so ergibt sich:

$$J_m - \mathfrak{T}_{im} = (J_m - A) \frac{p}{h_1}$$

oder

$$\mathfrak{T}_{im} - A = (J_m - A) \left(1 - \frac{p}{h_1} \right)$$

und

$$\mathfrak{T}_{am} - A = (J_m - A) \frac{p}{h_2}.$$

Durch Substitution in Ia erhält man zunächst

$$c\, Q\, (R - J_m) = (J_m - A)\, p\, F, \tag{I b}$$

woraus sich eine der drei Grössen Q, R, J_m berechnen lässt.

Für den grössten erreichbaren Ueberschuss der Lufttemperatur J_m über die Temperatur A der Aussenluft ergibt sich daraus

$$J_m - A = (R - A) \frac{c\, Q}{c\, Q + p\, F},$$

was mit der von Fourier (Chap. I Sect. VI) gegebenen Formel im wesentlichen übereinstimmt. Ferner erhält man:

$$D_m = (J_m - A) \frac{p}{\lambda}$$

$$C_m = A + (J_m - A) \left(1 - \frac{p}{h_1} \right).$$

5. Es soll nun die Temperatur U aufgefasst werden als Differenz zwischen der Maximaltemperatur

$$U_m = C_m - D_m x$$

und einer niedrigeren Temperatur U', welche angibt, wieweit die an der Stelle x bestehende Temperatur U zur Zeit Z noch von der Maximaltemperatur entfernt ist:

$$U = C_m - D_m x - U'.$$

Bewirkt man nun durch geeignete Wahl der Funktion U', dass

$$\frac{d\,U'}{d\,z} = \varkappa \frac{d^2\,U'}{d\,x^2},$$

so ist auch Gleichung III erfüllt, d. h.

$$\frac{d\,U}{d\,z} = \varkappa \frac{d^2\,U}{d\,x^2} \left(\text{wenn } \varkappa = \frac{\lambda}{s\,w}\right).$$

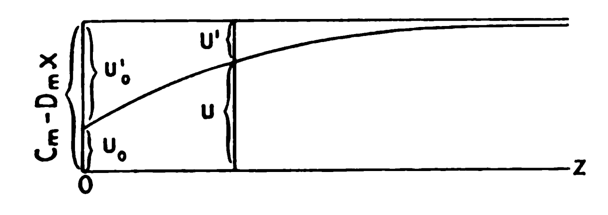
Da nun U' eine mit fortschreitender Zeit abnehmende Funktion von z ist, so hindert nichts

$$U' = (a \cos m\,x + b \sin m\,x)\, e^{-\varkappa m^2 Z}$$

zu setzen. Denn die damit eingeführte Annahme, dass die Maximalwerte erst in unendlich langer Zeit vollständig erreicht werden, ist durchaus sachgemäss.

Stellt man den Gang der Temperatur U an der Stelle x als Funktion der Zeit Z dar, so erhält man eine Kurve, wie Fig. 1, in welcher die Parallele $U_m = C_m - D_m x$ als Asymptote erscheint.

Fig. 1.



Da sich für m in U' unendlich viele Werte ergeben und sowohl a als b von m abhängig werden, erhält man für die Funktion U die unendliche Reihe:

$$U = C - D x - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[(a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VI)}$$

wobei nun an C und D zur Vereinfachung der Schreibweise der Index m weggelassen ist.

Ferner wird das Temperaturgefälle in der Wand im allgemeinen

$$-\frac{dU}{dx} = D - \sum \left[m_n (a_n \sin m_n x - b_n \cos m_n x)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VII)}$$

und die beiden besonderen Werte desselben

$$-\left|\frac{dU}{dx}\right|_0 = D + \sum (m_n b_n e^{-\varkappa m_n^2 z}) \quad \text{(VII a)}$$

$$-\left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta = D - \sum \left[m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VII b)}$$

Für die Temperaturen an den Grenzflächen erhält man

$$(x=0)\, \mathfrak{T}_i = C - \sum (a_n e^{-\varkappa m_n^2 z}) \quad \text{(VI a)}$$

$$(x=\delta)\, \mathfrak{T}_a = C - D\delta - \sum \left[(a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VI b)}$$

Im Anfangszustande, wenn das Heizen beginnt, ist

$$(z = 0)\; U_0 = C - D x - \sum (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)$$

$$(z = 0, x = 0)\; \mathfrak{T}_{i0} = C - \sum (a_n)$$

$$(z = 0, x = \delta)\; \mathfrak{T}_{a0} = C - D\delta - \sum (a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta).$$

U_0 muss mit dem Problem zugleich als Funktion von x gegeben sein, da nur auf Grund einer vollständigen Beschreibung des Anfangszustandes etwas bestimmtes über die Wirkung der Heizung ausgesagt werden kann.

6. Bestimmung der Konstanten m, a, b.

1) Substituiert man aus VIb und VIIb in

$$(\mathfrak{T}_a - A)\, h_2 = -\left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta \lambda,$$

so erhält man

$$(C - D\delta - A)\frac{h_2}{\lambda} - \frac{h_2}{\lambda}\sum[(a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 Z}]$$
$$= D - \sum[m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 Z}].$$

Da diese Gleichung für jedes Z gelten soll, müssen die Coeffizienten von $e^{-\varkappa m_n^2 Z}$ einander gleich sein.

Die Forderung $(C - D\delta - A)\frac{h_2}{\lambda} = D$ ist erfüllt, weil $C - D\delta = \mathfrak{T}_{am}$, $D = \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}$ und gemäss IIa und IIIa (in Nr. 4) $(\mathfrak{T}_{am} - A)\, h_2 = \lambda\,\frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}$ ist. Es bleibt somit noch zu erfüllen:

$$\frac{h_2}{\lambda}(a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta) = m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta) \qquad \text{(VIII)}$$

für jedes n. Lässt man zur Vereinfachung der Schreibweise den Index n weg, dividiert durch $a \cos m\delta$ und setzt β für $\frac{b}{a}$, so erhält man zunächst

$$\frac{h_2}{\lambda}(1 + \beta \operatorname{tg} m\delta) = m(\operatorname{tg} m\delta - \beta)$$

oder

$$\operatorname{tg} m\delta = \frac{p_2 + m\beta}{m - \beta p_2}, \qquad \text{(VIIIa)}$$

wobei p_2 für $\frac{h_2}{\lambda}$ geschrieben ist. Durch diese Gleichung sind die Koeffizienten m und β mit einander verbunden.

7. Fortsetzung. Substituiert man in die Gleichung

$$-\left|\frac{dU}{dx}\right|_0 \lambda = (J - \mathfrak{T}_i)\, h_1$$

die aus VIIa und VIa entnommenen Werte von $\left|\frac{dU}{dx}\right|_0$ und $\mathfrak{T}_i$, so erhält man

$$D\lambda + \lambda \sum[m\, b\, e^{-\varkappa m^2 Z}] = (J - C + \sum[a\, e^{-\varkappa m^2 Z}])\, h_1.$$

Hieraus ergibt sich ein Ausdruck für die Lufttemperatur J als Funktion der Zeit z

$$J = \frac{\lambda}{h_1} D + C + \sum \left[\left(\frac{\lambda}{h_1} m b - a \right) e^{-\varkappa m^2 z} \right],$$

in welchem (nach Nr. 4)

$$C + \frac{\lambda}{h_1} D = \mathfrak{T}_{im} + \frac{\lambda}{h_1} \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta} = J_m$$

die Maximaltemperatur der Luft ist. Man schreibt somit einfacher

$$J = J_m - \sum \left[\left(a - \frac{\lambda}{h_1} m b \right) e^{-\varkappa m^2 z} \right]. \qquad \text{(IX)}$$

Es wird nun ein zweiter Ausdruck für die Temperatur J hergestellt, indem man die Differentialgleichung I

$$c L \frac{dJ}{dz} = c Q (R - J) - F (J - \mathfrak{T}_i) h_1$$

nach Einsetzung der Werte von J (aus IX) und $\mathfrak{T}_i$ (aus VIa) integriert. Die Differentialgleichung wird zunächst:

$$c L \frac{dJ}{dz} = c Q R - c Q J_m + c Q \sum \left[\left(a - \frac{\lambda}{h_1} m b \right) e^{-\varkappa m^2 z} \right]$$

$$- F D \lambda - F \lambda \sum \left[m b e^{-\varkappa m^2 z} \right],$$

und es lässt sich nachweisen, dass das Aggregat der Constanten

$$c Q R - c Q J_m - F D \lambda = 0.$$

Denn nach Nr. 4, Ia und IIIa ist

$$c Q (R - J_m) = F (\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}) \frac{\lambda}{\delta} = F D \lambda.$$

Sodann gibt die Ausführung der Integration

$$c L J = - \frac{c Q}{\varkappa} \sum \left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{\lambda}{h_1} \frac{b}{m} \right) e^{-\varkappa m^2 z} \right]$$

$$+ F \frac{\lambda}{\varkappa} \sum \left[\frac{b}{m} e^{-\varkappa m^2 z} \right] + \text{Constante.}$$

Die Integrationskonstante lässt sich aus der Erwägung bestimmen, dass für $z = \infty$ das $J = J_m$ wird. Demnach erhält man:

$$\text{Constante} = c\, L\, J_m.$$

Dividiert man nun die Gleichung durch $c\, L$, den kalorischen Wasserwert der Luft, und erinnert sich, dass

$$\varkappa = \frac{\lambda}{w\, s},$$

wobei $w\, s$ den Wasserwert eines Kubikmeters vom Material der Wand vorstellt, so erhält man

$$J - J_m = -\frac{c\, Q}{\lambda}\left(\frac{w\, s}{c\, L}\right)\Sigma\left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{\lambda}{h_1}\frac{b}{m}\right)e^{-\varkappa m^2 z}\right]$$

$$+ F\left(\frac{w\, s}{c\, L}\right)\Sigma\left[\frac{b}{m}\, e^{-\varkappa m^2 z}\right].$$

Der Bruch $\frac{c\, L}{F\, w\, s}$ soll mit ϱ bezeichnet werden, ferner die Verhältnisse $\frac{c\, Q}{\lambda F}$ mit p_0, $\frac{h_1}{\lambda}$ mit p_1. Dann ist

$$J = J_m - \frac{p_0}{\varrho}\Sigma\left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{1}{p_1}\frac{b}{m}\right)e^{-\varkappa m^2 z}\right] + \frac{1}{\varrho}\Sigma\left[\frac{b}{m}e^{-\varkappa m^2 z}\right]. \quad \text{(X)}$$

Man kann nun zunächst die Anfangstemperatur der Luft einführen, indem man zugleich 0 für Z und J_0 für J setzt. Man erhält so:

$$J_m - J_0 = \Sigma\left(a - \frac{1}{p_1}\, m\, b\right) \quad \text{(IX a)}$$

und

$$J_m - J_0 = \frac{p_0}{\varrho}\,\Sigma\left(\frac{a}{m^2} - \frac{1}{p_1}\frac{b}{m}\right) - \frac{1}{\varrho}\,\Sigma\left(\frac{b}{m}\right),$$

oder

$$\varrho\,(J_m - J_0) = p_0\,\Sigma\left(\frac{a}{m^2}\right) - \left(\frac{p_0}{p_1} + 1\right)\Sigma\left(\frac{b}{m}\right). \quad \text{(X a)}$$

Ferner müssen die beiden für J erhaltenen Reihen identisch sein, wodurch folgendes zweite System von Gleichungen erhalten wird:

$$a - \frac{m\,b}{p_1} = \frac{p_0}{\varrho}\frac{a}{m^2} - \frac{p_0}{\varrho\, p_1}\frac{b}{m} - \frac{b}{m\,\varrho}$$

oder, wenn man mit $\frac{\varrho\, p_1\, m^2}{a}$ multipliziert und β für $\frac{b}{a}$ schreibt:

$$\varrho\, p_1\, m^2 - p_0 p_1 = \beta\,(m^2\,\varrho - p_0\, m - p_1\, m),$$

woraus sich ergibt:

$$\beta = \frac{p_1\,(p_0 - \varrho\, m^2)}{m\,(p_0 + p_1 - \varrho\, m^2)}. \tag{XI}$$

Wird dieser Ausdruck in VIIIa substituiert, der Nenner wegmultipliziert und nach steigenden Potenzen von m geordnet, so erhält man:

$$\operatorname{tg} m\,\delta = m\,\frac{p_0 p_1 + (p_0 + p_1)\,p_2 - \varrho\,(p_1 + p_2)\,m^2}{-p_0 p_1 p_2 + (p_0 + p_1 + \varrho\, p_1 p_2)\,m^2 - \varrho\, m^4}.$$

Für die Auflösung empfiehlt sich die Umformung:

$$m \operatorname{cotg} m\,\delta = -P + \frac{m^2\,[p_0 + p_1 - \varrho\, P\,(p_1 + p_2) + \varrho\, p_1 p_2] - \varrho\, m^4}{p_1 p_2 + p_0\,(p_1 + p_2) - \varrho\,(p_1 + p_2)\,m^2}$$

wobei mit P der reciproke Wert von

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{P}$$

bezeichnet ist. Dividiert man nochmals partiell mit dem Bekannten des Nenners in das erste Glied des Zählers, so erhält man:

$$P_1 = \frac{p_0 + p_1 - \varrho\, P\,(p_1 + p_2) + \varrho\, p_1 p_2}{p_1 p_2 + p_0\,(p_1 + p_2)}$$

als Koeffizienten von m^2, und demnach

$$m \operatorname{cotg} m\,\delta = -P + P_1\, m^2 + \frac{\varrho\,[P_1\,(p_1 + p_2) - 1]\,m^4}{p_1 p_2 + p_0\,(p_1 + p_2) - \varrho\,(p_1 + p_2 \cdot m^2}$$

und schliesslich

$$m \operatorname{cotg} m\,\delta = -P + P_1\, m^2 + \frac{\frac{\varrho\,[P_1\,(p_1 + p_2) - 1]}{p_1 p_2 + p_0\,(p_1 + p_2)}\cdot m^4}{1 - \frac{\varrho\,(p_1 + p_2)}{p_1 p_2 + p_0\,(p_1 + p_2)}\cdot m^2}.$$

8. Nachdem so gezeigt ist, wie sich die m und β bestimmen lassen, erübrigt noch die Bestimmung der Koeffizienten a.

Hiezu muss der Anfangszustand dienen, der einerseits durch die Gleichung

$$U_0 = C - Dx - \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)],$$

andererseits durch bestimmte Werte der inneren Lufttemperatur J_0, der Aussentemperatur A, und für die Wand durch eine Funktion von x gegeben ist, die mit $f_0(x) = U_0$ bezeichnet werden soll. Man hat demnach die Gleichung:

$$C - Dx - f_0(x) = \sum [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)], \quad \text{(XIII)}$$

in welcher die Faktoren $(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)$ bestimmt sind und für jedes x zwischen 0 und δ berechnet werden können.

Um irgend einen der Koeffizienten a_r zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem zu a_r gehörigen Faktor

$$\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x$$

und integriert beiderseits zwischen den Grenzen 0 und δ. Dadurch erhält man links eine Funktion von δ, m, β, C, D, die mit $\varphi(m_r)$ bezeichnet werden soll, so dass also

$$\varphi(m_r) = \int_0^\delta [C - Dx - f_0(x)] [\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x] \, dx. \quad \text{(XIV)}$$

Ist der zu a_r gehörige Wert von m_r bekannt, so lässt sich $\varphi(m_r)$ numerisch berechnen.

Auf der rechten Seite erhält man eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$t_n = a_n \int_0^\delta (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x) \cdot dx$$

und es ist bereits (Abkühlung Nr. 8) nachgewiesen, dass sich dieses Glied im allgemeinen d. h. so oft n von r verschieden ist, auf

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

reduziert d. h. auf den Wert, welchen das Integral an der untern Grenze ($x = 0$) annimmt, während es an der obern Grenze ($x = \delta$) vermöge der Gleichung (VIII) verschwindet.

Ist hingegen $n = r$ d. h. handelt es sich um

$$t_r = a_r \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)^2 \, d\, x,$$

so ergibt die Substitution $n = r$ in das allgemeine Glied sowohl an der obern als an der untern Grenze die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, und es muss somit der Wert von t_r besonders bestimmt werden. Man erhält leicht wie a. a. O. S. 90:

$$t_r = \left[\frac{\delta}{2}(1 + \beta_r^2) + \left(1 + \frac{\beta_r}{m_r} p_2\right) \frac{\sin m_r \delta}{2 m_r} \cdot \frac{\cos(m_r \delta - \varphi_r)}{\cos \varphi_r}\right] a_r = a_r B_r.$$

In diesem Ausdruck ist auch der Wert ζ_r enthalten, den das t_n für $n = r$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ an der u n t e r n Grenze besitzt. Folglich besteht die Gleichung:

$$\varphi(m_r) = t_r + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}\right) - \zeta_r, \qquad \text{(XV)}$$

wobei ζ_r noch zu bestimmen ist. Es geschieht dieses, indem man das allgemeine Glied der Reihe

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

durch Einführung der Werte von β von dem Nenner $(m_r^2 - m_n^2)$ befreit.

Da (nach XI)

$$\beta = p_1 \frac{p_0 - \varrho m^2}{m (p_0 + p_1 - \varrho m^2)}$$

folgt

$$\beta_r m_r - \beta_n m_n = p_1 \frac{p_1 \varrho (m_n^2 - m_r^2)}{(p_0 + p_1 - \varrho m_r^2)(p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}$$

und somit

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2} = -\frac{a_n p_1^2 \varrho}{(p_0 + p_1 - \varrho m_r^2)(p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}$$

$$= -\frac{p_1 \varrho}{p_0 + p_1 - \varrho m_r^2} \cdot \frac{a_n p_1}{p_0 + p_1 - \varrho m_n^2}$$

$$= -\frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2} \cdot \frac{\beta_n a_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2}.$$

Demnach ist das allgemeine Glied der Reihe das Produkt aus einer Constanten

$$-\frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2},$$

in welcher β_r und m_r zu dem Koeffizienten a_r gehören, der bestimmt werden soll, und einer von Glied zu Glied Veränderlichen:

$$\frac{a_n \beta_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2},$$

und ζ_r erhält (wegen $m_n = m_r$) den Wert:

$$\zeta_r = -\varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2}\right)^2.$$

Somit geht die Gleichung XV über in

$$\varphi(m_r) = a_r B_r + \varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2}\right)^2$$

$$- \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\beta_n a_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2}\right) \qquad \text{(XVa)}$$

und es ist noch übrig, die Summe der Reihe zu finden.

Hiezu ist die Gl. Xa verwendbar, nämlich:

$$p_0 \Sigma \left(\frac{a_n}{m_n^2}\right) = \varrho (J_m - J_0) + \left(\frac{p_0}{p_1} + 1\right) \Sigma \left(\frac{b_n}{m_n}\right),$$

wenn man $\Sigma \left(\frac{b_n}{\beta_n m_n^2}\right)$ in folgender Weise entwickelt:

$$\Sigma \left(\frac{a_n}{m_n^2}\right) = \Sigma \left(\frac{b_n}{\beta_n m_n^2}\right) = \frac{1}{p_1} \Sigma \left(\frac{b_n (p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)}\right)$$

$$= \frac{p_0 + p_1}{p_1} \Sigma \left(\frac{b_n}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)}\right) - \frac{\varrho}{p_1} \Sigma \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2}\right). \qquad \text{(VI)}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\varrho}{p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=\frac{p_0+p_1}{p_1}\sum\left(\frac{b_n}{m_n(p_0-\varrho m_n^2)}\right)-\sum\left(\frac{a_n}{m_n^2}\right)$$

und durch Substitution aus Gleichung (X a)

$$\frac{\varrho}{p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=\frac{p_0+p_1}{p_1}\sum\left(\frac{b_n}{m_n(p_0-\varrho m_n^2)}\right)$$
$$-\frac{p_0+p_1}{p_0 p_1}\sum\left(\frac{b_n}{m_n}\right)-\frac{\varrho}{p_0}(J_m-J_0).$$

Die beiden Summen auf der rechten Seite lassen sich zusammenziehen, da

$$\frac{b_n p_0}{m_n(p_0-\varrho m_n^2)}-\frac{b_n}{m_n}=\frac{\varrho\, b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}.$$

Somit erhält man

$$\frac{\varrho}{p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=\varrho\frac{p_0+p_1}{p_0 p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)-\frac{\varrho}{p_0}(J_m-J_0)$$

oder

$$\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=J_m-J_0.$$

Da $b_n=\beta_n a_n$, ist hiemit die gewünschte Summe in XV a als Differenz zweier Lufttemperaturen bestimmt.

Durch Substitution wird

$$\varphi(m_r)=a_r B_r+\varrho\, a_r\left(\frac{\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}\right)^2-\frac{\varrho\,\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}(J_m-J_0).\quad\text{(XV b)}$$

Daraus bestimmt sich endlich der gesuchte Koeffizient a_r

$$a_r=\frac{\varphi(m_r)+\dfrac{\varrho\,\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}(J_m-J_0)}{B_r+\varrho\left(\dfrac{\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}\right)^2}.$$

Die Entdeckung und Katalogisirung von kleineren Nebelflecken durch die Photographie.

Von M. Wolf.

(*Eingelaufen 28. März.*)

Bei der Anwendung der Doppelobjective von grossem Oeffnungsverhältnis auf die Himmelsphotographie zur Aufsuchung schwacher ausgedehnter Nebelmassen am Himmel und der vielen kleinen Planeten zu einer grösseren Anzahl Aufnahmen gelangt, war ich überrascht, wie ungemein zahlreich allenthalben am Himmel die planetarischen und kleinen Nebelflecken zu finden waren. Besonders das vorzügliche Voigtländer'sche Objektiv Nr. 21890 von 16 cm Oeffnung und 81 cm Brennweite, das also ein Oeffnungsverhältnis von 1 : 5 besass, gab manche Gegenden des Himmels als ganz besät mit solchen planetarischen Nebelflecken. Um gleich ein Extrem als Beispiel herauszugreifen, auf einer Platte (A 430 vom 24. März 1892) von 96 Minuten Belichtung fanden sich in einem Kreis, den ich mit einem Radius von 1 Grad um η Virginis als Mittelpunkt schlug, nicht weniger als 130 Nebelflecke.

Aehnliche Zahlen, wenn auch selbstverständlich nur selten so ungeheuer gross, ergaben sich an anderen Stellen des Himmels und es war damit gezeigt, dass die Dublet-Linsen uns den Himmel mit einer ungeheuer viel grösseren Zahl planetarischer und kleiner Nebelflecken erfüllt erscheinen liessen, als seither angenommen worden war.

Gleichzeitig war aus den ersten Versuchen ersichtlich, dass sich diese schwachen Nebel, von denen ja das Auge am

Fernrohr nur verschwindende und vorübergehend erhaschbare Eindrücke erhält, sich auf der Platte mit grosser Sicherheit einstellen und messen liessen. Andererseits war das Wesentliche Ihrer Gestalt unmittelbar zu erkennen und zu beschreiben.

Diese Erfahrungen brachten mich zu dem Entschluss, den „kleinen Nebelflecken“ des Himmels eine ganz besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Ich begann sofort mit Aufnahmen von durchschnittlich zwei Stunden Belichtungsdauer zuerst von jenen Gegenden des Himmels, wo bekanntermassen die kleinen Nebelflecken am reichsten und schönsten vertreten sein sollen. Im Laufe der nächsten Jahre wurden so die Gegenden von Virgo, Leo und Coma Berenices zum grössten Teil mehr als dreimal mit Platten bedeckt.

Es handelte sich dann naturgemäss darum die Positionen dieser ungezählten neuen Objekte zu bestimmen. Ich versuchte zuerst mit dem einfachen Bamberg'schen Schraubenmikroskop, mit dem ich die Positionen der kleinen Planeten zu vermessen pflegte, die Platten auszumessen und zwar, in derselben Weise wie dort, dadurch dass ich immer die Distanzen der Nebel von verschiedenen Anhaltsternen aus mass.

Dabei zeigte sich sehr bald, dass zwar die erreichbare Genauigkeit eine sehr grosse war, dass aber die Mühe der Vermessung auch nur eines kleinen Teiles einer Platte so ins Grosse besonders bezüglich der Rechenarbeit wuchs, dass ich gezwungen war, davon abzustehen.

Nach Allem, was ich erfahren hatte, musste sich für diesen Zweck, allerdings unter Aufopferung der grössten Genauigkeit, der von Professor Kapteyn in Groningen ersonnene parallaktische Messapparat ganz besonders eignen. Es musste das richtige Instrument sein, diese Nebelflecken zu katalogisiren.

Daher zögerte ich auch nicht, als sich mir die Gelegenheit darbot,[1]) mit bescheidenen Mitteln einen parallaktischen Messapparat zu beschaffen, diesen Apparat bei einem bekannten

---

[1]) Durch die Liberalität einiger begeisterter Verehrer der Wissenschaft, deren Namen an anderer Stelle genannt werden.

Mechaniker zu bestellen, und er wurde nach seiner Vollendung auf dem neuen Observatorium auf dem Königstuhl aufgestellt. Leider hat sich die mechanische Ausführung der Arbeit des Apparates, — der an anderer Stelle beschrieben werden soll — als ziemlich mangelhaft erwiesen und die Messungen erreichten eine sehr viel geringere Genauigkeit als zu erwarten war.

Trotzdem wurde nach Anbringung einiger unvermeidlicher kleiner Abänderungen in unserer Werkstatt der Apparat sofort in Benützung genommen, einmal weil man die Positionen der Planeten und anderer Objekte dringend benötigte, dann aber auch um ein Urteil über die Methode und den Arbeitsaufwand zu gewinnen und keine Zeit in der doch für fernere Zukunft gewiss sehr wichtigen Katalogisirung und Beschreibung der kleinen Nebel zu verlieren. Nachdem der damalige Assistent Dr. Schwassmann die Fehler der zur Messung der Deklinationen dienenden Mikrometerschraube bestimmt hatte, liess ich denselben sogleich mit der Vermessung einer Anzahl von Nebelplatten beginnen, die dann in den Jahren 1899 und 1900 durchgeführt wurde. Dabei stellte ich die Aufgabe, zu versuchen die Messungs- und Justirungsfehler genau zu bestimmen, sodass man ein Urteil darüber gewinnen konnte, wie weit die mit dem parallaktischen Messapparat gewonnenen Coordinaten Vertrauen verdienen. Diese Arbeit soll, sobald vollendet, im Druck erscheinen und wird gleichzeitig die Positionen von mehreren Hundert Nebelflecken enthalten.

In der Zwischenzeit wurde es mir ermöglicht[1]) ein neues bedeutend grösseres Fernrohr zu erbauen. Die Aufnahmen mit den Sechszöllern mit der kurzen Brennweite gaben zwar alle Nebel ebenso gut und kräftig als sie jedes grössere Instrument geben konnte; allein es war oft sehr schwierig zu entscheiden bei den kleinsten Nebelflecken, ob man es mit ganz schwachen Sternchen oder mit kleinsten planetarischen Nebeln zu thun hatte. Mit dem neuen Teleskop, dessen zwei je 40 cm Oeffnung besitzende Dublets von Brashear eine Brenn-

---

[1]) Durch die Hochherzigkeit der unvergesslichen Kath. Wolfe-Bruce.

weite von 2 Meter haben, sind in Folge dieser längeren Brennweite die kleinsten Nebel viel sicherer als solche zu erkennen, und deshalb wird das Arbeiten sicherer und leichter. Da zwei gleiche Linsen vorhanden sind, so können stets zwei Aufnahmen gleichzeitig gemacht und die Zweifel wegen der stets vorhandenen vielen störenden Plattenunreinlichkeiten beseitigt werden. Es sei mir erlaubt hier einzuflechten, dass die Lichtkraft trotz mehrfacher Warnungen und Befürchtungen seitens befreundeter Astronomen ganz entschieden nicht geringer geworden ist gegenüber den kleineren Linsen; das Oeffnungsverhältnis zwar ist das gleiche wie bei jenen und die Absorption musste mit den grösseren Glasdicken stark zunehmen, nichts destoweniger blieb die Lichtkraft praktisch mindestens die gleiche, sie ist vielmehr eher etwas grösser geworden. Die Ursache liegt unter Anderem vielleicht darin, dass die bei den meisten seitherigen Absorptionsuntersuchungen ganz übersehene Helligkeit des Himmelsgrundes, die eine wesentliche Rolle in der Praxis spielt, bei den grösseren Linsen viel günstiger für die Platte wird. Als Beispiel sei angeführt, dass die feinen Ausläufer des ζ-Orion-Nebels mit dem grossen Teleskop bei gleicher Belichtung kräftiger herauskommen, als mit dem kleinen.

Seit seiner Aufstellung im August musste das grosse Instrument fast ausschliesslich zur Verfolgung von kleinen Planeten benutzt werden. Ebenso wurden fast ausschliesslich Positionen solcher Himmelskörper auf den erhaltenen Platten ausgemessen. Doch wurde, wenn Zeit war, die Gelegenheit benutzt, die von den verwandten Anhaltsternen eingeschlossenen kleinen Nebel mit zu vermessen. Dies wird gegenwärtig weitergeführt.

Es ist aber meine Absicht die Katalogisirung der kleinen Nebelflecken zur Hauptaufgabe unseres Observatoriums zu machen.

Um eine Vorstellung davon zu ermöglichen, wie zahlreich diese unbekannten kleinen, planetarischen Nebelflecken sind, und wie sich ihre Katalogisirung mit Hülfe des parallaktischen

Messapparates ausführen lässt, möchte ich im Folgenden einige ausgemessene Gruppen mitteilen. Zuvor einige Bemerkungen über die Anordnung der Vermessung.

Dem parallaktischen Messapparat steht das auf einem Steinpfeiler befindliche schwere Plattenstativ besonderer Konstruktion[1]) auf gemeinsamem Betongrund gegenüber. Beide Apparate sind mit den nötigen Bewegungen versehen, um sie in ihrem Abstand und ihrer Einstellung beliebig auf einander richten und justiren zu können. Beide Apparate werden auf einander durch Autocollimation und durch Ausmessung einer Anzahl über die Platte verteilter Anhaltsterne mit dem Rectascensionskreise des Messapparates möglichst genau auf den richtigen Abstand, d. i. die Brennweite des Teleskopes, mit der die Aufnahme gemacht ist, und ein bestimmtes Aequinoctium orientirt, sodass direkt Rectascension und Deklination dieses Aequinoctiums auf der Platte gemessen werden können.

Die zu vermessende Nebelgruppe wird von bekannten Anhaltsternen, die den Katalogen entnommen werden, eingeschlossen und diese Sterne werden zugleich mit den Nebeln nach Rectascension und Deklination ausgemessen.

Aus den Sternen wird dann ein Mittelort gebildet und die vermessenen Objekte an diesen angeschlossen. Es handelt sich also um Differenzenmessung wie beim Fadenmikrometer am Fernrohr, nur dass die Gruppe ausgedehnter und die Anzahl der Vergleichsterne grösser genommen werden kann. Sowohl der Wert einer Revolution der Mikrometerschraube in Deklination, als der Wert einer Minute des Rectascensionskreises wird für jede Gruppe aus den Anhaltsternen abgeleitet. Die übrige Orientirung wird so genau ausgeführt, dass die Orientirungsfehler kleiner werden, als die durch die Mängel des Apparates verursachte Unsicherheit beträgt.

Aus diesem Grunde und um eine einigermassen rasch fortschreitende Katalogisirungsarbeit überhaupt zu ermöglichen, wurde beschlossen, auf genauere Ausgleichung und Verbesse-

---

[1]) Die Beschreibung erfolgt an anderer Stelle.

rungen der kleinen Fehler zu verzichten. Ein Urteil darüber, welche Genauigkeit auf diese Weise erreicht werden kann, erhält man, wenn man die Positionen der Anhaltsterne aus den Messungen mit berechnet und sie mit den Katalogspositionen vergleicht (s. u.).

Zur Sicherung richtiger Berechnung wird jedes Objekt sowohl von dem gemeinsamen Mittelort aus, als von einem möglichst central gelegenen Stern aus unabhängig gerechnet, wodurch sich eine Controle, wenigstens was die Berechnung betrifft, ergibt.

Da der Kreis leider stellenweise zufällige Fehler bis zu $1^s.34$ besitzt, und noch nicht genügend untersucht war, so mussten die Rectascensionen öfters unsicherer ausfallen, als die Deklinationen, welche mit der Schraube gemessen werden, deren periodische Fehler bekannt sind. Dieselben sind übrigens auch recht beträchtlich, denn sie erreichen $1''.54$ oder 0.007 einer Revolution. Diese Fehler machen sich besonders beim Orientiren der Platte unangenehm fühlbar.

Aus Einfachheitsgründen und um Irrtümer zu vermeiden wurde beschlossen, das m. Aequinoctium von 1875.0 für alle Positionen zu wählen, sich also direkt an den Sternkatalog der Astronomischen Gesellschaft anzuschliessen.

Es ist noch eine Schwierigkeit zu erwähnen, die ungünstig auf die Genauigkeit der Positionen wirkt. Es sind das die Helligkeitsverhältnisse der Vergleichsterne. Es müssen meistens Sterne der 6., 7. und 8. Grösse als Anschlusssterne gewählt werden. Diese werden aber bei der für Nebelaufnahmen (bezw. Planetenaufnahmen) nötigen Belichtungsdauer schon sehr gross auf der Platte, und die Einstellung darauf — besonders am Rand der Platte — ist wegen einer gewissen optischen Verzeichnung unsicherer als auf die meisten der kleineren planetarischen Nebel. Leider ist schwer etwas zu ändern, weil die Sternkataloge keine schwächeren Sterne enthalten. Es wäre notwendig, erst von jeder Gegend eine Aufnahme mit kurzer Belichtungsdauer (vielleicht auf dieselbe Platte) zu machen und schwächere Vergleichsterne an die dann noch kleinen Scheiben der hellen Katalogsterne anzuschliessen,

um die so erhaltenen Sterne dann als Anhaltsterne zur Vermessung der Nebelflecken zu benutzen. Dadurch würde aber die Arbeit sehr vergrössert, sodass ihr Fortschreiten und damit ihr Nutzen in Frage gestellt würde.

Ich gehe nun zur Mitteilung einiger Beispiele.

Die erste im Folgenden aufgeführte Gruppe von Nebelflecken findet sich auf der Platte B 137. Sie ist aufgenommen mit dem Bruce-Teleskop *a* am 13. Februar 1901 von $12^h\ 42.9^m$ M.Z. Königstuhl bis $14^h\ 15.0^m$. Das Ende ist eine Spur unsicher, weil der Schluss durch ziemlich plötzlich aufziehende Wolken bedingt wurde. Das ist hier ohne Belang und kommt nur für die mitaufgenommenen kleinen Planeten in Betracht. Die Mitte der Platte liegt in

$$\alpha = 8^h\ 20.9^m \qquad \delta = +\ 19^0\ 30'.4\ (1875.0)$$

während die Mitte der folgenden Nebelgruppe in

$$\alpha = 8^h\ 12.1^m \qquad \delta = +\ 19^0\ 20'.0$$

zu suchen ist.

Gruppe 1.

Nr.							
Nr. 1	8^h	10^m	$11^s.74$	18^0	50′	17″.3	*p B, S, R, b M,* * *B D* 18°.1904 *n f.*
2		10	27.52	18	47	43.0	*v S, p B N, l l,* ○, sends arc in the M. of * *B D* 18°.1905.
3		10	48.24	19	28	52.5	*p B, S, g b M,* * *n p* 0s.22.
4		10	55.23	19	7	13.5	*v F, v S, g b M, v* nr * 68⁰, connected by a neb arc.
5		11	2.22	18	47	13.3	*S, p B, b M,* nr *s p* of Nr. 6.
6		11	3.07	18	47	50.3	*S, p B,* larger then 5, *g b M.*
7		11	2.83	19	3	5.2	*p B,* nebulous *, 2 Spiral arms 135⁰.
8		11	18.18	18	51	51.4[1]	*i F!*
9		11	21.35	19	2	14.3	*p F, v S, i F.*
10		11	23.32	18	50	54.0[1]	*i F!*
11		11	24.69	18	57	18.4	*F, S,* ○, *h,* pr. edge sharper.
12		11	27.67	18	50	16.4[1]	*i F!*

[1]) 8, 10 u. 12 liegen in einem Nebel; derselbe ist draperieartig und wird durch vier Bögen im SW. begränzt, wie eine Bogenbrücke mit drei Pfeilern. Die Fusspunkte der drei Pfeiler sind gemessen. 10 hat die

13	8h	11m	47s.83	18°	59′	40″.2	*F*, *S*, dif, stell *N*, *v* near * *s f*.
14		11	51.35	19	18	6.2	*p F*, *S* semicircle, *N*, connected by an arc with * 13.
15*		11	42.27	19	17	45.0 [1]	* app Nr. 14.
16		11	51.89	19	20	36.1	*p B*, *v S*, *l* 50°.
17		11	56.73	18	53	11.2	*p F*, *S*, *i F*, sharp edges.
18		12	7.13	18	53	45.6	*v F*, *S*, dif, *g b M*, *l l* 125°.
19		12	13.76	19	22	27.5	*p F*, *v S*, *i F*, *l* 135°.
20		12	16.20	18	48	10.9	*F*, *v S*, *l* 90°, *v F* stell *N*, *B* * *s f*.
21		12	16.49	19	17	14.2	*p F*, *v S*, *i F*, *v l b M*.
22		12	54.53	18	46	25.0	*p B*, *S*, ○, sev. similar quite near.
23		12	56.61	18	47	38.4	*p F*, *S*, *i F*, *N* exc *s*, *v* nr * *n f*.
24		13	2.23	18	48	38.9	*F*, *p S*, sends two rectangular arms *n* & *p*.
25		13	3.34	18	49	32.3	*v F*, *l l*, *p B* exc *N* (meas.), * *s f*.
26		13	6.58	19	48	30.6	*F*, *v S*, *l* 0°.
27		13	27.19	19	30	9.0	*p F*, *v S*, *i F*, *g b M*.
28		13	33.05	18	47	22.6	*v F*, *l* 165°, sev *F N*, the brightest meas.
29		13	35.69	18	51	23.1	*p B*, *l* 40°, curved, *v* nw, *N M*.
30		13	42.38	18	54	3.4	*v F*, *l* 45°, dif, *v l b M*.
31		13	43.78	18	54	27.9	*v F*, in the Axis of 30, *v S* stell *N M*.
32		13	51.85	19	9	21.2	*F*, *S*, S-shaped, *v F N M*.
33		13	58.88	19	18	28.7	*F*, *v S*, *R*, dif, *N*.
34		14	9.90	19	14	13.1	*F*, *v S*, dif, *v F* stell *N*.
35		14	12.28	19	32	28.0	*p B*, *l* 155°, br, 2 parall. Lines, *i F*.
36		14	21.96	19	0	58.6	*F*, *v S*, ○, *N M*.
37		14	22.48	18	52	12.3	*F*, *R*, *S*, ○.
38		14	24.11	19	3	50.7	*F*, *v S*, ○, *N M*.
39		14	28.56	18	51	49.9	*p B*, *R*, *v S*, ○.
40		14	28.83	18	52	40.4	*F*, *S*, dif.
41		14	30.24	19	0	27.3	*p F*, *S*, *R*, ○.

---

schärfste Spitze, 12 hat zwei Verdichtungen an der Spitze, wovon die SW. gemessen ist. Die drei gemessenen Fusspunkte liegen fast auf einer Geraden im PW. 120°.

[1]) Dieser Stern ist nachträglich in δ an Nr. 14 angeschlossen, daher das absolute δ etwas unsicher, $\Delta\,\delta = 21''.17$.

42	8^h 14^m $46^s.44$	19^0	$35'$	$21''.7$		*v F*, *l*, sev *F N*, (south. N meas.).
43	14 56.94	19	18	28.2 [1]		*v F*, *l*, br, dif, curved, ends *f* in *a F**.
44	15 0.00	19	24	28.1		*v F*, dif, *l* 90°, sev *N*, (*M* meas.).
45	15 11.86	19	14	59.2		*B*, *R*, *v S*, stell, two Spiral arms.
46	15 48.74	19	28	44.0		*F*, *S*, *R*, *N*.
47	15 49.24	19	0	43.0		*p F*, *S*, *R*, ○.
48	16 8.62	18	56	4.4		*v F*, *R*, ○, *v S* (sev ○ neb. quite nr).
49	16 9.94	18	55	58.8		*F*, *R*, ○, *v S*.
50	16 19.05	19	8	52.8		*p L*, ∾, *N* ○ *p B*.
51	16 21.75	18	58	43.1		*p B*, *R*, *S*, ○, *v F* arm connects with * 112°.
52	16 42.41	19	25	27.9		*F*, dif, *p S*, *l b M*.
53	16 44.27	19	3	30.5		*p F*, *R*, ○, *l b M*, arm 45°.
54	17 3.25	19	10	28.4		*v F*, dif, *i F*, *S*.
55	17 5.27	19	24	23.7		*p F*, *L*, dif, *l b M*.
56	17 15.11	19	57	12.0		*v F*, *S*, *g b M*, stell *N*, *B* * *S*.
57	17 19.53	18	59	20.6 [2]		similar 58, sm, att 58.
58	17 20.63	18	59	49.6 [3]		*p L*, *p B*, dif, *i F*, *F* stell *N*.
59	17 27.24	19	3	27.0		*p B*, *S*, *R*, ○, Spiral arms.
60	17 29.87	19	4	3.4		*v F*, dif, *v S*, *v F N*.

Für die obige Nebelgruppe sind die folgenden Vergleichsterne benutzt worden:

H = BD.	18°1904	= AG. Berlin	*A* 3265
G	18.1905		*A* 3268
J	20.2045		*B* 3330
F	19.1982		*A* 3281
L	18.1925		*A* 3306
K	19.1991		*A* 3296
Q	19.1963		*A* 3257

Diese Anhaltsterne stellen sich aus den Messungen auf der Platte mit folgender Genauigkeit dar:

---

[1] Draperieartig, brückenförmig, die Fusspunkte der Brückenpfeiler im Süden.

[2] Hier ist Alles voll von kleinen Nebeln.

[3] 58 = NGC. 2581: 8^h 17^m 21^s + 19^0 $0'.1$.

	α Katalog-Messung:	δ Katalog-Messung:
H	+ 0ˢ04	— 1ʺ0
G	+ 0.25	— 1.4
J	— 0.11	— 1.3
F	— 0.05	+ 1.1
L	— 0.05	+ 1.1
K	— 0.16	+ 1.6
Q	— 0.11	— 0.6

Daraus ergibt sich der durchschnittliche Fehler einer Position in

α	δ
± 0ˢ11	± 1ʺ2

Da die Nebelflecken meistens viel sicherer eingestellt werden können, als die grossen Scheiben der Vergleichsterne, so dürfte die Darstellung der Oerter der Nebelflecken selbst kaum mit grösseren Fehlern behaftet sein. Dafür tritt aber ein durch die zu grossen Scheiben der hellen Vergleichsterne verursachter systematischer Fehler ein.

Bei der Vermessung der obigen Gruppe betrug der Wert einer Revolution der Mikrometerschraube, mit der die Deklinationen gemessen werden

$$R = 210''43 \pm 0''015 \text{ w. F.}$$

Der Kopf der Mikrometerschraube ist in 300 Teile geteilt. Der Wert einer Minute des Rectascensionskreises ergab sich aus den gemessenen Rectascensionsdifferenzen zu

$$M = 0^m\ 59^s98 \pm 0^s009 \text{ w. F.}$$

d. h. der Messapparat stand von der Platte etwas zu weit weg; gleichzeitig sieht man aber aus der Zahl, dass die Distanz doch schon sehr genau getroffen war. Das ist übrigens ziemlich belanglos, weil ja doch nicht mit den Ablesungen, sondern mit ihrem so bestimmten wahren Wert gerechnet wird.

Ganz analog wurde die folgende Gruppe vermessen. Sie findet sich auf derselben Platte, wie die erste Gruppe. Die Mitte der Platte war in

$\alpha = 8^h\ 20.9^m \qquad \delta = +\ 19^\circ\ 30'.4,$

die Mitte der folgenden Nebelgruppe ist in

$8^h\ 17.7^m \qquad 20^\circ\ 5'.9$

zu suchen.

Gruppe 2.

Nr.	α h	m	s	δ °	′	″	
1	8h	11m	54s.64	19°	47′	15″.2	*v F, p S,* dif, *l b M.*
2		12	2.85	19	42	6.9	*p F, p S,* dif, *l N* 135° (sev. dif. neb. v. nr).
3		12	8.38	19	57	9.1	*v S, l* 135°, Axis *b*, spindle shaped.
4		12	57.26	19	43	43.3	*F, v l* 60°, nw.
5		13	4.41	19	44	53.4	*v S, F, R, v l b M.*
6		13	22.10	19	49	56.9	*B,* stell, *v S.*
7		13	26.93	19	50	42.9	*v F, S, l N.*
8		13	27.03	19	30	7.7	*v S, F, R, b M.*
9		13	30.78	19	49	58.9	*p B,* dif, *p S, l* 0°.
10		13	32.01	19	45	18.9	*p B, R, i F f, v S, b M.*
11		14	1.74	20	9	5.2	*p B, S, R,* stell *N* exc, *i F f.*
12[1]		14	12.17	19	32	31.8	*p B,* dif, *l* 155°, * 13 *s* att.
13		14	46.11	19	35	24.9	*p F,* nw, *l* 155°, sev *N*, (*s b N* meas.).
14		15	3.62	20	0	45.1	*p B, l* 65°, traillike, *h.*
15		15	7.70	19	48	41.8	*p F, p l* 110°, *v* nw, spindle shaped, *f* curved, * *M.*
16		15	21.91	20	4	40.0	*v F, p L, R,* dif (sev. similar quite nr).
17		15	25.42	20	19	10.9	*p B, R, v S,* stell *N, F* * *s* att.
18		15	54.34	19	48	28.8	*p S, F,* dif, *v l b* bi *N*, (*n N* meas.).
19		16	47.54	20	3	54.0	*p L,* dif, *p B, h, N!*
20		16	54.11	20	21	13.1	*F, S, l* 90°, *B* * *p* att.
21		16	57.18	20	6	25.7	*v F, S, R, b M,* ∾ (*s f v* nr *a* similar).
22		17	4.27	20	56	3.9	*F,* nw, *l* 45°, torpedoshaped, *b* Axis.
23		17	26.66	20	0	17.1	*S, F,* dif, *l b M,* cont sm *f.*
24		17	36.51	20	51	57.5	*p B, S, R,* stell *N,* dif *i f* and *p.*
25		17	48.05	19	53	58.9	*F, v S, l,* traillike *N.*
26		17	51.35	19	54	40.0	*p F, S,* stell *N, R,* ∾.
27		17	52.22	19	53	51.7	*F, l l* 135°, *F N,* curved (*v* nr *f a v S* Neb).

[1]) NGC. 2572: $8^h\ 14^m\ 12^s + 19^0\ 32'.5$.

28[1]) 8h	17m	56.s89	20°	44′	14.″1	*F*, *v S*, *l* 160°, stell *N*, exc *n f*, (*M* meas.).
29	18	2.31	19	51	40.7	*F*, *S*, dif, *v F N*, exc.
30	18	27.25	20	20	44.7	*p L*, *p F*, dif, *b M*, bet 4 *B* st.
31	18	32.51	19	51	11.5	*p L*, *p F*, *h M*, outside dif.
32	18	37.87	20	9	50.1	*p L*, *S*, *R*, *b M*.
33	18	47.40	20	17	24.0	*p F*, *v S*, *b M*, *l N* 170°.
34	19	1.60	20	38	16.2	*p B*, *S*, *R*, stell, *i* dif *f*.
35	19	9.69	20	2	38.8	*p B*, *v S*, *N*, *i*.
36	19	23.62	20	12	18.7	*p B*, *S*, *R*, *l l* 90°.
37	19	26.83	20	17	23.4	*F*, *S*, *R*, *l l* 135°, *B* * *s f*.
38	19	34.03	20	46	21.4	*F*, *S*, dif, exc *N*.
39	21	8.54	20	12	7.6	*p F*, *S*, *R*, dif, *b M*.

Die Vergleichsterne zu dieser Nebelgruppe waren:

D = BD.	20°2095 = AG. Berlin	*B* 3396
B	19.2014	*A* 3338
A	19.2012	*A* 3336
C	20.2082	*B* 3380
K	19.1991	*A* 3296
E	20.2066	*B* 3354
F	19.1982	*A* 3281

Die Darstellung der Sterne aus der Platte ergibt:

	α	δ
D	— 0.s28	+ 1.″1
B	— 0.21	+ 0.5
A	+ 0.24	+ 1.8
C	— 0.31	— 1.5
K	+ 0.03	— 1.5
E	— 0.34	+ 0.3
F	+ 0.22	— 1.1

und damit der durchschnittliche Fehler einer Position

± 0.s23 ± 1.″1

[1]) NGC. 2582: 8h 17m 55s + 20° 43.′8.

Die Darstellung in Rectascension ist hier schlechter. Ich vermute, dass der Stern E die Schuld daran trägt.

Es folgt eine weitere Nebelgruppe. Sie findet sich auf Platte B 104, aufgenommen mit dem Bruce-Teleskop a: am 9. Januar 1901 von $7^h\ 55.7^m$ bis $9^h\ 40.7^m$ M.Z.K. Die Mitte der Platte lag auf

$$\alpha = 8^h\ 19.2^m \qquad \delta = +\ 24^\circ\ 56'.6$$

während sich die Mitte der vermessenen Gruppe in

$$8^h\ 8.8^m \qquad +\ 24^\circ\ 42'.5$$

befindet.

Gruppe 3.

Nr.							
1	8h	6m	6s.78	+24°	27′	5″.0	*p B*, *S*, dif, *l* 135° ∾.
2		6	10.10	24	25	20.9	*p B*, *l* 0°, dif ∾.
3		6	38.54	25	3	14.1	○, *v F*, *p S*, *p* dif.
4		6	39.28	25	2	12.9	○, *p F*, *S*.
5		6	39.68	24	14	29.8	*p B*, *S*, *R*, stell *N*, ∾.
6		7	18.98	24	50	35.8	*v F*, dif, *S*, *l* 155°.
7		7	41.26	24	30	27.0	*p F*, ○, dif, *S*, ∾.
8		7	44.11	24	30	38.6	*p F*, ○, dif, *S*, fainter then 7.
9		7	51.40	24	20	27.5	*F*, dif, *S*, bi *N*.
10		7	53.85	24	55	24.4	*S*, *v F*, *i*, *l* 0°.
11		8	0.23	24	54	52.9	*v F*, *S*, *i*.
12		8	34.45	24	13	46.5	*p B*, *S*, *p* dif, *b f*.
13		9	6.15	24	52	31.7	*F*, *v S*, dif, *i F*, app * *s p*.
14		9	12.26	24	19	49.2	○, *p F*, *p S*, *h*
15		9	13.09	25	4	32.9	*p F*, *R*, ○, *S*.
16		9	27.40	24	33	36.2	*B*, *p S*, *l* 205°.
17		9	58.97	25	3	23.5	*p F*, *S*, *R*, ○.
18		10	23.14	24	34	42.7	*p F*, *v S*, *R*, ○, *s i F*.
19		10	32.93	25	7	18.9	*p B*, *v l* 135°, nw!
20		10	37.95	25	10	52.1	*p B*, *R*, *S*, ○.
21		10	52.02	24	54	42.6	*p B*, dif, *S*, *b M*.
22		11	19.67	24	55	29.4	*p F*, *S*, *l l* 0°, dif, *b M*.
23		11	47.06	25	10	47.1	*p F*, *L*, dif, * 135°.
24	8	11	48.84	+25	10	27.5	*p B*, *S*, *b M*, *v* nr *B* *, nr 23.

Vergleichsterne:

F = BD.	25°1888 = AG.	Berlin B	3315
E =	25.1891 =		3323
M =	25.1878 =		3291
C =	24.1889 =		3306
D =	24.1907 =		3339

Die Darstellung der Vergleichsterne durch die Messung auf der Platte ergibt sich:

Durchschnittl. Fehler	in Rectascension	in Declination
	± 0ˢ04	± 0″6

Der Stern E wurde in Rectascension nicht verwandt, nur in Declination.

Die folgende 4. Gruppe befindet sich auf derselben Platte B 104. Mitte der Platte: 8^h 19.2^m + 24° 56′6, Mitte der Gruppe: 8^h 9.7^m + 23° 39′5.

Gruppe 4.

Nr.	h	m	s	°	′	″	
Nr. 1	8^h	8^m	34ˢ55	+23°	34′	45″1	*p F, l* 135°, in Axis *b*, bi *N*, (northern measured).
2		8	40.60	23	30	51.0	*p B, p L, E* 90°, *N* north of Axis.
3		9	6.38	24	0	48.6	*S, F*, O.
4		9	17.60	23	50	10.7	*p L, v F, l b S N.*
5		9	44.55	24	1	54.5	*S, F*, dif, *l* concentrated *M.*
6		9	50.57	23	57	37.7	*S, p F*, dif, *l l* 0°, bi *N*, (north. meas.).
7		9	52.53	23	56	46.1	*v F, S*, dif, diffic.
8		10	8.15	23	53	52.2	*v F, l* 45°, nw, nr * Nr. 8 *.
8*		10	12.37	23	53	42.1	nr Nr. 8, *B* *.
9		10	15.22	23	57	50.9	*v F, S*, dif ∾, *v l b M, l* 0°.
10		10	19.12	24	5	59.2	*p B, S*, dif ∾, stell *N.*
11		10	28.60	23	51	24.8 [1]	*v B, L*, dif, *b N* with 2 spiral arms!
12		10	45.20	23	26	59.5	*p F, S, l* 25°.
13		11	56.57	24	7	57.3	*F, S*, dif, *l* 90°, *b* Axis.

[1]) Nr. 11 im NGC. 2554: 8^h 11^m 30^s + 23° 51′4, am Katalogort ist kein Nebel, während die Beschreibung auf Nr. 11 passt. Es ist daher ein Irrtum im NGC. anzunehmen.

Die Anhaltsterne für diese Gruppe sind:

C =	BD. 24°1889	= AG. Berlin B	3306
D =	24.1907	·	3339
B =	23.1922		3317
A =	23.1925		3321

Sie werden in folgender Weise aus den Messungen auf der Platte dargestellt:

Durchschnittl. Fehler in Rectascension: $\pm$ 0ˢ06
in Declination: $\pm$ 1″2

Zu der Beschreibung der Nebel ist zu bemerken, dass die Bezeichnungsweise des Herschel'schen Generalkataloges benutzt ist, wie sie sich im Dreyerschen N. G. C. befindet. Ausserdem mussten aber noch folgende Begriffe eingeführt werden:

breit = br
schmal = nw
homogen = h
nach aussen allmählich verlaufend = ∾

Die Positionswinkel sind in Ermangelung einer Messvorrichtung nur roh geschätzt und zwar so, dass ein Strich im Beobachtungsheft bezüglich der Lage der Fäden gezogen und dessen Lage mit dem Transporteur abgelesen wurde.

Ueber einige interessante Eigentümlichkeiten einzelner von den gemessenen Nebelflecken soll an anderer Stelle berichtet werden. Ueberhaupt sollen später auch die interessantesten Objekte möglichst genau mit einem bei Repsold in Arbeit befindlichen Messapparat anderer Konstruktion untersucht werden. Hier war der Zweck der Mitteilung, zu zeigen, wie es möglich wäre, auf photographischem Wege und mit einfachen Messwerkzeugen die vielen unbekannten Nebel zu katalogisiren und sie kurz zu beschreiben. In dieser oder ganz ähnlicher Weise soll nach und nach eine Grundlage für einen photographischen Nebelkatalog und damit für eine für die Erkenntnis unseres Weltsystems so wichtige Statistik geschaffen werden.

Wie wichtig diese Katalogisirung ist, geht auch aus den angeführten Beispielen so recht anschaulich hervor. Es war absichtlich in den behandelten vier Gegenden eine Stelle des Himmels nicht gar weit von der Milchstrasse gewählt worden, die bisher als nebelarm betrachtet worden war. Die von den vier angeführten Gruppen bestrichene Fläche am Himmel beträgt 4.7 Quadratgrade. Es wurden auf ihr 135 Nebelflecke vermessen, von welchen, wie oben ersichtlich, nur 3 als bekannt im Dreyer'schen Generalkatalog angegeben sind. In den mir zugänglichen Listen Swift's befindet sich kein Nebel, der die betreffenden Gegenden berührt.[1]) In diesen vier Gegenden, — sie liegen alle zwischen Praesepe und Milchstrasse —, nämlich

$\alpha =$	8^h	12.1^m	$\delta =$	$+ 19^0$	$20'$	(1875.0)
	8	17.7		20	6	
	8	8.8		24	43	
	8	9.7		23	40	

stellt sich daher das Verhältnis von neuentdeckten zu bekannten Nebelflecken wie 132 zu 3. Mit anderen Worten, es wären bisher — vor Anwendung der Photographie mit den kurzbrennweitigen Linsen — nur zwei Prozent der leicht zu photographirenden Nebelflecken katalogisirt.

Aus den wenigen Schätzungen, die ich an anderen als nebelreich bekannten Orten anstellen konnte, scheint hervorzugehen, dass dort die Zahl der Nebel durch die Photographie nicht in wesentlich grösserem Maasse zunimmt. Es sind dort im Durchschnitt die Nebel nur grösser und heller und daher mehr bekannt.

Sollte sich diese Erfahrung bei der Weiterführung der Katalogisirung bestätigen, so würde daraus ein merkwürdiger Schluss auf die Konstitution des Weltsystems zu ziehen sein.

[1]) Listen Nr. 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12 in M. Notices, sowie Catalogues 1, 2, 3, 4, 4a in „History and Work of Warner Observatory.

Ueber die Jodquellen bei Tölz.

Von A. Rothpletz.

(Eingelaufen 20. Mai.)

Am Nordrand der bayerischen Alpen entspringen mehrere jodhaltige Quellen, die zu Heilzwecken benutzt werden und unter denen diejenigen bei Tölz gegenwärtig die grösste Berühmtheit erlangt haben. Ueber den Ursprung dieser Quellen und ihres Jodgehaltes wissen wir jedoch trotz der theoretischen und praktischen Bedeutung, welche diesem Gegenstande zukommt, sehr wenig. Nur das eine steht vollkommen fest, dass diese Quellen nicht etwa aus ein und derselben Gesteinsschicht oder aus gleicher Formation entspringen. Die Quellen von Sulzberg bei Kempten und von Heilbrunn bei Penzberg treten aus der oberoligocänen Molasse zu Tage, die bei Tölz aus dem Eocän und die des Kainzenbades bei Partenkirchen aus der Trias auf der Grenze zwischen Partnach- und Raibler Schichten, die hier durch eine Gebirgsstörung neben einander gerückt worden sind.[1])

Im vorigen Jahre wurde bei Tölz durch planmässige Anlage eines Stollens eine neue verhältnissmässig starke Quelle aufgeschlossen und diese Arbeiten, welche nach meinen Vorschlägen ausgeführt worden waren, haben neues Licht auf den Ursprung der Krankenheiler Jodquellen und auf den geologischen Bau der dortigen Gegend geworfen, so dass es geboten erscheint, darüber einen Bericht zu geben. Doch will ich zum

[1]) Siehe A. Rothpletz, ein Querschnitt durch die Ostalpen, 1894, S. 127.

leichteren Verständnisse für Fernerstehende, kurz über die Vorgeschichte der dortigen Jodquellen einiges vorausschicken.

Die Entdeckung der ersten Krankenheiler Jodquelle fällt ins Jahr 1846. Der Jaudbauer war am Blomberg in etwa 800 Meter Meereshöhe beim Graben nach Mergel auf eine schwache Quelle gestossen, in der Otto Sendtner, damals Privatdozent, später Professor der Botanik in München, Jod nachwies. Doch ging die Quelle durch Verschüttung wieder verloren und der Bergingenieur Rohatzsch, der das Quellgebiet dem Bauer abkaufte, musste mehrere Stollen in das Berggehänge treiben, wobei er zwar nicht die verschüttete, aber mehrere andere Quelladern antraf. Er hat darüber einen Bericht 1851 im Neuen Jahrbuch für Mineralogie (S. 164) veröffentlicht und darin zwei Quellen in Erinnerung an sein sächsisches Heimathland Bernhard- und Johann Georgen-Quelle getauft.

Analysen des Quellwassers wurden gemacht und ebenso Versuche eine Kuranstalt zu gründen, die aber erst von Erfolg begleitet waren, als Karl Herder aus Freiburg i. B. die Quellen 1856 durch Kauf erworben hatte. In diesem Jahre wurde auch die Jodquelle an der Bockleiten (Annaquelle) entdeckt und später kamen bei Krankenheil noch die Maximiliansquelle (1868) und die zwei Marienquellen (1870) hinzu. Seit 1861 sind die Quellen im Besitz einer Actiengesellschaft.

Einen kurzen Bericht über die geologischen Verhältnisse der Karls-[1]) und Annaquelle, bei deren Fassung er zugegen war, gab Gümbel 1861 in seiner Geognost. Beschreibung des bayer. Alpengebirges S. 634. Dieser und der frühere Bericht von Rohatzsch sind die einzigen literarischen Quellen, aus denen die zahlreichen Badebrochüren der Doctoren Gsell-Fels, Höfler und Streber bei Darstellung der Quellverhältnisse geschöpft haben.

Es ist mir unbekannt, wen Herder bei Fassung der Quellen als technischen Berather zur Seite hatte, aber sicher ist es,

---

[1]) Diese Quellen waren schon theilweise von Rohatzsch erschürft gewesen, aber erst später und nach ihrer Fassung durch Herder wurde die hinterste von den 3 Quellen 1872 erschlossen.

dass bei dieser Fassung Fehler begangen wurden. Zwar ging man durch Schürfungen den einzelnen Quellen so lange nach, bis man an die Stelle kam, wo sie aus dem festen Felsen heraustreten, aber dann umschloss man bei den wichtigeren Quellen diese Stelle mit einer festen Cementhülle domartig und zwang das Wasser aus diesem kleinen Sammelkessel durch eine Röhre zu entweichen, die fest in dem Cementmantel eingefügt war und die bei der Bernhard- und Maximilianquelle 1½ bezw. 3 Meter lang und senkrecht aufgestellt war, so dass es nur bei entsprechendem Auftrieb oben zum Ueberlaufen des Wassers kam. Die Folge war, dass später niemand die Ursache feststellen konnte, als die Quellen geringere Wassermengen gaben, und da auch weder Pläne noch Beschreibungen der Quellfassungen existirten, so blieb selbst der eingehenden im Jahre 1892 vom kgl. Bezirksamte vorgenommenen Untersuchung der eigentliche Ursprung der meisten dieser Quellen verborgen. Als dann im Februar 1900 die Cementverschlüsse der Krankenheiler Quellen gänzlich entfernt wurden, sah man, dass sich in den künstlichen Sammelkesseln im Laufe der Zeit ein feiner grauer Schlamm angehäuft hatte, der auch die Abflussröhren zum Theil verstopfte und wahrscheinlich die Ursache geworden war, dass das Quellwasser tiefer unten im Gestein auf dessen feinen Spalten andere Auswege gesucht und gefunden hatte.

Schon 1890 und 1892, als die Bernhard- und die Johann-Georgenquelle neuen quantitativen Analysen unterworfen wurden, ergab sich, dass gegenüber den früheren 1852 von Fresenius und Wittstein vorgenommenen Untersuchungen der Jodgehalt abgenommen hatte. Man musste daraus erkennen, dass die vorhandenen Quellen den steigenden Ansprüchen des immer mehr aufblühenden Badeortes nicht mehr genügen konnten, und so entschloss sich die Verwaltung der Actiengesellschaft endlich 1899 energische Nachforschungen nach neuen Quellen zu unternehmen.

Es war nicht leicht hierfür einen bestimmten Arbeitsplan zu entwerfen, denn nachdem schon die Natur durch eine mächtige und weit ausgedehnte Decke von Moränen, Gehängeschutt

und Alluvionen Lage und Ausdehnung der Schichten des Untergrundes fast ganz verhüllt hatte, waren durch die schon erwähnte Verkleisterung der Quellfassungen auch die künstlich geschaffenen Aufschlüsse fast gänzlich der Beobachtung wieder entzogen worden. Die Schilderung derselben in den eingangs erwähnten zwei Berichten von Rohatzsch und Gümbel gab ebenfalls keine verlässigen Anhaltspunkte, da mehreres in denselben unklar und widerspruchsvoll blieb. Rohatzsch, der seiner Beschreibung leider weder Grundrisse noch Profile beigegeben hat, scheint bei Angabe des Einfallens der Schichten Nord und Süd mit einander verwechselt zu haben. Ebenso Gümbel, der zwar eine Profilzeichnung gab, darin aber ein nördliches Einfallen einzeichnete, obschon im erläuternden Text in Uebereinstimmung mit Rohatzsch ausdrücklich ein südliches Einfallen erwähnt wird. Gleiches Einfallen zeigen Text und Profil für den Steinbruch an der Bocksleiten, in dem auch heute noch deutlich das Entgegengesetzte beobachtet wird. Den breiten Streifen von Eocän, den die geologische Karte am Eierbach aufweist, habe ich vergeblich gesucht, dahingegen fehlt auf derselben der Bühel von glaukonitischer senoner Kreide, der nordöstlich der Blomberger Quellen im Walde aufragt und in dem schon vor langem der Jaudbauer einen kleinen Schleifsteinbruch angelegt hatte.

Eine mehrtägige Untersuchung des Tölzer Quellengebietes im October 1899 führte mich zu folgenden Ergebnissen: Alle Jodquellen am Blomberg entspringen einem rothen Kalklager, das beiderseits von thonigen Mergeln eingefasst ist. Dieses Lager entspricht dem mitteleocänen Enzenauer Marmor. Es streicht von SO. nach NW. und die Mergel auf seiner SW.-Seite haben das Aussehen der jüngeren Stockletten. Die Mergel auf der Nordostseite sind anders beschaffen und schliessen kleine Bänke eines glaukonitischen Quarzsandsteines ein. Ob sie ebenfalls wie die Stockletten dem Kalklager concordant angelagert sind, blieb zweifelhaft, weil es sich nicht sicher entscheiden liess, ob die Auflagerungsfläche, welche mit 40—60° nach NNO. einfällt und stellenweise deutliche Schrammen auf

dem rothen Kalkstein zeigt, eine Schicht- oder eine Verwerfungsfläche sei. Der im Süden davon auftretende Flysch zeigt ein so verschiedenes Streichen und Fallen, dass ein normaler Verband desselben mit den eocänen Schichten nicht bestehen kann. Beide stossen wahrscheinlich auf einer grossen Verwerfungsspalte aneinander. Jodhaltig hatte sich bisher keine der vielen Quellen erwiesen, die dem Flysch entspringen, die Jodquellen sind vielmehr auf das Kalklager beschränkt und sie entspringen alle mit Ausnahme der Karlsquellen am Nordrande des rothen Kalkes. Anscheinend bilden die Spalten dieses Kalklagers die Wege, auf denen die Quellen aufsteigen, die von seitlichem Ausweichen durch die Mergel im Hangenden und Liegenden abgehalten werden.

Daraus ergab sich von selbst, wie man es zu machen habe, um, ohne die gefassten Quellen zu stören und ohne allzugrosse Kosten, etwa vorhandene neue Quellen aufzuschliessen. Ein Stollen von N. her mit südöstlicher Richtung in den Berg getrieben, musste bei einer verhältnissmässig geringen Länge, weiter westlich das rothe Kalklager erreichen und dabei höchst wahrscheinlich auf aufsteigende Quellen stossen.

Im Januar 1900 wurde mit der Anlage eines solchen Stollens begonnen, der bei einer Länge von 35 Metern wirklich auf das Kalklager stiess und zwar etwa 9 Meter nordwestlich von der Bernhardsquelle. Schon am 10. März traf man eine jodhaltige Quelle, die aus einer Spalte jenes Kalklagers empordrang und viel wasserreicher als die benachbarte Johann Georgen- und Bernhardsquelle war. Indem man im Streichen des Marmorlagers den Stollen nach NW. noch eine kurze Strecke weit trieb, erreichte man alsbald noch eine zweite aber schwächere Jodquelle und es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass in dieser Richtung noch weitere Quellen anzutreffen sind. Da aber die gefundene Wassermenge vorerst genügend erschien, wurde die Arbeit eingestellt. Nach einigen Tagen zeigte es sich, dass zwischen den neuen und den zwei benachbarten alten Quellen ein Zusammenhang besteht, denn letztere begannen bedeutend schwächer zu laufen und

haben bis heute ihren ehemaligen Wasserreichtum nicht wieder erlangt. Dahingegen machte sich bei den anderen Krankenheiler Quellen keinerlei Abnahme bemerkbar. Die neue Quelle lieferte ungefähr soviel Wasser als sämmtliche alten Krankenheilerquellen zusammen (also mit Ausschluss der Annaquelle an der Isar). Jetzt erst ging man daran, die Fassung jener alten Quellen aufzudecken, wobei die bereits erwähnten Mängel derselben, zugleich aber auch eine Anzahl sehr wichtiger geologischer Thatsachen zu Tage kamen, die in Verbindung mit den Aufschlüssen im neuen Stollen es gestatten eine bestimmtere Vorstellung von den Beziehungen der Jodquellen zum Gebirgsbau zu gewinnen.

1. Die geologischen Verhältnisse bei Krankenheil am Blomberg.

Die beistehende Kartenskizze zeigt alle Aufschlüsse des tertiären Gesteins, welche von Natur oder Menschenhand im Fassungsgebiete der Krankenheiler Quellen geschaffen worden sind. Alles, was weiss gelassen ist, gehört zu der grossen Moränendecke, welche das Gehänge des Blomberges an dieser Stelle bedeckt und die selbst wieder zum Theil durch jüngere Gehängebildungen und künstliche Aufschüttungen verhüllt ist.

Mit *e* ist der rothe Kalkstein bezeichnet, der dem Enzenauer mitteleocänen Marmor entspricht. Rohatzsch hat seinerzeit bei seinen Schurfarbeiten viel Versteinerungen darin gefunden, die aber nie einer genauen Bestimmung unterworfen worden sind. Nummuliten kommen darin sicher vor und auch sonst weist die petrographische Beschaffenheit auf den Enzenauer Marmor hin, der ungefähr in 700 Meter westnordwestlicher Entfernung auf dem Nordgehänge des Blomberges in einem grossen Steinbruch des Tölzer Magistrates ansteht. Gegenwärtig ist der Bruch auflässig, aber über den mehrere Meter hohen Wänden des rothen Marmors sieht man noch recht deutlich mit schwacher südlicher Schichtneigung die jüngeren foraminiferenführenden Stockletten oben aufliegen.

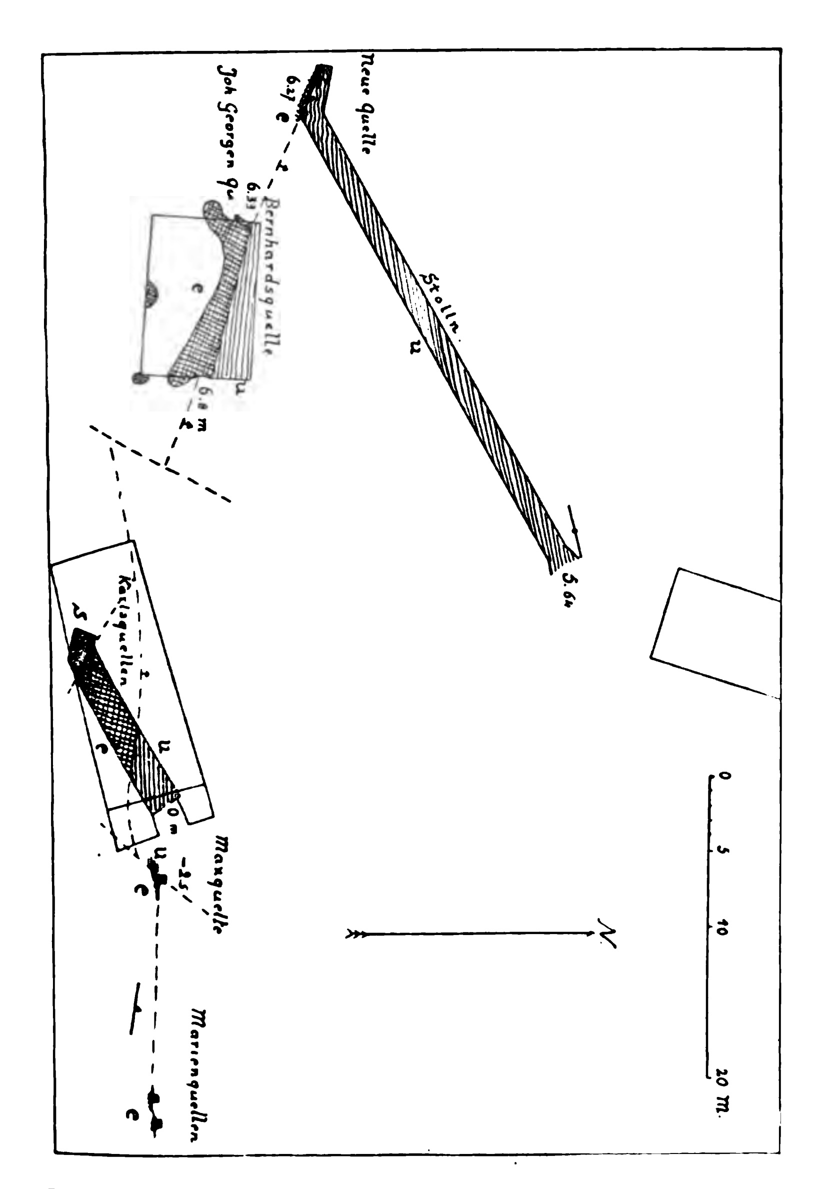


Fig. 1. **Kartenskizze der Blomberger Quellenfassungen.** 1 : 500. *u* Untereocäne Mergel, *e* Mitteleocäner Enzenauer Marmor, *s* Obereocäne Stockletten. Die Zahlen bedeuten die Höhe in Metern über und unter der Thürschwelle des Karlstollens.

Letten von gleicher Beschaffenheit sind auch im Karlsstollen auf der Südseite des Marmors aufgeschlossen (s. die Skizze) und scheinen ebenso wie letzterer senkrecht aufgerichtet zu sein.

Von anderer Beschaffenheit sind die Mergel auf der Nordseite des Marmorzuges. Sie sind schwärzlich und enthalten sehr viel silberglänzende Schüppchen von Kaliglimmer. Vereinzelt kommen Einlagerungen von festem etwas glaukonitischem Kalkstein und kalkigem Sandstein in schmalen Bänken in diesem dünnschieferigen Mergel vor. Versteinerungen sind selten und dann meist schlecht erhalten. Theils sind es unbestimmbare kohlige Pflanzenreste, theils weisschimmernde Schalen von Mollusken. Doch sind die meisten Schalen verdrückt, von mehliger Beschaffenheit und zum Theil schon aufgelöst. Nur in den harten Kalkbänken sind sie gut erhalten, dann aber schwer freizulegen. Solche Versteinerungen wurden durch den 30 Meter langen Stollen mehrfach zu Tage gefördert. Soweit sie sich bestimmen liessen, verweisen sie auf untereocänes Alter der Ablagerung. Ich fand:

Gryphaea Gümbeli M.-E.
Anomia tenuistriata Desh.
Cardium sp.
Cytherea sp.
Turritella sp.
Nautilus sp.

Es haben diese Funde deshalb eine weiterreichende Bedeutung, weil bisher aus der Tölzer Gegend untereocäne Ablagerungen noch nicht bekannt geworden sind. Auch diese Mergel sind senkrecht aufgerichtet und wir haben mithin scheinbar eine ganz regelmässige Aufeinanderfolge von Nord nach Süd: untereocäne Mergel, mitteleocäner Marmor und obereocäne Stockletten.

Gleichwohl besteht keine concordante Lagerung zwischen den untereocänen Mergeln und dem Marmorlager. Erstere streichen von Ost nach West mit localer Ablenkung nach

WSW (am Eingang des neuen Stollens N 105° W). Die Grenze aber gegen den Marmor streicht bei der Neuen Quelle und im Bernhardstollen, von kleinen Verbiegungen abgesehen, N 70° W, im Karlsstollen N 80° W. Diese Fläche und die Mergelschichten bilden also im Streichen einen Winkel abwechselnd von 10 bis 35°. Dazu kommt noch, dass die Mergel in der Regel senkrecht oder doch fast senkrecht stehen, während die Grenzfläche mit 40°—60° nach NNO. einfällt. Besonders deutlich war dies während der Wegnahme der alten Quellenfassung im Bernhardsstollen zu beobachten (s. Fig. 2). Anders verhält sich die Grenze zwischen dem Marmor und den Stockletten, die allerdings nur im Karlstollen sichtbar ist. Sie streicht N 65° W und scheint vertikal gestellt wie die Stockletten selbst, so dass sie also eine wirkliche Schichtfläche ist, die zugleich die Richtung des Marmorlagers bezeichnet, die sonst mangels Bankung nicht erkannt werden kann.

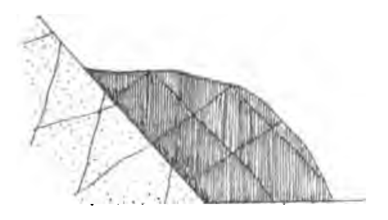


Fig. 2. Aufschluss am Eingang des Bernhardstollens. Grüne untereocäne Mergel auf den Enzenauer Marmor heraufgeschoben.

Wir haben also zwei verschiedene Schichtcomplexe vor uns: der eine im Süden besteht aus oberem und mittlerem Eocän, seine Schichten stehen saiger und streichen N 65° W; der andere besteht nur aus unterem Eocän mit ebenfalls saigeren Schichten, die jedoch O—W bis N 75° O streichen, mit denen des anderen Complexes also Winkel von 25—40° bilden.

Dieser ältere nördliche Complex liegt dem südlichen und jüngeren auf einer mit 40—60° nach Norden geneigten Fläche auf. Diese Auflagerungsfläche kann nur als eine Verwerfungsfläche aufgefasst werden, und da das Aeltere im Hangenden derselben liegt, muss sie eine Ueberschiebungsfläche sein. Die Richtung der Ueberschiebung wird im Bernhardstollen an den kräftigen Parallelschrammen erkannt, welche die Oberfläche des Marmorlagers im vorderen Theile des Stollens bedecken.

Dieselben liegen jedoch nicht genau in der Richtung der

Falllinie dieser Fläche, sondern steigen von NW. her schräg zur Falllinie gegen SO. auf. Die Schubbewegung fand also auf einer gegen NNO. geneigten Fläche, aber ziemlich genau von N. nach S. statt.

Im hinteren Theile des Stollens ist diese Schubfläche nicht geschrammt, auch nicht mehr so glatt, sondern rauh und brecciös, als wenn die härteren Einlagerungen des darüber geschobenen untereocänen Mergels auf dem Marmor eine Reibungsbreccie erzeugt hätten. Im neuen Stollen ist hingegen das Bild wieder etwas anders. Die Schubfläche ist nicht glatt und eben, sondern sanft gewellt, als ob sie vom Wasser corrodirt wäre. Es ist das vielleicht das Werk der gerade dort entspringenden kohlensäurehaltigen neuen Quelle, aus der Zeit, wo sie noch weiter aufwärts steigen musste, um die Oberfläche zu erreichen.

Auch die Mergel im Hangenden zeigen durchweg nahe der Schubfläche merkliche Veränderungen. Im neuen Stollen sind sie vor Ort ganz verdrückt und gestaucht, wie das auf Verwerfungsspalten gewöhnlich beobachtet wird. Aber bei der Quelle selbst und in noch höherem Maasse im Bernhardstollen ist der sonst grau-schwarze Mergel grünlich gefärbt, fest an die Marmorfläche angeschmiegt, in deren Unebenheiten hineingepresst und von spiegelnden welligen Druckflächen dicht durchsetzt. Es sind das nur die gewöhnlichen untereocänen Mergel, die jedoch längs der Ueberschiebung stark umgewandelt wurden. Da sie aber zugleich die Verschlussmauer für die schwefelwasserstoffhaltigen, im Kalkstein emporsteigenden Wasser bilden, so sind sie bis zu einem gewissen Grade damit getränkt und unterscheiden sich auch dadurch von dem gewöhnlichen Mergel.

Beim Ausräumen der Maxquelle hat sich ergeben, dass diese Quelle ebenfalls aus einer Spalte des Marmorlagers entspringt, dass letzteres jedoch daneben im Streichen gegen Westen von den grauen untereocänen Mergeln abgeschnitten wird, nach Art einer Querverschiebung, wie dieselbe in der Skizze eingetragen ist. Ich konnte das Streichen dieser saigern Trennungsspalte mit N 40° O bestimmen.

In Uebereinstimmung damit findet man die Nordgrenze des Marmors zwischen den Marienquellen und der Maxquelle gegenüber der im Karlstollen etwa um 2 Meter nach Norden vorgeschoben, so dass ein entsprechender horizontaler Vorschub des östlichen Theiles angenommen werden darf.

Etwas ähnliches muss zwischen der Karlsquelle und der Bernhardsquelle eingetreten sein, denn wenn man die Ueberschiebungsfläche beider Theile gegeneinander fortsetzt, wie das in der Skizze mit Berücksichtigung der Höhenlagen des Terrains durchgeführt ist, so treffen sie nicht genau aufeinander. Hier ist es das westliche Gebirgsstück, welches nach Norden und zwar um etwa 4 Meter vorgeschoben ist. Wenn man ferner die Grenzlinie zwischen Marmor und Stockletten vom Karlstollen nach West verlängert, so schneidet sie alsbald an der Ueberschiebungslinie ab und so ist es wahrscheinlich, dass das Marmorlager des Karlstollens von demjenigen des Bernhardstollens auf eine kurze Erstreckung durch Mergel getrennt ist. Für die aufsteigenden Quellen ist dies gewiss von grosser Bedeutung.

Aus alledem geht hervor, dass der Gebirgsbau im Quellgebiet ein recht verwickelter ist. Das beigegebene Profil versucht die Verhältnisse für die neue Quelle zu geben, wobei

Fig. 8. Profil des neuen Stollens. *u* Untereocäner Mergel, *e* Enzenauer Marmor, *s* Obereocäner Stockletten, *f* Flysch. 1:760.

auch das diluviale Deckgebirge eingetragen wurde, dessen wirkliche Mächtigkeit jedoch nicht genau bekannt ist. Ob die saigere Stellung des Marmorlagers hier so wie bei den Karlsquellen zutrifft, wissen wir ebenfalls nicht, es ist also diese und das Vorhandensein der sich südlich anlagernden Stockletten nur Vermuthung.

Dahingegen ist die Existenz des Flysches auf der anderen Seite des Wasserrisses sicher. Ein Schurf und ein alter Stollen haben denselben angefahren. In ersterem besteht er vorwiegend aus typischem, weichem, glimmerreichem Flyschsandstein mit kleinen verkohlten Pflanzenresten. Die Schichten fallen mit schwacher Neigung nach SW. ein, und es ist deshalb sehr wahrscheinlich, dass sie von dem Eocän durch eine Verwerfungsspalte getrennt sind, wie dies weiter im Westen bei Enzenau sicher nachgewiesen worden ist. Es gehört dieser Flysch einer breiten Zone an, die sich zwischen Isar und Loisach in einer Breite von 6 Kilometer überall südlich an den Eocänzug des Blomberges und von Enzenau anlegt. Von bestimmbaren Versteinerungen kommen fast nur die bekannten Flyschfucoiden darin vor, die im nördlichen Eocän jedoch gänzlich fehlen. Foraminiferen sind zwar auch sehr häufig darin, aber sie haben noch zu keiner specifischen Bestimmung geführt. Glücklicher Weise fand Herr Quass auf einer geologischen Excursion, welche ich im Sommer 1900 hierher führte, in einem Flyschblock der vom Blomberg stammt und in einem Wassergraben unmittelbar im Norden dieses Quellgebietes lag, den deutlichen Abdruck eines Inoceramus Cripsi, so dass wenigstens ein Theil dieses Flysches jedenfalls noch zur oberen Kreide gehören muss.

Geht man von den Krankenheiler Quellen über Wiesen und durch Wald, deren Boden durchweg aus Moränen und Gehängeschutt besteht, ungefähr 200 Meter nach NW., so gelangt man an einen etwas steil ansteigenden Waldhang, auf dessen halber Höhe ein längst verlassener kleiner Schleifsteinbruch liegt. Herumliegende Blöcke von grünem glaukonitreichem Kalkstein machen uns darauf aufmerksam. Er schliesst wenig gut erhaltene Schalen der Gryphaea vesicularis ein und gleicht auch sonst so vollkommen dem senonen „Grünsandstein“ von Enzenau,

dass kein Zweifel über sein Alter bestehen kann. Wenn wir diesen Aufschluss mit unserem Quellprofil (Fig. 3) in Verbindung setzen, so ergibt sich als das Wahrscheinlichste, dass diese Kreide die Unterlage des untereocänen Mergels bildet, und dass in dem aufschlusslosen zwischenliegenden Gebiete von 200 Meter Breite noch die obersten senonen Mergel zu suchen sind.

Der Kreidebruch liegt danach in der Mitte eines Gewölbes, dessen Nordflügel nicht erhalten oder wenigstens nicht sichtbar ist, dessen Südflügel aber aus den Schichten besteht, denen die Jodquellen entspringen. Es endet dieser Flügel an dem Flysch auf der bereits erwähnten Verwerfungsspalte. Ob letztere so saiger steht, wie ich sie gezeichnet habe, weiss ich nicht — an manchen Stellen der Nachbarschaft erscheint es so, an den meisten aber lässt es sich nicht feststellen. In dem eocänen Theil des genannten Südflügels hat eine nach Süd gerichtete Ueberschiebung stattgefunden, und die Jodquellen entspringen gerade da, wo die Ueberschiebungsfläche zu Tage geht.

In Figur 4 habe ich versucht nach den Aufschlüssen der Oberfläche den Bau des Gebirges bis herab zu einer Tiefe von fünfhundert Meter darzustellen. Ich habe in der Tiefe eine muldenartige Umbiegung des zu Tage saiger gestellten Flügels angenommen. Es entspricht das den Lagerungsverhältnissen von Kreide und Eocän, wie sie weiter im Westen durch die Arbeiten insbesondere von Dr. H. Imkeller[1]) klargelegt

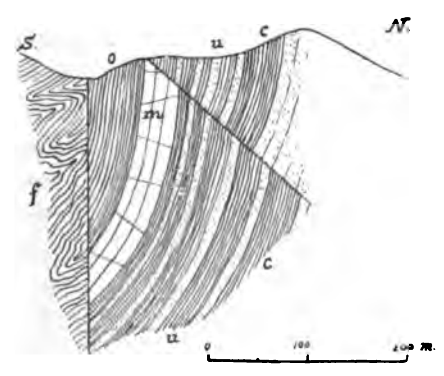


Fig. 4. Muthmasslicher Schichtbau bei den Blomberger Jodquellen. 1 : 7600. *f* Flysch, *c* obere Kreide, *u* unteres, *m* mittleres, *o* oberes Eocän.

[1]) Die Kreide- und Eocänbildungen am Stellauer Eck und Enzenauer Kopf bei Tölz. Programm zum Jahresbericht 1895/96 der städtischen Handelsschule München. Neuerdings auch Palaeontographica 1901 Bd. 48.

worden sind. Es soll damit jedoch keineswegs die Möglichkeit ausgeschlossen werden, dass die Schichten auch noch in grössere Tiefe senkrecht hinabsetzen oder dass noch andere Complicationen in der Lagerung hinzutreten.

Die geologischen Verhältnisse bei der Annaquelle an der Bocksleiten.

Dieselben sind von denen am Blomberg recht verschieden. Flysch, senone Kreide, untereocäne Mergel und Enzenauer Marmor sind nirgends sichtbar, aber an mehreren Stellen schauen unter der mächtigen diluvialen Ablagerung, welche hauptsächlich den langen und breiten Höhenzug des Wackersberges aufbaut, kleine Partien von Stockletten hervor, die wenig mächtige Einlagerungen von Granitmarmor enthalten.

Den besten Aufschluss gewährt der gegenwärtig auflässige Kirchmayer'sche Steinbruch etwa 100 Meter südlich der Häuser von Bocksleiten dicht neben der Fahrstrasse. Das eigentliche Lager von Lithotamnien-reichem Granitmarmor ist nur noch in einer Mächtigkeit von 2 Metern aufgeschlossen, darüber liegt 3 m stark ein feinkörniger Sandstein, dann 3 m Stockletten (ein grauer globigerinenreicher Mergel) und zu oberst nochmals Sandstein, der aber stark verwittert und bröckelig geworden ist. Alle diese Schichten streichen N 75° W und fallen mit 25° nach N ein. Zwei ältere Steinbrüche liegen je 50 m weiter im Süden, sind aber bereits ganz verwachsen und zum Theil bewaldet. Auch in ihnen stösst man nur auf Stockletten und Granitmarmor. Noch 100 m weiter südwärts im Fuchsgraben trifft man abermals einen Stocklettenartigen Mergel anstehend.

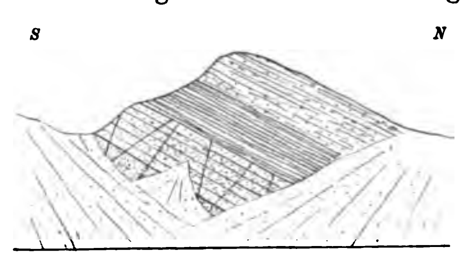


Fig. 5. Steinbruch an der Bocksleiten.

Zwischen dem Kirchmayr'schen Steinbruch und der 200 m

nordwestlich davon gelegenen Annaquelle fand ich in einem kleinen Wassergraben mitten im Wald einen grösseren Block von Granitmarmor, der wohl auf das Ausgehen einer solchen Gesteinsbank hinweist. Im nahen Gründelgraben steht wieder ein stocklettenartiger Mergel an, wie er auch im Annastollenhaus aufgeschlossen ist und vor dem Stollen auf einer kleinen Halde liegt.

Ob dieses 4 malige Vorkommen von Granitmarmor vier verschiedenen Lagern entspricht, oder ob es nur in Folge von Verwerfungen oder Faltung die Wiederholung ein und desselben Lagers darstellt, lässt sich bei der Geringfügigkeit der Aufschlüsse nicht entscheiden. In ersterem Falle müsste man den Stockletten eine Mächtigkeit von etwa 300 m zusprechen. Wenn ich die Stockletten hier kurzweg als Obereocän bezeichne, so soll das zunächst nur andeuten, dass sie jedenfalls jünger als der Enzenauer Marmor sind. Erst durch charakteristische Fossilfunde, die einstweilen von hier fehlen, liesse sich entscheiden, ob sie obereocän in dem Sinne sind, wie es nach O. Reis für die Stockletten bei Kressenberg zutrifft.

Der Verputz, den man seinerzeit der Annaquelle bei ihrer Fassung gegeben hat, lässt nur erkennen, dass die Quelle da entspringt, wo sich die diluvialen „Kreide"-Mergel discordant auf die Stockletten aufgelagert haben. Das heisst, sie sickert an mehreren Stellen aus jener Auflagerungsfläche hervor, ihr eigentlicher Ursprung ist unbekannt. Die Beschaffenheit des Stocklettens kann man nur aus den Stücken beurtheilen, die vor 46 Jahren beim Fassen der Quelle ausgegraben und vor dem Quellhaus auf eine Halde geworfen worden sind. Sie haben natürlich seither stark durch Verwitterung gelitten, doch lassen sie noch erkennen, dass dieser Mergel verhältnissmässig viele kleine kohlige Pflanzenreste einschliesst.

Die „Tölzer Kreide", welche darüber liegt, führt zu unterst vereinzelte kleine Gerölle und ist ziemlich sandig, was man direct über der Quelle sehen kann. 300 m südlich des Quellhauses ist diese Kreide in einer offenen Grube und südlich wie nördlich davon durch Stollen aufgeschlossen. Sie ist deutlich

horizontal geschichtet und wird von mächtigen fluvioglacialen Schottermassen überlagert. Ad. Schwager (Geognost. Jahreshefte 1894, S. 86) gibt Analysen des grauen Mergels (1) und einer gelblichen Abart (2) und zum Vergleich eines Dolomitsandes, wie er vom Hauptdolomit des Kramer bei Garmisch durch den Regen abgeschwemmt wird:

	CaO	MgO	CO_2	SiO_2	H_2O_3	Fe_2O_3	K_2O	Na_2O	$H_2O + Org$	Summa
1	33.08	6.31	32.90	14.73	8.17	1.78	0.94	0.16	2.66	100.73
2	36.90	4.50	33.94		21.75		0.14	0.11	2.70	100.04
3	31.60	18.50	46.00		sonstiges 3.4		—	—	—	99.50

Ob diese Kreide noch auf Eocän ruht, ist unbekannt, aber 400 m nördlich der Annaquelle kann dies jedenfalls nicht mehr der Fall sein, weil da am Ufer der Isar bereits unter Winkeln von 50—65° aufgerichtete Mergel und Sandsteine der oberoligocänen Molasse anstehen, die ein ostwestliches bis nordwestliches Streichen und südliches Einfallen zeigen. Sie fallen also widersinnig gegen den obereocänen Granitmarmor ein und ohne Zweifel stossen sie auf eine Verwerfungsspalte an dieselben an, ein Lagerungsverhältniss, das in ganz ähnlicher Weise bei dem Cementwerk Mariahilf bei Schaftlach nachgewiesen worden ist. Wo diese Verwerfung am Wackersberg durchstreicht, ist ungewiss. Es kann nahe der Annaquelle sein, vielleicht aber auch 400 m davon nördlich.

2. Das Wasser der Tölzer Jodquellen.

Von allen zu Heilzwecken benutzten Quellen besitzen wir chemische Analysen, die zwischen 1890 und 1900 gemacht worden sind. Von drei Quellen, nemlich der Bernhard-, Johann Georgen- und Annaquelle, liegen noch ältere Analysen von 1852 bezw. 1857 vor, so dass wir auch über die Veränderungen des Mineralgehaltes während 50 Jahren etwas wissen.

Ich gebe im Nachfolgenden eine Zusammenstellung dieser Analysen, doch will ich dazu bemerken, dass ich die Bestandtheile, welche nur in Spuren oder winzigsten Mengen von einzelnen Chemikern nachgewiesen worden sind, weggelassen habe, ebenso wie die fünfte Dezimalstelle. Die Bestimmungen der freien Kohlensäure und des Schwefelwasserstoffes sind nicht immer durchgeführt worden oder an Wasser, das in unzweckmässiger Weise der Quelle entnommen worden war, so dass die Analyse einen zu geringen Betrag ergeben musste. Nur die von L. A. Buchner, Fresenius und Hobein gemachten Bestimmungen verdienen Berücksichtigung. Die Analysen wurden ausgeführt 1852 von Fresenius und Wittstein (München), 1857 von Prof. L. A. Buchner (München), 1890 von Carl Buchner und Sohn in München, 1892 und 1900 von Dr. M. Hobein in München — alle im Auftrag der Quellenbesitzer, von denen ich diejenigen Angaben, welche bisher noch nicht veröffentlicht worden sind, erhalten habe. Von den Stoffen, die ich aus den Analysen weggelassen habe, sind quantitativ bestimmt worden in 1000 Theilen:

doppeltkohlensaures Lithion in der Johann Georgenquelle nur von Wittstein (0.0023),

doppeltkohlensaures Manganoxydul in der Bernhardsquelle von Fresenius 1862 und C. Buchner 1890 (0.0001),

phosphorsaures Eisenoxyd in der Johann Georgenquelle von Wittstein (0.0005) und von C. Buchner (0.0004),

kieselsaures Natron in der Johann Georgenquelle von Wittstein (0.0175), in der Karlsquelle von C. Buchner (0.0042), in der Maxquelle von C. Buchner (0.0076) und in der Marienquelle (0.0003),

kieselsaure Thonerde in der Bernhardsquelle von Fresenius (0.0020), in der neuen Quelle (0.0017), in der Annaquelle von L. A. Buchner (0.0012) und von C. Buchner (0.0096).

Aus den Jahren 1852 liegen von der Bernhards- und Johann Georgenquelle je zwei Analysen von Fresenius und

Wittstein vor, die in der Hauptsache eine gute Uebereinstimmung, im Einzelnen jedoch auch kleine Differenzen zeigen. Es mag dies zum Theil davon herrühren, dass das Wasser zu verschiedenen Zeiten den Quellen entnommen wurde, zuerst für Fresenius, später für Wittstein. Auch in der Gesammtmenge der Mineralbestandtheile ergab es Unterschiede bis zu 0.0534, also bis 7%. Aus diesen Schwankungen erklärt es sich wohl auch, dass der Gehalt an Jodnatrium von 1890 auf 1892 in der Johann Georgenquelle beinahe auf das Doppelte, in der Karlsquelle auf das siebenfache gestiegen war, trotzdem sich seit 1852 im Allgemeinen eine erhebliche Jodabnahme deutlich bemerkbar gemacht hat.

Fassen wir nun zunächst die Bernhardsquelle ins Auge, so lassen sich die gelösten Bestandtheile leicht in drei Gruppen bringen: die erste umfasst die Natriumverbindungen und die Kieselsäure, die zweite die Sulfate und die dritte die Carbonate von Kalk, Magnesium und Eisenoxydul. Von 1852 bis 1892 haben die gelösten Bestandtheile im Ganzen um etwa 20% abgenommen, die Natriumverbindungen sogar um beinahe 40%, während die Kalkcarbonate umgekehrt um 85% zugenommen haben. Die Sulfate hingegen zeigen abwechselnd Zu- und Abnahme, schliessen aber 1892 mit einer Mehrung gegen 1852 I von 64%, gegen 1852 II mit einer Minderung um 6% ab.

Man sieht hieraus, dass diese 3 Gruppen eine gewisse Selbstständigkeit besitzen, und da die erste Gruppe die Hauptbestandtheile der Soolquellen, die zweite der Schwefelquellen und die dritte der gewöhnlichen Quellen des Kalkgebirges einschliesst, so will ich sie der Kürze halber weiterhin als die Kochsalz-, Schwefel- und Kalk-Gruppen bezeichnen. Dass ich zu ersterer auch noch die Kieselsäure rechne, hat seinen Grund darin, dass dieser Bestandtheil regelmässig die Schwankungen nur dieser Gruppe mitmacht. Zur Schwefelgruppe ist natürlich auch der Schwefelwasserstoff zu zählen.

Vergleichen wir damit die Bestandtheile der Johann Georgenquelle, so ergeben sich auch jene 3 Gruppen ganz

von selbst; aber die Kochsalzgruppe weist zwischen 1852 und 1892 eine Mehrung von 29 % bei einer Zunahme von nur 19 % des Gesammtgehaltes auf. Umgekehrt hat die Kalkgruppe und selbst die Schwefelgruppe Abnahme zu verzeichnen, erstere um 12, letztere um 43 %. Doch macht sich die der letzteren erst seit 1890 bemerkbar, während die der ersteren bis 1890 sogar um 28 % zurückgegangen war, seither aber wieder schwach zunahm. Von der Kieselsäure bleibt es in dieser Quelle unsicher, ob man sie zur ersten oder dritten Gruppe stellen soll. Sie zeigt ungefähr gleiche Schwankungen wie das Jodnatrium, das ebenfalls eine Abnahme und zwar statt um 10 sogar um 20 % aufweist und ebenso 1890 einen noch tieferen Stand als 1892 hatte. Bernhardsquelle und diese haben es gemeinsam, dass der Jodnatriumgehalt abgenommen hat, in jener sogar um 62 %.

Die neue Quelle stimmt in allem sehr auffällig mit der Johann Georgenquelle überein und zwar mit Bezug auf Gesammtgehalt und die Kochsalzgruppe mit deren Stand von 1892, mit Bezug auf Sulfate und Kalkgruppe mit deren Stand von 1852. Die Bernhardsquelle war von beiden stets durch einen höheren Betrag in der Kalkgruppe und einen geringeren in der Kochsalzgruppe, wenigstens seit 1890 unterschieden. In der Schwefelgruppe steht sie hingegen beiden ungefähr gleich.

Berücksichtigt man, dass die gewöhnlichen Quellen dieser Gegend nur einen Gehalt aus der Kalkgruppe haben, so lässt sich dieser Unterschied so deuten, dass die Bernhardsquelle eine etwas stärkere Beimischung gewöhnlichen Quellwassers erhielt. 1890 hat C. Buchner Quellwasser untersucht, das ihm von der Badedirection zugeschickt worden war und das aus der Quellenfassung oberhalb der Jodquellen im Wassertöbel stammte.[1]) Es enthielt weder Jod, Brom, Lithium, noch Sulfate oder Schwefelwasserstoff und der Rückstand von 0.258 ‰

[1]) Gleiches Resultat hatte die Analyse von 1891 eines Wassers, das wahrscheinlich aus dem kleinen Versuchsstollen im Flysch südlich des Karlstollen stammte. Ein Rückstand von 0.302 enthielt 0.235 kohlensauren Kalk.

ergab 0.214 kohlensauren Kalk (incl. Magnesia). Da nun aber solche gewöhnliche Quellen dicht hinter der Bernhardsquelle und auch sonst fast in allen Quellenstollen entspringen, so wird eine Mischung mit den Jodquellen noch ehe diese zu Tage treten in den Gesteinsspalten sehr leicht stattfinden können.

Von diesen drei Quellen unterscheiden sich die Karlsquellen nicht unwesentlich dadurch, dass sie überhaupt wenige Bestandtheile, nur halb soviel von der Kochsalzgruppe, aber doppelt soviel von der Schwefel- und Kalkgruppe besitzen. Mit Bezug auf Schwefelwasserstoff und freie Kohlensäure besteht kein bedeutender Unterschied. Aehnlich verhalten sich die Max- und die Marienquelle, nur dass bei ersterer die Kalkgruppe noch stärker und bei beiden die Schwefel- und Kochsalzgruppen schwächer sind. Die drei letzteren Quellen weisen also auf stärkere Beimischung gewöhnlichen Wassers hin bei vermindertem Kochsalz, aber verstärktem Schwefelgehalt. Der Jodgehalt ist ein äusserst geringer.

Es steigern sich diese Verhältnisse noch bedeutend in der entfernten Annaquelle, deren Kalkgehalt gegenüber der Neuen Quelle auf mehr als das Doppelte zugleich mit dem gesammten Mineralgehalt gestiegen ist, während die erste Gruppe um zwei Drittel schwächer, die zweite Gruppe jedoch um fast die Hälfte stärker geworden ist. Auch hier ist der Jodgehalt sehr gering, während er 1857 nach L. A. Buchner 10 mal so gross gewesen war. Die freie Kohlensäure ist gegenüber der neuen Quelle erheblich gesunken, während der Schwefelwasserstoff 1890 mehr als das Doppelte, 1857 sogar das 4 fache betrug. Die Annaquelle ist also vorwiegend eine Schwefelquelle, aber mit starkem Zufluss gewöhnlichen Quellwassers, das seit 1857 um $^1/_5$ noch zugenommen hat.

Alle Quellen haben einen nicht unbedeutenden Gehalt an freier Kohlensäure, der aber nicht unerheblichen Schwankungen zu unterliegen scheint. Die neue Quelle mit 0.02 CO_2 gleicht darin der Johann Georgenquelle von 1852 ganz und der Bernhardsquelle (0.014) von 1852 annähernd. Dahingegen fand Hobein in beiden letzteren 1892 fast zehnmal mehr CO_2

(0.117 und 0.139) und ähnliche Beträge in der Karl- und Maxquelle. Es scheint fast als wenn in diesem Jahre eine ausnahmsweise starke Kohlensäureentwickelung stattgefunden hätte. Die Annaquelle hingegen ergab sowohl 1857 als auch 1892 ungefähr gleiche Beträge, nemlich 0.083 und 0.089.

Neben der Veränderlichkeit in der chemischen Zusammensetzung, welche für die Tölzer Heilquellen, wie wir gesehen haben, im Laufe der letzten 50 Jahre nachgewiesen worden ist, besteht aber auch noch eine solche in der Wassermenge. Für frühere Jahre liegen allerdings die Messungen nicht mehr vor und nur ein uncontrollirbares Gerücht behauptet, dass die Annaquelle, als sie aufgefunden wurde, viel stärker gewesen sei als später, nachdem man sie gefasst hatte. Ob dies richtig, ob daran eine ungeschickte Fassung Schuld hat, muss unentschieden bleiben.

Anzahl der Sekunden, in denen ein Liter Wasser geliefert wurde:

	7. März 1891	?	1892	Januar 1900						1.Febr.		April	22. März 1901
				9	15	26	29	30	31	Vor.	Nach.		
Bernhardquelle	70	76	71.5	63	62.5	62.5	65.5	64.5	70	70	68	175	526
Joh. Georgenquelle	80	86	81.5	86	86.5	85	83.5	88	93	90.4	90		
Neue Quelle	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8.1	14.5
Karlsquellen	57.5	60	66.5	27.5	29	31	33	36.6	—	—	—	26	12
Maxquelle	22.5	20	23	22	22.5	22	22.2	22.7	—	—	—	24	25
Marienquellen	17.5	17.5	17.5	18.5	18.5	18	20.5	18.2	—	—	—	21	22
Annaquelle	20	24	23	„	—	—	—	—	—	—	—	—	30

Bei anhaltend trockenem Wetter oder grosser Kälte laufen im Allgemeinen die Quellen schwächer. Die Zunahme bei den Karlsquellen mit dem Jahre 1900 kommt daher, dass die ungeschickte Fassung derselben entfernt und ein bis dahin unberücksichtigt gebliebener Quellast hinzugenommen worden war. Die starke Abnahme der Bernhard- und Johann Georgenquelle

zwischen Februar und April 1900 hängt mit der Erscheinung der Neuen Quelle zusammen.

Ueber die Temperatur des Jodquellwassers liegen leider nur mangelhafte Berichte vor. G. Höfler gab 1869 für die Bernhardsquelle 7.5° C. und für die Johann Georgenquelle 7.6° an. Gümbel erwähnte 1861 9.1° von der Jodquelle am Sauersberge, womit jedenfalls eine der beiden obigen Quellen gemeint sein muss. Leider ist bei keinen dieser Messungen die Jahreszeit angegeben und Höfler hat wohl nicht die Quelle an ihrem Ursprung gemessen, da sie 1869 schon längst vercementirt war, sondern an ihrem Röhrenausfluss. Gegenwärtig lassen sich an ihnen keine Thermometermessungen mehr vornehmen. Dahingegen ergab mir die neue Jodbrunnenquelle im März 1901 8.37° C. Die Messungen habe ich mit controllirten Instrumenten vorgenommen, die mir Herr Prof. Ebert aus der Sammlung der Technischen Hochschule freundlichst überlassen hat.

Am gleichen Tag fand ich für die Marien- und die vordere der Karlsquellen 6.9° und für die dritte hintere 3.9°.

Die Annaquelle wurde im Mai 1857 von L. A. Buchner mit 8.75° (= 7° R.) gemessen, im März 1901 fand ich 8.27°. Die Stollenquelle des Cementwerkes auf gleicher Meereshöhe (650 m) hatte 8.17°.

Nach den von Gümbel 1861 (Alpengebirge S. 835) zusammengestellten Quellenmessungen wäre die normale Quellentemperatur der Annaquelle 8.25°, für die Quellen am Sauersberg (805 m) 7.25°.

Die dort im Hintergrund des Bernhardstollen gefasste gewöhnliche, aber ziemlich starke Brunnenquelle, zeigte aber im März 1901 nur 1.75°. Im Sommer ist sie bedeutend wärmer.

3. Der Ursprung der Tölzer Jodquellen.

Aus den vorausgehenden Angaben lassen sich einige Schlüsse über die Herkunft dieser Quellen und ihres Mineralgehaltes ziehen.

Aus welcher Tiefe kommen diese Quellen?

Die neue Jodquelle ist nur um etwas mehr wie 1°, die Annaquelle blos um den Bruchtheil eines Grades wärmer als eine normale gewöhnliche Quelle und die Marien- und Karlsquellen sind sogar kälter. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich jedoch leicht auf, wenn wir die Art der Quellenfassung und die Natur der dortigen gewöhnlichen Quellen ins Auge fassen.

Die neue Quelle ist einige Meter unter der Bergoberfläche da gefasst, wo sie direct aus einer Felsspalte austritt, die anderen gemessenen Quellen hingegen sind gerade an der Oberfläche der festen Felsen, wo sie von Moränen- und Gehängeschutt bedeckt werden, gefasst, so dass das im Deckgebirge circulirende Tageswasser sich leicht damit mischt. Die Annaquelle hat in Folge dessen die Temperatur desselben von 8.17° beinahe schon erreicht, und die Karls- und Marienquellen mit 6.9° und 3.9° zeigen noch deutlicher den Einfluss des kalten März-Quellwassers.

Der ausgeprägt „heterothermale“ Charakter der gewöhnlichen Sauersberger Quellen hat seine Ursache in der geringen Mächtigkeit der Gesteinsschichten, in denen sich die atmosphärischen Niederschläge zu Quellwasser ansammeln. Es sind Moränen und Gehängeschutt- und -lehm, welche auf den meist thonigen Mergeln der Kreide- und Tertiärformation liegen und die selbst mit ihren untersten Lagen nicht in die Region der „unveränderlichen Bodentemperatur“ herabreichen. Winterkälte und Schneeschmelze werden deshalb hier sehr fühlbar und auch der Wasserreichtum und die Wasserreinheit der daraus entspringenden Quellen zeigen grosse und unmittelbare Abhängigkeit von den jeweiligen Regenmengen.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Annaquelle, wo die tertiären Schichtgesteine von einer bis 10 Meter mächtigen diluvialen Mergelschicht, der „Tölzer Kreide“, und einer darüber liegenden Masse fluvioglacialer Schotter bedeckt sind. Besonders in den unteren sandigen Lagen dieser „Kreide“ bilden

die atmosphärischen Niederschläge eine Art von Grundwasser, das an den der Isar zugewendeten Gehängen in Form von Quellen zu Tage tritt. Dieses Quellwasser zeigt in Folge dessen eine von dem Wechsel der Tages- und Jahreszeiten ziemlich unabhängige und constante Temperatur.

Die Annaquelle, welche jedenfalls mit einer höheren Temperatur aus den eocänen Schichten aufsteigt, erreicht zunächst dieses Grundwasser-Niveau und muss sich mit diesem Wasser schon gemischt haben, bis sie an die Stelle kommt, wo sie heute gefasst ist und im März 8.27° hatte.

Nur die neue Jodquelle gibt mir also einen sicheren Beweis für ihre thermale Natur, aber gleichwohl ist auch sie schon stark beeinflusst von den Wassern, die von oben her in das zerklüftete Kalklager eindringen, den Fels abkühlen und sich mit dem aufsteigenden Quellwasser mischen. Unter Berücksichtigung dieser Thatsachen darf man wohl mit einiger Sicherheit annehmen, dass die Tölzer Jodquellen aus einer Tiefe von über 100 Meter aufsteigen.

Zu ähnlichen Ergebnissen führt uns die Betrachtung der mineralischen Bestandtheile dieser Quellen. Unter denselben betragen die Carbonate von Kalk, Magnesium und Eisen

bei	der	neuen Quelle	15%
„	den	Karlsquellen	40
„	„	Marienquellen	44
„	der	Annaquelle	52

Dieselben Bestandtheile finden sich auch in den gewöhnlichen dortigen Quellen, denen jedoch Sulfate, Jod und Kochsalz fremd sind, und zwar belaufen sie sich ungefähr auf 0.25 bis 0.30‰. Nehmen wir nun an, dass die aufsteigenden Jodquellen davon nur sehr wenig enthalten, den jetztigen Gehalt daran vielmehr erst der Beimengung gewöhnlichen Quellwassers verdanken, dann ergibt sich für die neue Quelle eine Beimengung von $^1/_3$, für die drei anderen Quellen von $^2/_3$ gewöhnlichen Quellwassers.

Dass diese Mischung wirklich eintritt, erkennt man sehr

deutlich an der Annaquelle, bei der unter jenen Carbonaten dasjenige des Magnesium besonders stark vertreten ist (0.276 statt 0.02 bis 0.05 bei den anderen Quellen). Das Grundwasser nimmt dort natürlich seine Bestandtheile aus der „Kreide“ und diese ist reicher an Magnesium als die Moränen der Umgebung und des Sauersberges, weil sie grossentheils aus fein zerriebenem Hauptdolomit besteht.

Diese erhebliche Beimengung kälteren Wassers muss natürlich die thermalen Quellen in ihrer Temperatur bedeutend herunterdrücken und zugleich ihren Gehalt an Sulfaten, Kochsalz, Soda und Jod mindern. Wenn wir also aus den gemessenen Temperaturen unmittelbar die Tiefe, auf Grund der Tiefenstufe von 30 m pro 1° C., berechnen wollten, aus der die Quellen aufsteigen, so würden wir recht unrichtige Resultate erhalten. Statt der 40—50 m, welche sich so für die neue Quelle ergeben würden, dürfen wir jedenfalls über 100 Meter als einen der Wirklichkeit näher kommenden Werth annehmen.

Wie sammelt sich das Untergrundwasser, das die aufsteigenden Jodquellen speist?

Es ist schon erwähnt, dass die atmosphärischen Niederschläge, soweit sie nicht unmittelbar der Isar zufliessen, in die aus Moränen, Schotter, Lehm u. s. w. bestehende Oberflächendecke eindringen und sich darin zu Quelladern und Grundwasser ansammeln. Noch tiefer einzudringen hindert sie im Allgemeinen die thonige Beschaffenheit der Kreide- und Tertiär-Schichten, welche das Gebirge aufbauen. Indessen liegen in Wechsellagerung mit diesen wasserundurchlässigen Schichten andere — Sandsteine und Kalksteine — welche ein Eindringen des Wassers verhältnissmässig leicht gestatten und so kommt es, dass doch ein wenn auch kleiner Theil der atmosphärischen Niederschläge in denselben verschwindet. Alle diese porösen Schichten sind aber einerseits steil aufgerichtet, anderseits von thonigen Schichten im Hangenden und Liegenden eingeschlossen. So sinken die einmal eingedrungenen Wasser auf jenen porösen

Schichten immer mehr in die Tiefe, andere folgen nach und es entstehen Untergrundwasser-Ansammlungen, die aber in der Hauptsache nur auf einzelne Gesteinsschichten beschränkt bleiben.

In unserem Falle sind diese Schichten zwar muldenförmig gebogen und fallen in Folge dessen steil nach Süd ein, aber ehe sie zur Umbiegung kommen, welche sie wieder zu Tage bringen müsste, werden sie von einer bedeutenden Verwerfungsspalte abgeschnitten, auf deren anderer Seite jetzt in Folge der stattgehabten Verwerfung stark gefaltete und gefältelte Flyschmergel und Sandsteine anstehen.

Durch diese Anlegung des thonigen Flysches an die unteren Enden der wasserführenden Schichten werden dieselben also nach unten abgeschlossen und das Untergrundwasser an weiterem Absteigen abgehalten. Der hydrostatische Druck muss aber bestrebt sein das angesammelte Wasser auf dem wenn auch engen Riss der Verwerfungsspalte in die Höhe zu treiben, wie in der Röhre eines artesischen Brunnens. Wenn dann dieses aufsteigende Wasser an die Stelle kommt, wo der stark zerklüftete Enzenauer Marmor an der Verwerfung abstösst, wird es leichter in die Spalten dieses Kalksteines eindringen als in der Verwerfungsspalte weiter aufsteigen und so erklärt es sich, dass die aufsteigenden Jodquellen des Blomberges alle aus diesem Marmorlager entspringen. Die stärksten dieser Quellen können freilich gar nicht bis zu Tage aufsteigen, weil sie von den überschobenen thonigen untereocänen Mergeln, in die sie nicht eindringen können, zurückgehalten werden. Erst künstlicher Abdeckung dieser Mergel ist es gelungen auch diesen Quellen einen Ausfluss zu schaffen.

Mit dieser Auffassung steht es im Einklang, dass die Jodquellen stärker fliessen müssen, wenn eine Periode stärkerer atmosphärischer Niederschläge vorausgegangen ist, weil dann mehr Wasser in die porösen Schichten eingedrungen, der Untergrundwasserspiegel dadurch gestiegen und der hydrostatische Druck vergrössert worden ist. Die thatsächlich beobachteten

grossen Schwankungen im Wasserreichtum der Quellen dienen zur Bestätigung.

Sobald das aufsteigende Wasser in die Klüfte des Marmorlagers eintritt, ist es der Berührung und Vermischung mit demjenigen Wasser ausgesetzt, das von oben in dieses Lager eingedrungen ist. Nach unserem Profil (Fig. 4 auf Seite 139), das allerdings in den tieferen Lagen nur vermuthungsweise gezeichnet ist, würde das bei einer Tiefe von etwa 200 Meter beginnen, wo das aufsteigende Wasser einem Wasser von etwa 13° begegnen, sich mit ihm mischen und sich abkühlen müsste. Höher herauf würde die Temperatur natürlich immer weiter sinken bis zu der „invariablen Zone", wo das Grundwasser etwas über 7° hat. Die Abkühlung ist thatsächlich sehr gross, denn das Wasser tritt nur noch mit einem Ueberschuss von wenig mehr als 1° zu Tage. Wie wir schon früher sahen, hat sich das aufsteigende wahrscheinlich um etwa ein Drittel mit absteigendem Quellwasser vermischt und da diese Quellen überhaupt nur langsam fliessen und aufsteigen, so mag auch die Abkühlung durch die umgebenden kälteren Gesteine ein Wesentliches zum Endergebniss beigetragen haben.

Wie bedeutend bei local sie begünstigenden Verhältnissen diese Beimischung abkühlend wirken kann, beweisen die tiefen März-Temperaturen der Marien- und Karlsquellen.

Woher stammen die mineralischen Bestandtheile und die Gase der Jodquellen?

Einen Theil müssen wir jedenfalls von dem gewöhnlichen Quellwasser ableiten, das sich mit dem aufsteigenden mischt. Die vorhandenen Analysen haben gezeigt, dass die gewöhnlichen Quellen am Blomberg nur sehr wenig Mineralgehalt haben (0.25—0.30 °/oo) und zwar hauptsächlich kohlensauren Kalk (0.21—0.24 °/oo). Die Thatsache, dass bei den nachgewiesenen zeitlichen Gehaltsschwankungen der Jodquellen einer Minderung an Sulfaten oder Kochsalz stets eine Mehrung an Kalkcarbonat entspricht, ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass die Zufluss-

quellen von beiderlei Bestandtheilen getrennt sind. Stärkerem Zufluss von gewöhnlichen Quellwasser mit seinem Kalkcarbonat folgt natürlich in der Mischung eine Abnahme des aufsteigenden Wassers mit seinen Sulfaten und seinem Kochsalz.

Der eigentliche Thermalantheil dieser Jodquellen, welcher bei der neuen und der Johann Georgenquelle etwa $^2/_3$, bei den anderen bis nur $^1/_3$ ausmacht, bringt seine gelösten Stoffe aus der Tiefe mit herauf, und sie finden sich jedenfalls schon in dem Untergrundwasser vor, das diese Quellen speist. Da aber das Untergrundwasser aus einer Ansammlung von atmosphärischen Niederschlägen hervorgeht, welche als solche Sulfate, Kochsalz, Soda und Jod nicht oder doch nur in Spuren in Lösung haben, so bleibt nichts anderes übrig als anzunehmen, dass diese Substanzen sich in denselben Gesteinsablagerungen vorfinden, in denen sich jene Untergrundwasser ansammeln.

Im Meerwasser kommen sie ebenfalls vor und können sich in den sandigen und thonigen Absätzen des Meeres in Form von Steinsalz, Soda, Glaubersalz u. s. w. sehr leicht mit absetzen. Wenn sie in älteren Meeresablagerungen, die durch Hebungen trocken gelegt sind, verhältnissmässig selten angetroffen werden, so braucht dies nicht daher zu rühren, dass sie überhaupt nie da waren. Sie sind in Wasser so leicht löslich, dass das circulirende Grund- und Untergrundwasser sie meist schon gelöst und weggeführt hat. Wo die Circulation des unterirdischen Wassers gehemmt ist, tritt zwar Lösung aber nicht Wegführung ein, wie der berühmte „Torrent d'Anzin“ bei Valenciennes in Frankreich beweist, der als eine unterirdische Wasseransammlung in den Kreideschichten in einer Tiefe von ungefähr 80 m mit einer Dicke der Wasserschicht von 8—9 m ruht und einen Flächenraum von 2450 Hectaren einnimmt. Sein Wasser tritt nicht in Form von Quellen zu Tage, wird aber seit längerer Zeit von den Bergleuten künstlich entfernt, so dass die Menge schon bedeutend abgenommen hat. Das Wasser führt pro Liter bis 13 g feste Bestandtheile und zwar besonders Kochsalz und Sulfate.

In ähnlicher Weise ist anzunehmen, dass auch die Kreide-

und Eocänschichten bei Tölz ursprünglich diese leicht löslichen Meeressalze enthielten. Bald nach ihrer Ablagerung zur mittleren Oligocänzeit wurden sie dann aufgerichtet und gefaltet. In den oberen Theilen der Faltengewölbe trat dann sofort Auslaugung durch die Quellwasser ein, aber in den tieferen Faltenmulden, welche unter das Niveau der Thäler herabreichen, fehlte dem Untergrundwasser das Gefälle und damit die Strömung. Es konnte wohl jene Salze theilweise lösen, aber sie nicht wegführen. Dies wurde bei Tölz erst möglich, als der hydrostatische Druck das stagnirende Untergrundwasser auf der inzwischen entstandenen Verwerfungsspalte heraufzupressen begann. Freilich ist dieser Ausfluss so schwach, dass die Menge der Salze dadurch bisher kaum eine erhebliche Minderung erfahren hat, dahingegen ist es wohl verständlich, dass die Lösung im Untergrundwasser keine gleichmässige ist. Sie wird in Folge der langsamen Bewegung des Wassers in den Gesteinen an den einen Stellen mehr, an anderen weniger Salze enthalten und bald mehr Sulfate, bald mehr Kochsalz oder Soda. Insbesondere wird es nicht Wunder nehmen, wenn der Jodgehalt sehr ungleichmässig vertheilt ist. Das Jod ist im Meerwasser in so geringen Mengen nur vorhanden, dass es sich überhaupt erst dann bemerkbar macht, wenn Thiere und hauptsächlich Meerespflanzen es in sich aufgenommen haben. Nach deren Tod gelangt es dann am Boden des Meeres in die entstehenden Ablagerungen, aber natürlich nur, wie die Thiere und Pflanzen selbst, an bestimmten Stellen in nachweisbaren Mengen.

Je nachdem nun der aufsteigende Quellstrom gerade von der einen oder der anderen Stelle jenes Untergrundwassers aus gespeist wird, enthält er mehr oder weniger Jod oder Kochsalz oder Sulfate. Diese Veränderlichkeit ist im Laufe der letzten 50 Jahre durch die Analysen auch für die Tölzer Jodquellen mit Sicherheit festgestellt worden.

Ausserdem zeigen aber auch die einzelnen Quellen nicht unerhebliche aber constante gegenseitige Verschiedenheiten in den Lösungen. Wie die Quellen in einer Reihe von Ost nach

West angeordnet sind, so steigt auch in dieser Richtung ihr Gehalt an Jod, Kochsalz und Soda und fällt der an Sulfaten.

Diese Verschiedenartigkeit wird noch durch besondere tektonische Verhältnisse begünstigt und verstärkt. Die neue Quelle hat nach ihrer Lösung grösste Aehnlichkeit mit der Johann Georgen- und Bernhardquelle, die 10 m von ihr entfernt entspringen. Nur 30 m weiter nach Osten liegen die Karlsquellen, ihr Gehalt jedoch ist schon wesentlich verändert — von der Kochsalzgruppe nur noch halb soviel, von den Sulfaten doppelt soviel vorhanden. Eine Querverwerfung trennt beide Quellengruppen, und wenn die Verschiebung auf derselben auch nur einige Meter beträgt, so genügt dies doch schon um die Marmorbank, in der die Quellwasser aufsteigen, zu beiden Seiten soweit zu verrücken, dass sie nicht mehr einen zusammenhängenden Zug darstellt und dass die Quellwasser in derselben nicht mehr mit einander in Verbindung treten können. Es trat dies bei Erschliessung der neuen Quelle sehr klar in die Erscheinung. Wenige Tage nachher zeigten die Johann Georgen- und Bernhardsquelle eine starke Abnahme ihrer Wassermenge, während der Reichtum der Karlsquellen bisher in keiner Weise in Mitleidenschaft gezogen worden ist.

Bei der Max- und den Marienquellen macht sich gegenüber den Karlsquellen wiederum eine Veränderung fühlbar, die Menge der Kochsalzgruppe ist etwas, die der Sulfate aber erheblich kleiner geworden. Auch da liegt eine kleine Querverwerfung trennend dazwischen.

Sendtner hat seinerzeit den Jodgehalt auf Rechnung der Flyschfucoiden gestellt, und es scheint sogar, dass diese es waren, welche ihn veranlassten, das Wasser auf Jod zu prüfen. Diese Fucoiden finden sich zwar in grossen Mengen im Gebiet der Quellen, aber doch nur in Flyschgesteinsstücken, die von der Höhe des Blomberges herabgefallen oder von Gletschern der Eiszeit herbeigeführt und auf den Eocän- und Kreideschichtköpfen liegen geblieben sind. Wir wissen jetzt, dass die Jodquellen nicht aus dem Flysch selbst entspringen. Dementsprechend nahm Gümbel (Geol. Bayerns Bd. II S. 162) 1894

an, es möchten die Meeresthiere der Nummulitenschichten den Quellen den Jodgehalt liefern. Mir scheint, dass auch die Pflanzen und Thiere der jüngeren Kreideperiode herangezogen werden müssen, jedoch nicht, als die directen Lieferanten des Jodes. Die meisten der jodausscheidenden Organismen sind gar nicht versteinerungsfähig, ihre Körper sind längst zerfallen und verwest. Aber das Jod hat sich in die Meeressalze zurückbegeben und wird da nun wieder von den eindringenden süssen Wassern vorgefunden und aufgelöst.

Neben den Sulfaten enthalten die Jodquellen stets auch Schwefelwasserstoff und zwar besteht diese bestimmte Relation, dass mit der Menge der Sulfate auch die des Schwefelwasserstoffes steigt und fällt. Man wird denselben deshalb entstanden annehmen müssen aus einer Desoxydation der Sulfate, bewirkt durch Oxydation von organischen Substanzen, welche den dazu nöthigen Sauerstoff den Sulfaten entziehen, etwa nach der Formel:

$$Na_2 SO_4 + 2 C + 2 H_2O = 2 (H Na CO_3) + H_2 S.$$

Ein Theil des doppeltkohlensauren Natrons wäre somit nicht aus der Auflösung von Sodamineralien entstanden, sondern aus der Zerlegung von schwefelsaurem Natron unter Freiwerden von Schwefelwasserstoff.

Sehr geringe Mengen organischer Substanzen sind zwar in den Quellen nachgewiesen — aber für diesen Vorgang wären wohl hauptsächlich die kohligen Pflanzenreste verantwortlich zu machen, welche in den Mergeln der Eocän- und Kreideformation nicht zwar in mächtigen Lagern, wohl aber in häufigen Bruchstücken vorkommen.

In der Badeliteratur über Tölz ist der Versuch niedergelegt, den Schwefelwasserstoffgehalt aus der Einwirkung organischer Verbindungen auf den in den Mergeln allerdings ebenfalls vorhandenen Schwefelkies abzuleiten, womit eine von den Sulfaten ganz unabhängige Quelle für den Schwefelwasserstoff gegeben wäre. Es ist dies aber nicht sehr wahrscheinlich.

Die grösste Ungewissheit besteht über die Herkunft der

freien Kohlensäure. Die mit dem Regenwasser in den Boden und in das Untergrundwasser eindringende Kohlensäure reicht zur Erklärung nicht aus, weil diese zur Bildung der doppeltkohlensauren Salze vollauf aufgebraucht wird. Ausserdem müssten die gewöhnlichen Quellen am Blomberg ebenfalls entsprechende Mengen freier Kohlensäure führen, was aber nicht der Fall ist. Können chemische Vorgänge, die im Sammelgebiet des Untergrundwassers vor sich gehen, zur Erklärung herangezogen werden? Man möchte vielleicht an die mit Kohlensäureentwickelung verbundene Oxydation der schon erwähnten Pflanzenreste denken, wozu der mit dem Regenwasser eindringende und an dieselben gebundene Sauerstoff der Luft Veranlassung geben kann. Da jedoch mit einem solchen Vorgang stets auch die reichliche Entwickelung von Kohlenwasserstoffgasen verbunden ist, solche aber in den Tölzer Jodquellen bisher noch nicht quantitativ nachgewiesen worden sind, so ist diese Deutung wohl von der Hand zu weisen. Allerdings hat einmal nach den Angaben des Quellenwärters bei Annäherung eines offenen Lichtes über der neuen Quelle nach Wegnahme des Deckelverschlusses der Fassung eine schwach explosionsartige Gasentzündung stattgefunden, was wohl auf die Ausströmung von Kohlenwasserstoffgasen schliessen lässt, aber es müssen sehr geringe Mengen sein, weil es späteren Versuchen nicht mehr gelungen ist, ähnliches zu beobachten. Da Soollager häufig geringe Mengen solchen Gases im sog. Knistersalz einschliessen, so finden geringe Spuren in den Jodquellen genügende Erklärung aus der Auflösung solcher Salze durch die Untergrundwasser.

In den eocänen und Kreidemergeln ist Schwefelkies eingesprengt. Der doppelkohlensaure Kalk der Quellwasser kann auf denselben so einwirken, dass sich der Schwefel oxydirt und mit dem Kalk zu schwefelsaurem Kalk vereinigt, während das oxydirte Eisen als Brauneisen zurückbleibt und die Kohlensäure frei wird. Wenn ein solcher Vorgang es sein sollte, der dem Quellwasser die freie Kohlensäure geliefert hat, dann müsste in demselben natürlich auch Kalksulfat nachweisbar sein. Dies

ist aber nicht der Fall und darum entbehrt auch diese Deutung der thatsächlichen Unterlage.

Vielleicht findet das Räthsel seine Auflösung durch die Annahme, dass die Kohlensäure aus grösseren Tiefen stammt, wo sie sich aus stark erwärmten Massen loslöst und begünstigt durch die grosse Verwerfungsspalte, die Kreide und Flysch von einander trennt, nach oben aufsteigt. Auf diesem Wege müsste sie schliesslich den ebenfalls auf jener Verwerfungsspalte aufsteigenden Jodquellen begegnen und sich mit ihrem Wasser mischen. Die Herkunft der freien Kohlensäure wäre dann eine ganz andere, wie die der in den Jodquellen gelösten Bestandtheile. In der That scheint diese Selbstständigkeit durch die Analysen des Jahres 1892 bewiesen zu werden. In diesem Jahre fand Dr. Hobein in den Johann Georgen-, Bernhards-, Max- und Karlsquellen 0.12 bis 0.15 ‰ freie Kohlensäure, während früher nur Beträge von 0.014 bis 0.02 und 1900 in der neuen Quelle ebenfalls nur von 0.02 gefunden worden sind. Dem achtfachen Gehalt an freier Kohlensäure standen aber 1892 durchaus keine irgendwie erhebliche Veränderungen in den sonstigen Bestandtheilen gegenüber.

Dass in Gebieten früherer vulkanischer Thätigkeit Kohlensäure durch die feste Erdkruste hindurch in die Höhe steigt, ist wohl bekannt und kann nicht mehr bezweifelt werden. Die Tölzer Gegend gehört zwar nicht zu solchen Gebieten, aber es ist nicht unwahrscheinlich, dass grosse Verwerfungsspalten, welche in bedeutende Tiefen herabsetzen, ebenfalls befreiend auf die von den heissen Gesteinsmassen absorbirte Kohlensäure wirken.

Wir sind also in diesem Capitel zu folgendem Ergebniss gelangt: die Tölzer Jodquellen verdanken ihre Entstehung der Ansammlung von Untergrundwasser in steil nach Süden einfallenden Schichtgesteinen der Tertiär- und Kreideperiode. Dies Wasser löst die ursprünglich in diesen Schichten zum Absatz gekommenen Meeressalze auf und bringt sie zu Tage, indem es auf einer Verwerfungsspalte durch hydrostatischen Druck aus einer Tiefe von wohl mehr als 200 Meter emporgetrieben

wird. Während des Auftriebes findet jedoch in höheren Lagen eine Mischung mit absteigenden gewöhnlichem Quellwasser und damit eine entsprechende Abkühlung statt. Die Herkunft der freien Kohlensäure ist unbekannt, vielleicht aber eine selbstständige aus grösserer Erdentiefe.

Die Beziehungen der Tölzer zu den anderen Jodquellen des bayerischen Alpengebietes.

Die Annaquelle liegt 3 Kilometer von den Blomberger Jodquellen entfernt gegen Osten. $5^1/_2$ Kilometer gegen Westen trifft man die Heilbrunner Quelle. Man versteht darum leicht die Neigung, auch diese in genetischen Zusammenhang mit jenen zu bringen, trotzdem die geologische Verschiedenheit stets bekannt war, welche darin besteht, dass die Heilbrunner Quelle nicht aus den eocänen Schichten, sondern aus der oberoligocänen Molasse entspringt.

Letztere ist zwar nur wenig jünger als das Eocän, aber eine sehr bedeutende Längsverwerfung trennt beide ebenso, wie Eocän und Flysch von der schon besprochenen anderen Verwerfung geschieden sind. Kreide und Eocän waren schon gehoben und gefaltet, ehe die Molasse in dem jungoligocänen Meere, das sich am Nordfusse der oligocänen Alpen ausbreitete, zum Absatz gelangte. Als dann zu Ende der Miocänzeit auch die Molasse gehoben und gefaltet wurde, entstand jene Verwerfung, die die Molasse als subalpine Formation tektonisch von den eigentlichen Alpen abgetrennt hat. Diese Verwerfung lässt sich längs des ganzen Nordrandes der Alpen verfolgen, und sie ist jedenfalls ebenso bedeutend als jene andere Verwerfung am Nordrande des Flysches, auf der die Tölzer Jodquellen aufsteigen.

Gleichwohl hat Gümbel 1861 (Bayer. Alpengebirge S. 634) die Vermuthung ausgesprochen, dass auch das reiche Jodwasser der Adelheidquelle in Heilbrunn den Nummulitenschichten entstamme. Er hat diese Anschauung dann 1894 (in Geologie Bayerns II S. 162) wiederholt, aber wie früher ohne weitere

Begründung oder Angabe, wie die Jodwasser in die Molasse eindringen, gelassen. Auch die Jodquelle von Sulzberg, 7 Kilometer südlich von Kempten, die inmitten der oligocänen Molasse aus dieser entspringt, und von der aus man fast 2 Meilen weit zu gehen hat, um die nächsten anstehenden Nummulitenschichten anzutreffen, ist er geneigt, wenn auch mit Vorbehalt, aus letzteren abzuleiten, die in grösserer Tiefe unter der Molasse anstehen könnten (Bayer. Alpengebirge 1861 S. 734).

L. A. Buchner hat 1843 eine Analyse der Adelheidquelle veröffentlicht (Buchners Repertorium f. d. Pharmacie Bd. 82 S. 333). Daraus geht hervor, dass die chemische Beschaffenheit dieser von der der Tölzer Quellen sehr verschieden und dass eigentlich gar kein Grund vorhanden ist, für beide gleichen Ursprung anzunehmen. Zunächst enthält die Heilbrunner Quelle ungefähr 7 mal so viel mineralische Bestandtheile als die Tölzer Quellen. Es fehlen ihr aber trotzdem die Sulfate gänzlich. Dafür hat sie etwa 20 mal so viel Kochsalz und Jod und ausserdem einen nicht unbedeutenden Gehalt an Brom. Des weiteren enthält das Wasser ungefähr der Menge nach 1 % Gase, unter denen Kohlenwasserstoff, Kohlensäure, Stickstoff und Sauerstoff angegeben werden.

Es sind das Unterschiede so erheblicher Art, dass gleicher Ursprung der Quellen geradezu unwahrscheinlich erscheint, und es ist nicht einzusehen, warum die Heilbrunner und Sulzberger Jodquellen ihren Gehalt nicht direct aus tieferen Theilen der Molasse selbst beziehen sollten, ebenso wie es ja auch für die Kainzenbadquelle bei Partenkirchen fast sicher ist, dass sie ihren Jod- und Salzgehalt nicht aus den eocänen-, sondern aus den Raiblerschichten bezieht.

Die zwei Analysen, welche L. A. Buchner von der Heilbrunner Quelle gegeben hat, sind noch in anderer Beziehung interessant. Er entnahm das Wasser für die eine im Juni, für die andere im August 1842 und es ergab sich eine nicht unbedeutende Minderung der Mineralbestandtheile in letzterem Monat (etwa um $^1/_4$). Er hat das specifische Gewicht des

Quellwassers bestimmt zu 1.0037 (Juni), 1.0034 (August), 1.0036 (October) und für die gleichen Zeiten:

feste Bestandtheile	6.1	4.6	6.0
Jodnatrium	0.0286	0.0256	0.0290

Er bemerkt dazu „ich habe überhaupt Ursache zu glauben, dass die meisten Heilquellen, je nach den zu verschiedenen Zeiten herrschenden Einflüssen, ihre Zusammensetzung mehr oder weniger ändern können, dass also ihre Mischung nicht so constant sei, als man bisher anzunehmen geneigt war.“ Dass diese Vermuthung auch auf die Tölzer Quellen zutrifft, haben uns die vorhandenen Analysen bereits vollauf bestätigt.

	Juni	August	Differenz
Jodnatrium	0.0286	0.0256	—
Bromnatrium	0.0195	0.0151	—
Chlornatrium	5.088	3.678	—
Chlorkalium	0.0028	—	-
Kohlensaures Natrium	0.848	0.740	—
„ Ammoniak	0.010	—	—
„ Kalk	0.057	0.062	+
„ Magnesia	0.014	0.033	+
Eisenoxyd	0.010	0.015	+
Thonerde	0.003	0.0014	—
Kieselsäure	0.014	0.024	+
Organische Substanz	0.007	0.0026	—
	6.1019	4.5967	

Trotz der bedeutenden Abnahme um $^1/_4$ der festen Bestandtheile im August tritt bei den kohlensauren Verbindungen von Kalk und Magnesia, dem Eisenoxyd und der Kieselsäure dennoch gleichzeitig eine Zunahme auf, d. h. bei den Stoffen, die schon im gewöhnlichen Quellwasser zu erwarten sind. Daraus muss wie bei den Tölzer Quellen geschlossen werden, dass die Abnahme der

Thermalbestandtheile bedingt ist durch stärkeren Zufluss gewöhnlichen Wassers mit seinen Bestandtheilen. Ein Unterschied besteht nur insofern, als bei Tölz die Kieselsäure abnimmt, wenn sie bei Heilbrunn zunimmt, dort also zu den Thermalbestandtheilen zu gehören scheint, hier aber nicht.

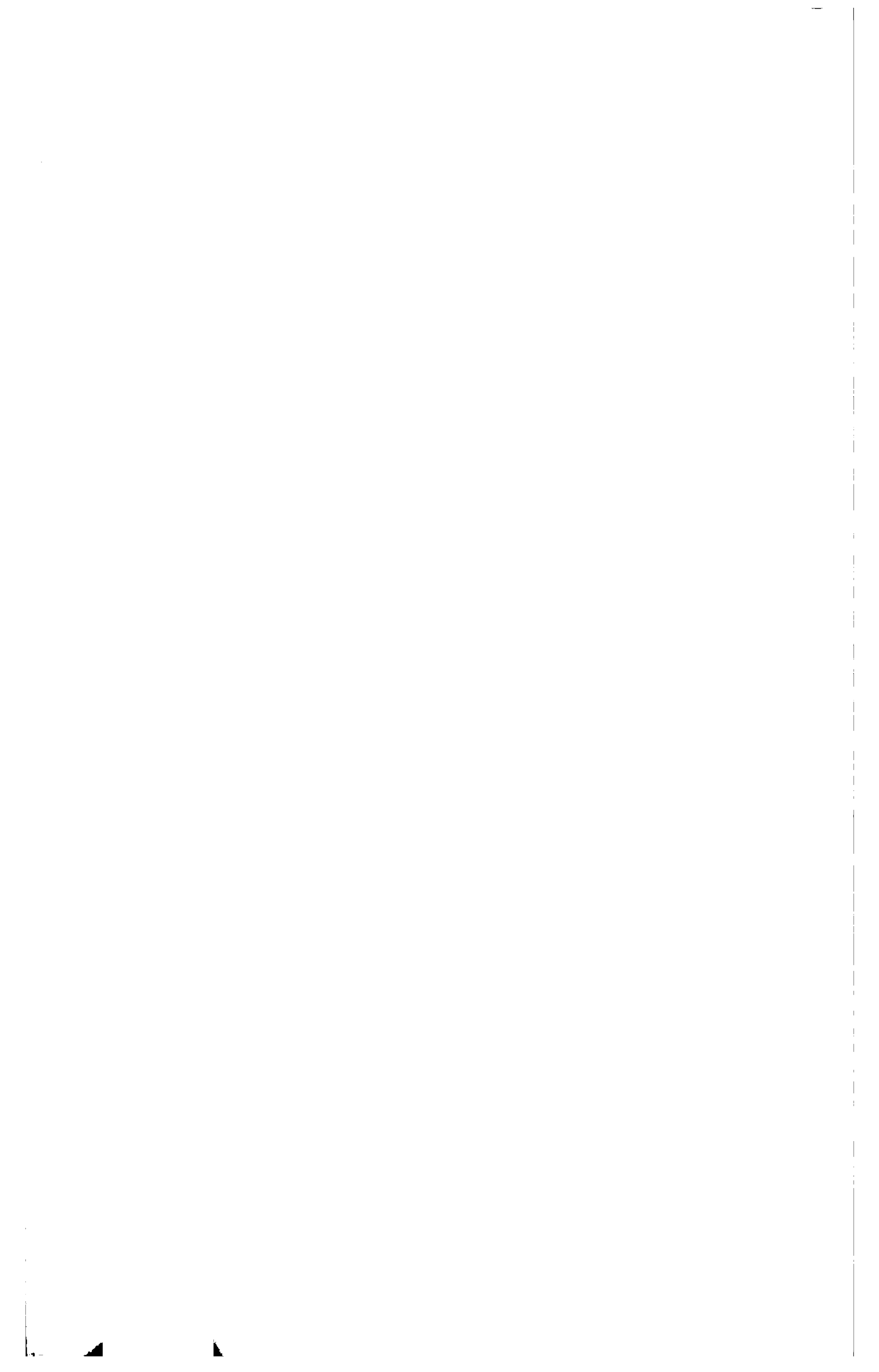
Die reiche Beimengung an organischer Substanz muss aus der Tiefe stammen, da sie mit den thermalen Bestandtheilen ab- und zunimmt. Sie verweist wohl auf eines der oligocänen Kohlenlager oder auf bituminöse Schichten, aus denen auch der reichlich vorhandene Kohlenwasserstoff hervorgehen wird.

Einige Jahre später hat Max Pettenkofer nochmals dieses Quellwasser analysirt (Chem. Untersuchung der Adelheidquelle zu Heilbrunn in Abhandl. Akad. Wiss. München Bd. 6 S. 83) und ist dabei im Allgemeinen zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie Buchner gelangt. Bemerkenswerth ist jedoch, dass er 0.048 Bromnatrium fand in Folge von Anwendung einer anderen analytischen Methode. Dadurch vergrössert sich der Unterschied mit den Tölzer Quellen noch um ein Erhebliches.

An freier Kohlensäure wies er 0.0546 °/₀₀ nach und in den aus der Quelle aufsteigenden Gasen fand er auf 100 Theile: 75.5 Kohlenwasserstoff, 18.0 Stickstoff, 4.3 Kohlensäure und 2.2 Sauerstoff.

Auf 1000 Theile:	Bernhardsquelle				Johann Georgenquelle			
	Fresenius 1852	Wittstein 1852	C. Buchner 1890	Hobein 1892	Fresenius 1852	Wittstein 1852	C. Buchner 1890	Hobein 1892
Jodnatrium	0.0016	0.0016	0.0005	0.0006	0.0015	0.0017	0.0007	0.001[illegible]
Chlornatrium	0.2966	0.2655	0.2110	0.1487	0.2343	0.2371	0.2603	0.278[illegible]
dopp. kohlens. Natrium	0.3345	0.2957	0.3354	0.2076	0.3233	0.3846	0.3992	0.4441
Kieselsäure	0.0098	0.0074	0.0091	0.0053	0.0090	0.0086	0.0062	0.00[illegible]
Schwefelsaures Kalium	0.0097	0.0117	0.0082	0.0072	0.0123	0.0117	0.0099	0.0067
Schwefelsaures Natrium	0.0051	0.0126	0.0049	0.0156	0.0123	0.0152	0.0141	0.0073
dopp. kohlens. Calcium	0.1018	0.1135	0.1021	0.2022	0.0915	0.0711	0.0692	0.0730
„ Magnesium	0.0297	0.0276	0.0215	0.0409	0.0298	0.0202	0.0184	0.032[illegible]
„ Eisenoxydul	0.0002	„	0.0002	0.0006	0.0002	„	„	0.0010
Summa	0.7890	0.7356	0.6929	0.6287	0.7142	0.7502	0.7780	0.8517
Schwefelwasserstoff	0.0017	?	?	0.0022	0.0012	?	?	0.0025
freie Kohlensäure	0.0142	?	?	0.1393	0.0196	?	?	0.1170
Bestandtheile 1—4	0.6425	0.5702	0.5560	0.3622	0.5681	0.6320	0.6664	0.7314
Sulfate 5—6	0.0148	0.0243	0.0131	0.0228	0.0246	0.0269	0.0240	0.0140
Carbonate 7—9	0.1317	0.1411	0.1238	0.2437	0.1215	0.0913	0.0876	0.1063

Neue Quelle	Karlsquellen		Maxquelle		Marien-quelle	Annaquelle		
Hobein	C. Buchner	Hobein	C. Buchner	Hobein	C. Buchner	L. A. Buchner	C. Buchner	
1900	1890	1892	1890	1892	1890	1857	1890 [1] Hobein 1892	
0.0012	0.0001	0.0005	0.0001	0.0001	0.0001	0.0011	0.0001	Na J
0.2840	0.0994	0.1562	0.0702	0.0435	0.1023	0.0302	0.0374	Na Cl
0.4083	0.2096	0.2209	0.2071	0.1191	0.1760	0.1945	0.2100	$Na\,HCO_3$
0.0089	0.0042	„	0.0037	?	0.0001	0.0075	0.0071	$Si\,O_2$
0.0184	0.0166	„	0.0032	?	0.0210	0.0217	0.0214	$K_2\,SO_4$
0.0043	0.0249	0.0314	0.0201	0.0297	0.0110	0.2933	0.2754	$Na_2\,SO_4$
0.0967	0.2020	?	0.2693	?	0.1870	0.2496	0.3238	$Ca\,H_2\,(CO_3)_2$
0.0503	0.0391	„	0.0571	0.0491	0.0490	0.2397	0.2760	$Mg\,H_2\,(CO_3)_2$
0.0002	„	„	„	?	„	„	„	$Fe\,H_2\,(CO_3)_2$
0.8493	0.5959		0.6308		0.5465	1.0376	1.1512	Summa
0.0014	?	0.0024	?	0.0021	?	0.0101	0.0050 [1]	$H_2\,S$
0.0293	?	0.1511	?	0.1429	?	0.0830	0.0888 [1]	CO_2
0.6994	0.3133		0.2811		0.2785	0.2333	0.2556	Kochsalzgruppe
0.0227	0.0415		0.0233		0.0320	0.3150	0.2968	Schwefelgruppe
0.1272	0.2411		0.3264		0.2360	0.4893	0.5998	Kalkgruppe



Bemerkungen über die Principien der Mechanik.

Von A. Voss in Würzburg.

(Eingelaufen 4. Mai.)

I.

Ueber die energetische Begründung der Mechanik.

Bei der ausserordentlichen Wichtigkeit des Energieprincipes für alle Fragen der physikalischen Mechanik kann es nicht Wunder nehmen, dass man versucht hat, aus demselben auch die Grundlagen der theoretischen Mechanik selbst herzuleiten. Bei allen diesen Versuchen wird es sich darum handeln, das D'Alembert'sche Princip oder irgend eine demselben äquivalente Form der Bewegungsgleichungen aus dem Energieprincip zu gewinnen.

Für diejenige Auffassung der Mechanik, welche nur von den Coordinaten der Puncte abhängige conservative Kräfte kennt, dagegen von Bedingungen völlig absieht, wie sie z. B. Boussinesq[1]) in seinen Leçons entwickelt, hat dies keine Schwierigkeit. Aus der Gleichung

$$E = T + V = C,$$

wo V die nur von den Coordinaten x, y, z abhängige potentielle, T die kinetische Energie ist, erhält man durch Differentiation nach der Zeit t

[1]) J. Boussinesq, Recherches sur les principes de la mécanique, Journ. de Math. (2) 18, p. 315, 1873; Leçons synthétiques de mécanique générale, Paris 1889, p. 23.

$$1)\quad \Sigma\, m(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' + \frac{\partial V}{\partial z}z'\right) = 0.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass die mit den Massen multiplicirten Beschleunigungen völlig unabhängig sind von den Geschwindigkeiten und der Constanten C, so folgt aus 1)

$$m\,x_i'' + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad m\,y_i'' + \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0, \quad m\,z_i'' + \frac{\partial V}{\partial z_i} = 0.$$

Dieser Schluss lässt sich aber schon dann nicht mehr anwenden, wenn Bedingungen zwischen den Coordinaten angenommen werden, da in diesem Falle die $m\,x''$ etc. thatsächlich von den Geschwindigkeiten abhängig werden.[1]

Herr Helm[2]) suchte daher den Variationsprocess zu Hülfe zu nehmen und gab dem Grundprincip der Energetik die Form: die Aenderung der Energie $E = T + V$ nach jeder möglichen Richtung ist gleich Null. Jedenfalls wird man dabei aber verlangen müssen, dass der Begriff dieser Aenderung in Bezug auf beide Theile der Energie in übereinstimmender Weise eingeführt wird. Wird nun E nach irgend einer Richtung variirt, so hat man an Stelle von x, y, z Grössen $x + \varepsilon\,\xi$, $y + \varepsilon\,\eta$, $z + \varepsilon\,\zeta$ zu setzen, wo ξ, η, ζ willkürliche Functionen von t, und ε eine gegen Null convergirende Constante ist; unter der Variation δA eines Ausdruckes A ist dann der Coefficient von ε in der Entwickelung von A nach Potenzen der ε zu verstehen.

Dabei ist in der That

$$\delta V = \Sigma\, \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

aber für δT findet man den Werth

---

[1]) Siehe die Bemerkung von R. Lipschitz zu Helmholtz' Erhaltung der Kraft, Ostwald's Klassiker-Bibliothek Nr. 1, p. 55, desgl. L. Boltzmann, Ein Wort der Mathematik an die Energetik, Wiedem. Ann. 57, p. 39, 1896.

[2]) Vgl. namentlich G. Helm, die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwickelung, Leipzig 1898, p. 220 ff.

$$\delta T = \frac{d}{dt} \sum m (x' \xi + y' \eta + z' \zeta) - \sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

und dieser Ausdruck ist keineswegs gleich

$$\sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

was erforderlich ist, wenn man die Identität dieses Principes mit dem d'Alembert'schen behaupten will. Da die über die Ableitung der Bewegungsgleichungen zwischen Boltzmann und Helm entstandene Discussion zu keinem völlig abschliessenden Ergebniss geführt hat,[1]) ist es doch vielleicht nicht überflüssig, diese einfachen Verhältnisse hier ausführlich auseinanderzusetzen, um so mehr als Herr Helm in seiner Energetik mit besonderem Nachdrucke seine Auffassung aufs neue hervorgehoben hat, und dieselbe seitdem auch von andern angenommen ist.[2])

Auf das von den Herren Planck[3]) und Boltzmann in ähnlicher Absicht ausgesprochene Princip der Superposition der Energie glaube ich hier nicht weiter eingehen zu sollen; dasselbe ist in der That nichts anderes als eine willkürlich gewählte Vorstellung, durch die die Identität mit dem d'Alembert'schen Princip erzwungen wird. Dagegen hat Herr Schütz,[4]) um den Helm'schen Variationsprocess zu vermeiden, ein Princip der absoluten Energieerhaltung aufgestellt. Dasselbe leistet allerdings für einen materiellen Punct das

---

[1]) Vgl. G. Helm, Zur Energetik, Wiedemanns Ann. 57, p. 646; L. Boltzmann ibid. 58, p. 595, (1896).

[2]) Vgl. P. Gruner, die neueren Ansichten über Materie und Energie, Mitth. d. naturf. Ges. zu Bern, 1897.

[3]) M. Planck, das Princip der Erhaltung der Energie, Leipz. 1887, p. 148; L. Boltzmann, Wiedem. Ann. 57, p. 39 ff. Vgl. auch die Mittheilung von C. Neumann in Helm's Energetik, p. 229.

[4]) J. Schütz, das Princip der absoluten Erhaltung der Energie, Gött. Nachr. 1897, p. 110. Eine von Herrn E. Padova ausgeführte Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Energiesatze (Sulle equazioni della dinamica, Atti Ist. Veneto (7), 5, p. 1641 (1893)) ist mir hinsichtlich der in derselben gemachten Voraussetzungen nicht recht verständlich geworden.

gewünschte, lässt aber keine Erweiterung auf ein System zu und dürfte auch an und für sich mit der Vorstellung von der Relativität aller Bewegungszustände unvereinbar sein.

Durch einen allgemeineren Variationsprocess kann man indessen die vorhin bemerkte Unrichtigkeit beseitigen. Variirt man nämlich neben den Coordinaten x, y, z auch die Zeit, so dass x, y, z, t in $x + \varepsilon\,\xi$, $y + \varepsilon\,\eta$, $z + \varepsilon\,\zeta$, $t + \varepsilon\,\tau$ übergehen, wo ξ, η, ζ, τ willkürliche Functionen von t sind, so wird x' übergehen in

$$\frac{x' + \varepsilon\,\xi'}{1 + \varepsilon\,\tau'} = x' + \varepsilon\,(\xi' - \tau' x') + \dots$$

und hieraus ergiebt sich

$$\delta(T+V) = \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x} + m x''\right)\xi + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + m y''\right)\eta + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + m z''\right)\zeta$$

$$+ \frac{d}{dt}\Sigma m(x'\xi + y'\eta + z'\zeta) - 2\Sigma m(\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'') - 2\tau' T.$$

Nunmehr steht es frei, τ' so zu wählen, dass die rechte Seite sich auf die d'Alembert'sche Formel reducirt, und dies ist auch immer möglich, da T nicht verschwindet. Auf diesem Wege wird daher der gewünschte Erfolg erreicht; man wird aber in einer so willkürlichen Darstellung kaum etwas anderes als einen abstracten Formalismus erkennen können. Da auch das Ostwald'sche Princip des Maximums des Energieumsatzes nur für den Fall relativer Ruhe benutzt werden kann, dagegen im allgemeinen durch eine ganz andere Betrachtung ersetzt werden muss,[1]) so scheinen die bisher gemachten Versuche nicht die Möglichkeit zu einer ungezwungenen Ableitung des Princips von d'Alembert oder von Gauss aus dem Energiesatze zu bieten.

---

[1]) Vgl. A. Voss, Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik, diese Sitzungsber. 1901, p. 53.

II.

Ueber das Hamilton'sche Princip.

Es ist in Nr. 1 darauf hingewiesen, dass man durch einen so verallgemeinerten Variationsprocess jede beliebige Relation für die variirten Grössen hervorrufen kann. Solche allgemeine Variationen sind es, welche Herr Hölder[1]) benutzt hat, um die Principe von Hamilton und Maupertuis als völlig äquivalent mit dem d'Alembert'schen Princip nachzuweisen. Diese Auffassung lässt sich aber durch den folgenden Satz noch in weit allgemeinerer Form aussprechen.

Unter Voraussetzung eines geeigneten Variationsprocesses ist vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung die Variation des Integrals

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U)\, dt$$

wo α, β zwei im allgemeinen völlig willkürliche Constanten sind, gleich Null, und umgekehrt führt die Forderung, dass δJ in Rücksicht auf alle zulässigen virtuellen Verschiebungen verschwinde, auf die Differentialgleichungen der Bewegung.[2])

Gewöhnlich fügt man noch die Bedingung hinzu, dass die Variationen der Coordinaten $x\, y\, z$ für die Grenzen des Integrals verschwinden sollen. Im Interesse einer mechanischen Deutung kann dies allerdings liegen; an sich aber ist diese weitere Bedingung im allgemeinen überflüssig und unwesentlich.

Dabei möge zunächst unter δU die virtuelle Arbeit der Kräfte $\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{z}$ bei der den ξ, η, ζ entsprechenden Verschiebung verstanden, also

---

[1]) O. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis, Gött. Nachrichten 1896, Heft 2.

[2]) Selbstverständlich kann man an Stelle der Function unter dem Integralzeichen auch jede beliebige Function der x, y, z; x', y', z' nehmen; die lineare Function von U und T führt aber auf die für mechanische Gesichtspuncte wesentlichen Formen.

$$\delta U = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

gesetzt werden.

Um nun das Integral[1])

$$I' = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)\, dt$$

zu variiren, kann man dasselbe durch die Substitution[2])

$$t = ku + k_0$$

wo

$$k = \frac{t_1 - t_0}{1 - t_0}, \quad k_0 = t_0 \frac{1 - t_1}{1 - t_0}$$

auf das Integral zwischen constanten Grenzen 0 und 1

$$I' = \int_0^1 F\left(x, \frac{dx}{k\,du}, ku + k_0\right) k\, du$$

zurückführen. Lässt man dann x, y, z, u übergehen in $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, $u + \varepsilon v$, so ist kv die willkürliche Function, welche in Nr. 1 mit τ bezeichnet wurde; zugleich wird $\frac{dx}{k\,du}$ übergehen in

$$x' + \varepsilon \frac{((\xi') - (x')(v'))}{k} + \ldots\,^{3})$$

Man erhält daher

$$\delta I' = \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial x'}\left(\frac{(\xi') - (x')(v')}{k}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} kv + F(v')\right] k\, du,$$

was vermöge der Identitäten

---

[1]) Alle Differentialquotienten nach t sind der Kürze halber durch Striche bezeichnet, so dass $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{dx^2}{dt^2}$ ist.

[2]) Ist $t_0 = 1$, so vertausche man t_1 mit t_0, oder setze

$$t = u(1 - t_1) + t_1.$$

[3]) Die eingeklammerten ξ', x', v' bedeuten hier die Differentialquotienten nach u.

$$\frac{(\xi')}{k} = \frac{d\xi}{k\,du} = \frac{d\xi}{dt} = \xi'.$$

$$\frac{(x')}{k} = \frac{dx}{k\,du} = x'$$

$$(v') = \frac{dv}{du} = \frac{k\,dv}{k\,du} = \frac{d\tau}{dt} = \tau'$$

wieder übergeht in

$$\text{A)} \quad \delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial x'}(\xi' - x'\tau') + \frac{\partial F}{\partial t}\tau + F\tau'\right] dt.$$

Selbstverständlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus dem Begriffe der Variation entnehmen;[1]) in Rücksicht auf die Missverständnisse, denen die Vorstellung der Variation bei der Benutzung des δ Zeichens ausgesetzt ist, scheint mir die obige wenn auch umständliche Betrachtung für ganz elementare Zwecke nicht unzweckmässig zu sein. Wird die Formel A) durch die partielle Integrationsmethode in bekannter Weise ausgeführt, so entsteht die gebräuchliche Formel:[2])

$$\delta I = \left|\frac{\partial F}{\partial x'}(\xi - x'\tau) + F\tau\right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}\right)(\xi - \tau x')\,dt.$$

Ich betrachte nun das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U)\,dt$$

und setze zur Abkürzung

$$V = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

d. h. gleich der virtuellen Arbeit der gegebenen Kräfte,

$$S = \sum m(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)$$

d. h. gleich dem virtuellen Moment der Bewegungsgrössen

---

[1]) So Hölder a. a. O. § 2, Anmerk.

[2]) In dieser Gestalt wird sie z. B. bei Routh vorausgesetzt, Dynamik starrer Körper, übers. von A. Schepp, Bd. 2, p. 327.

$$W = \sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

d. h. gleich dem **virtuellen Moment der mit den Massen multiplicirten Beschleunigungen.** Alsdann ergiebt sich

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - a T) \tau' + a S' - a W + \beta V] dt$$

oder

I) $$\delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - a T) \tau' + (\beta - a) W + a S'] dt.$$

II) $$\delta J = a \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - a T) \tau' + (\beta - a) V + a S'] dt.$$

Wählt man daher die willkürliche Function τ so, dass der zweite Integraltheil in den Formeln I), II) verschwindet, so wird

$$\delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt$$

$$\delta J = a \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt$$

d. h. **die Forderung $\delta J = 0$ wird vollständig äquivalent mit dem d'Alembert'schen Princip.** Je nach der Wahl der Constanten a, β ergeben sich nun verschiedene **besondere Formen des allgemeinen Variationsprincipes.**

Erstens. Setzt man $a = \beta$, so erfordert die Bedingung nach I)

$$(U - T) \tau' + S' = 0$$

d. h., wenn der Theil S' wie gewöhnlich durch Integration beseitigt, und die Variationen der x, y, z an den Grenzen gleich Null genommen werden, $\tau = \text{const}$ resp. $= 0$.[1]) Ist insbeson-

[1]) Durch die Verfügung über die Variationen an den Grenzen wird hier erreicht, dass das Princip **ausnahmslos**, d. h. auch dann anwendbar bleibt, wenn $U - T$ innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet.

dere $U - T = \text{const} = h$, so kann man auch $\tau h + S = 0$ setzen. Dies ist das Hamilton'sche Princip.

Zweitens. Wird $\beta = 0$ genommen und setzt man jetzt nach II)

$$T\tau' + V + S' = 0,$$

so hat man die erweiterte Form des Princips der kleinsten Action;[1]) da T nicht Null ist, so ist diese Bestimmungsweise für τ immer möglich, was hier besonders hervorgehoben sein möge.

Drittens. Nimmt man dagegen $\alpha = 0$, so ist nach I) zu setzen

$$U\tau' + W = 0,$$

wobei eine etwaige Verfügung über die Variationen an den Grenzen zu weiterer Vereinfachung ganz überflüssig wird; doch muss hier vorausgesetzt werden, dass U innerhalb der Grenzen des Integrales nicht verschwindet.[2]) Unter diesen Umständen führt also auch der Ausdruck

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} U\,dt = 0$$

auf die Differentialgleichungen der Bewegung.

Viertens. Endlich erhält man für $\beta = -\alpha$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E\,dt = 0$$

mit der Bedingung $(T + U)\tau' + 2V - S' = 0$.

Nur in den beiden ersten Fällen entsteht eine allgemein brauchbare Form des Principes. In den beiden letzten sowie auch im allgemeinen Falle wird schon das Auftreten des symbolischen Ausdruckes U hinderlich, selbst wenn man davon

---

[1]) So bei Hölder a. a. O. § 2.

[2]) Eine ähnliche Voraussetzung wird natürlich immer eintreten müssen, wenn man (vgl. Anmerkung 2 S. 171) unter dem Integralzeichen eine beliebige Function nimmt; beim Princip der kleinsten Action und dem Hamilton'schen Princip ist sie von selbst erfüllt.

absieht, dass $\alpha T - \beta U$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwinden darf, was bei beliebigen Werthen der α, β allerdings unmöglich ist. Man kann indess bei einem so allgemeinen Variationsbegriff den symbolischen Ausdruck U völlig vermeiden.

Variirt man nämlich den Ausdruck

$$A = \int_{t_0}^{t} \Sigma (X x' + Y y' + Z z')\, d t,$$

welcher die totale Arbeit darstellt, die von t_0 bis zur variabelen Zeit t von den wirkenden Kräften geleistet wurde, nach der Formel A), so ergiebt sich

$$\text{B)} \qquad \delta A = V - V_0 + \int_{t_0}^{t} \Sigma (Z)\, d t,$$

wo

$$Z = \left[y' \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) + z' \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) - \frac{\partial X}{\partial t} \right] (\xi - \tau x')$$
$$+ \left[z' \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + x' \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \frac{\partial Y}{\partial t} \right] (\eta - \tau y')$$
$$+ \left[x' \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + y' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) - \frac{\partial Z}{\partial t} \right] (\zeta - \tau z')$$

ist, und man hat sich nur vorzustellen, dass die willkürliche Function τ derjenigen Bedingung unterworfen wird, welche entsteht, wenn an Stelle der früheren Gleichung $\delta U = V$ die nicht symbolische B) bei der Variation des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A)\, d t$$

benutzt wird.

Berücksichtigt man, dass das d'Alembert'sche Princip in den Formen

$$\delta \int (T + A)\, d t = 0, \quad \delta \int T\, d t = 0, \quad \delta \int U\, d t = 0, \quad \delta \int E\, d t$$
$$\delta \int (\alpha T + \beta A)\, d t = 0$$

ausgesprochen werden kann, so erweist sich dieses Variations-

princip in seiner allgemeinen Form als eine völlig conventionelle Regel, die mit besonderen dem eigentlichen Gebiet mechanischer Grundanschauungen angehörigen Vorstellungen gar nichts mehr zu thun hat, sondern einzig und allein zu dem Zwecke ersonnen wird, die Differentialgleichungen der Bewegung in einer möglichst condensirten Form auszusprechen. Ich halte es nicht für überflüssig, diese an sich sehr selbstverständliche Bemerkung, welche ich schon bei einer früheren Gelegenheit gemacht habe,[1]) hier aufs neue zu wiederholen, da über die principielle Auffassung des Hamilton'schen Princips auch gegenwärtig noch sehr verschiedenartige Ansichten verbreitet erscheinen. Vom abstracten Standpuncte aus könnte man sich sogar veranlasst sehen, der besonderen Form des Principes, welches das Energieintegral $\int E\,dt$ benutzt, den Vorzug zu geben. Indessen scheint es zweifellos, dass das eigentliche Hamilton'sche Integral sich durch Einfachheit und allgemeine Gültigkeit zugleich empfiehlt; daher ist dasselbe auch von v. Helmholtz bei allen seinen Untersuchungen (unter dem Namen des Principes der kleinsten Wirkung) als heuristisches Grundprincip zur Anwendung gebracht.

III.

Ueber das Princip des kleinsten Zwanges.

Bezeichnet man die Coordinaten der Puncte eines materiellen Systems unterschiedslos durch x_i [2]), so ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i x_i'^2.$$

Werden nun an Stelle der x_i ebensoviel neue Variabele y_i, welche von einander unabhängige Functionen der x_i sind, die überdies die Zeit t enthalten können, eingeführt, so ist nach Voraussetzung die Functionaldeterminante

---

[1]) A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. Bd. 25, p. 267 (1884).

[2]) Ueber die Bezeichnung siehe H. Hertz, Ges. Werke III, p. 62.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

nicht Null, also verschwindet auch

$$m_1 \ldots m_n \Delta^2 = A$$

nicht, wo A die aus den Elementen[1])

$$1) \qquad a_{s\sigma} = \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma}$$

gebildete Determinante der definiten positiven quadratischen Form

$$\sum a_{s\sigma} u_s u_\sigma = \sum m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_s} u_s\right)^2$$

ist. Bezeichnet man mit $A_{s\sigma}$ die durch A dividirten Unterdeterminanten dieser Elemente 1), so ist

$$\sum A_{s\tau} a_{s\sigma} = (\sigma \tau),$$

falls $(\sigma \tau)$ das bekannte Zeichen bedeutet. Da aber auch

$$\sum \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = (\sigma \tau)$$

ist, so folgt

$$\sum \left(A_{s\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} m_i - \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = 0$$

oder, wegen $\Delta \neq 0$ [2])

$$2) \qquad \sum A_{s\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} m_i = \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i}.$$

---

[1]) In allen Fällen, wo über die Summation nichts weiter bemerkt ist, hat sich dieselbe über sämmtliche mehrfach vorkommende Indices s, σ, τ .. von 1 bis $3n$ zu erstrecken.

[2]) In Formel 2) ist die Summation in Bezug auf i selbstverständlich nicht auszuführen.

Setzt man nun die Gleichungen

$$x_i' = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

in den Ausdruck T ein, so folgt

$$T = \tfrac{1}{2} \sum a_{s\sigma} y_s' y_\sigma' + \sum a_s y_s' + a$$

wenn

$$3) \quad \begin{cases} a_s = \sum m_i \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \\ a = \tfrac{1}{2} \sum m_i \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 \end{cases}$$

gesetzt wird; T ist daher eine im allgemeinen nicht homogene Function zweiter Ordnung der y_s'. Zugleich wird

$$4) \quad x_i'' = \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial y_\sigma} y_s' y_\sigma' + 2 \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial t} y_s' + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} y_s'' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}.$$

Wir benutzen die Werthe 4) zur Berechnung des Zwanges Z

$$5) \quad Z = \sum m_i \left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2,$$

wobei unter den X_i die Componenten der wirkenden Kräfte verstanden sind. Durch eine sehr einfache Rechnung findet man aus 4)

$$Z = \sum m_i \Xi_i^2 + \sum A_{s\sigma} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right) \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_\sigma'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\sigma} - Y_\sigma\right)$$
$$- \sum A_{s\sigma} Q_s Q_\sigma,$$

wobei zur Abkürzung

$$Y_s = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s},$$

$$\Xi_i = \sum \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial y_\sigma} y_s' y_\sigma' + 2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial t} y_s' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - \frac{X_i}{m_i}\right),$$

$$Q_s = \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} y_r' y_\sigma' + 2 \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} m_i y_\sigma' + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} m_i - Y_s$$

gesetzt ist, während

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} = \sum a_{sr} y_r'' + \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} y_r' y_\sigma'$$

$$+ 2 \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} y_\sigma' + \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

wird.

Man sieht nun unmittelbar, dass die erste Summe in Z sich gegen die letzte aufhebt. Dazu braucht man nur in

$$W = \sum A_{s\sigma} Q_s Q_\sigma$$

die Q_s wieder durch ihre Werthe zu ersetzen; drückt man auch Y_s wieder durch die X_i aus, so entsteht

$$W = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial y_{s'}} m_i m_j A_{ss'} \Xi_i \Xi_j ,$$

was nach 2) in

$$W = \sum m_j (i\, j)\, \Xi_i \Xi_j = \sum m_i \Xi_i^2$$

übergeht.

Durch Differentiation folgt weiter

$$2 \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} = 2 \begin{bmatrix} r\,\sigma \\ s \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial y_r} + \frac{\partial a_{sr}}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial y_s}$$

$$2 \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} = \begin{bmatrix} s\,\sigma \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial a_s}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial a_\sigma}{\partial y_s}$$

$$\sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} s \end{bmatrix} = \frac{\partial a_s}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial y_s},$$

so dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} = \sum a_{s\sigma} y_\sigma'' + \sum \begin{bmatrix} r\,\sigma \\ s \end{bmatrix} y_r' y_\sigma' + [s\,\sigma]\, y_\sigma' + [s]$$

wird. Hiermit ist der folgende Satz bewiesen.

Ersetzt man die Variabeln x durch ebensoviel neue Variabele y vermöge der von einander in Bezug auf die y unabhängigen Gleichungen

6) $\qquad x_i = f_i(y_1\, y_2 \ldots y_{3n}\, t), \quad y_i = \varphi_i(x_1\, x_2 \ldots x_{3n}\, t),$

so wird der Gauss'sche Zwang Z ausgedrückt durch die zur lebendigen Kraft T covariante Function

$$Z = \sum A_{s\sigma} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right]\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_\sigma'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\sigma} - Y_\sigma\right].$$

Dieselbe ist eine Verallgemeinerung des von Herrn Lipschitz[1]) für den Fall, dass die Functionen f die Zeit nicht enthalten, als Ergebniss seiner allgemeinen Untersuchung über die Transformation homogener Differentialausdrücke hergeleiteten Resultates. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass dasselbe nicht auf den Fall einer homogenen Form T beschränkt sein kann; in diesem Falle dürfte es wohl einfacher sein, das Transformationsresultat direct herzuleiten.

Eine wesentliche Bedingung für dasselbe ist es jedoch, dass die Zahl der Variabeln y ebenso gross ist, wie die der x, denn nur unter dieser Voraussetzung lässt sich die Identität 2), auf der die ganze Rechnung beruht, anwenden.[2])

Man kann nun insbesondere die Variabeln y so wählen,[3]) dass bei einem mechanischen Problem mit k Bedingungsgleichungen

---

[1]) R. Lipschitz, Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges, Journ. f. Math. Bd. 82, p. 328 (1877).

[2]) Herr A. Wassmuth hat (Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik, diese Sitzungsber. 1894, p. 219) die Lipschitz'sche Formel für Z in Anspruch genommen für den Fall, wo die Zahl der Variabeln y auch kleiner ist wie die der x. Dass dies nicht gestattet ist, hätte sich schon daraus ersehen lassen, dass unter diesen Umständen der auch von ihm mit Z bezeichnete Zwang gleich Null wird, was nur bei der freien Bewegung eines Systems eintritt, während doch p. 220 Bedingungsgleichungen vorausgesetzt wurden. Es sind daher auch die im weiteren Verlauf der Arbeit entwickelten Formeln, soweit sie sich nicht auf freie Bewegungen beziehen, durch die weiterhin im Text abgeleiteten zu ersetzen.

Bei Herrn Lipschitz ist übrigens ausdrücklich die ungeänderte Zahl der Variabeln als Bedingung zur Voraussetzung gemacht (a. a. O. p. 316 und 328).

[3]) Selbstverständlich kann man in ebenso einfacher Weise auch nur einen Theil der Bedingungen durch Einführung der allgemeinen Coordinaten beseitigen.

$$\varphi_l(x_1 \ldots x_n t) = 0, \; l = 1, 2 \ldots k$$

die ersten k Functionen y, gleich Null gesetzt, eben diese Bedingungen vorstellen, d. h.

$$y_l = \varphi_l$$

ist, während die $h = 3n - k$ letzten y als allgemeine Coordinaten q_m, $m = 1, \ldots h$ angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung ist dann

$$y_l' = 0, \; y_l'' = 0 \text{ für } l = 1, 2 \ldots k.$$

Soll nun der Zwang Z ein Minimum werden, so erhält man in bekannter Weise mittelst der Lagrange'schen Multiplicationsmethode die Gleichungen

$$\sum A_{s\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right] a_{sl} = \lambda_l.$$

$$\sum A_{s\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right] a_{s\,m+k} = 0.$$

oder:

a) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_l'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_l} - Y_l = \lambda_l, \; l = 1, \ldots k$$

b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_{m+k}'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_{m+k}} - Y_{m+k} = 0, \; m = 1, \ldots h.$$

Die Gleichungen a), welche nur zur Bestimmung der Multiplicatoren λ dienen, kann man ganz fortlassen; die Gleichungen b) liefern die Bewegungsgleichungen, so wie man in denselben

$$y_l = 0 \text{ für } l = 1, \ldots k$$
$$y_{m+k} = q_m \text{ für } m = 1, \ldots h$$

setzt, und für den Zwang Z ergiebt sich der Werth

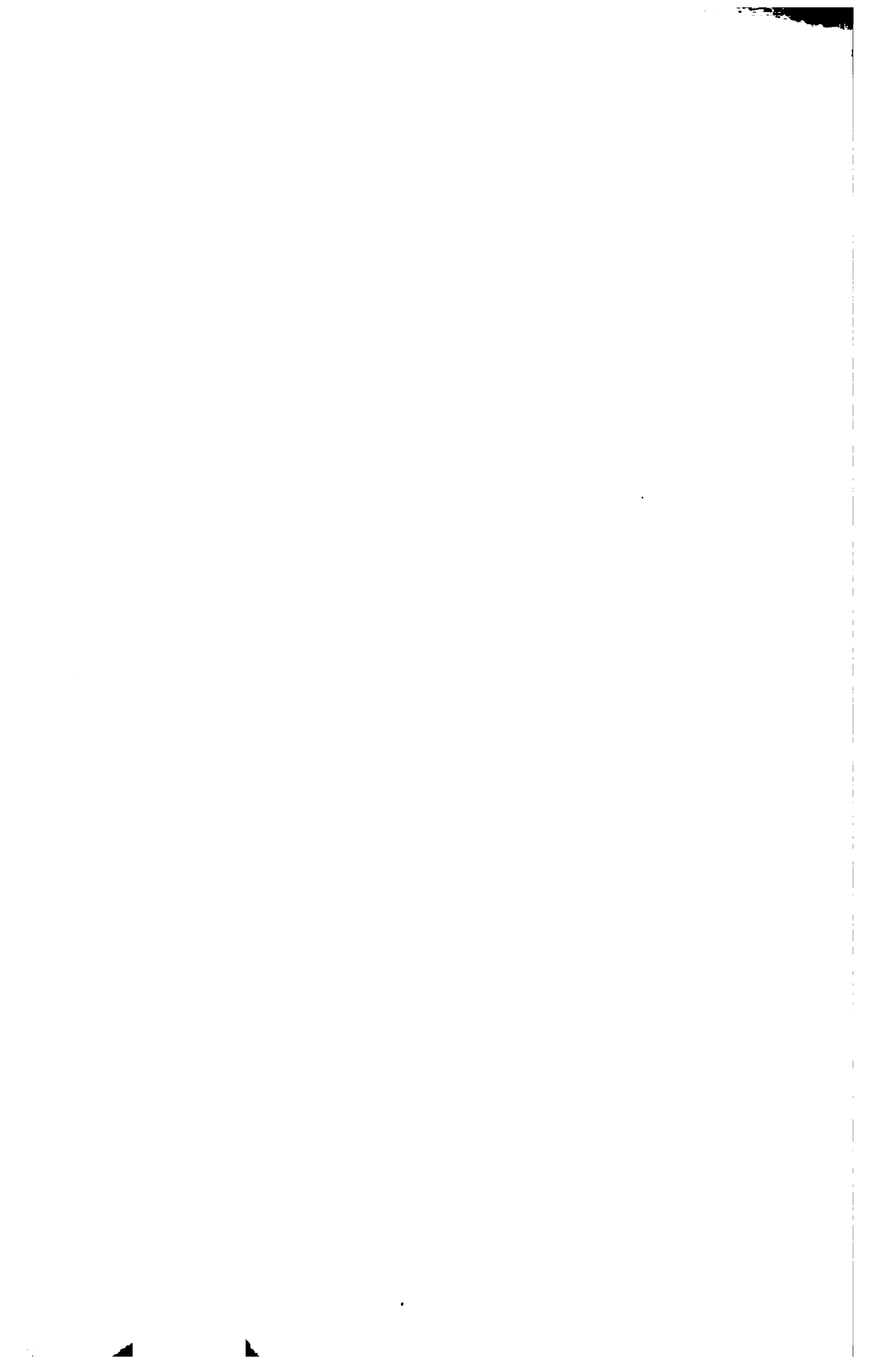
$$Z = \sum A_{ij}\,\lambda_i\,\lambda_j, \; i, j = 1, \ldots k.$$

Sitzung vom 8. Juni 1901.

1. Herr H. Seeliger legt eine Arbeit des correspondirenden Mitgliedes der Classe Herrn Dr. G. Neumayer, Direktor der deutschen Seewarte in Hamburg: „Bestimmungen der Länge des einfachen Sekunden-Pendels auf absolutem Wege, ausgeführt in Melbourne vom Juli bis Oktober 1863“ zur Aufnahme in die Abhandlungen der Classe vor und bespricht deren Inhalt.

2. Herr Ferd. Lindemann macht eine Mittheilung „über den Format'schen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n = y^n + z^n$.“

3. Herr W. v. Dyck erstattet einen Bericht „über eine im Jahre 1832 von dem Mathematiker C. G. J. Jacobi bei Gelegenheit der Uebernahme der ordentlichen Professur in Königsberg gehaltenen Rede.“



Ueber den Fermat'schen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n = y^n + z^n$.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 8. Juni.)

Bekanntlich hat Fermat, ohne einen Beweis anzugeben, den Satz aufgestellt, dass die Gleichung $x^n = y^n + z^n$ nicht durch drei ganze Zahlen x, y, z befriedigt werden könne, sobald die ganze Zahl n grösser als 2 ist. Diese Angabe wird uns in der von Bachet veranstalteten Diophant-Ausgabe [1]) überliefert, in welcher gelegentliche Randbemerkungen aus Fermat's Handexemplare abgedruckt wurden. Die Quaestio VIII im zweiten Buche von Diophant's Arithmetik handelt nemlich von der Aufgabe, ein gegebenes Quadrat in die Summe zweier Quadrate zu zerlegen; und am Schlusse dieser Quaestio findet sich folgender Passus: [2])

„Observatio Domini Petri De Fermat.

„Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum „in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infini-„tum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis

---

[1]) Diophanti Alexandri arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et obversationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae Analyticae inventum novum, collectum ex varijs eiusdem D. de Fermat epistolis. Tolosae, MDCLXX.

[2]) Vgl. auch Oeuvres de Fermat, publiés par Paul Tannery et Charles Henry, 1891, t. I, p. 291.

„fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane „detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“

Für den Fall $n = 3$ betont Fermat seinen Satz auch in einem Briefe an Digby vom 7. April 1658,[1]) in einem andern Briefe vom 15. August 1657 stellt er die Aufgabe eine Zahl x^3 in der Form $y^3 + z^3$ darzustellen.[2])

Für eine gewisse Klasse von Zahlen n (zu welcher z. B. alle Zahlen unter 100 gehören) hat bekanntlich Kummer bei Gelegenheit anderer Untersuchungen den Fermat'schen Satz verificirt.[3]) Einzelne einfache Fälle sind schon vielfach behandelt worden.

Mit x, y, z seien drei ganze positive Zahlen bezeichnet, welche der Grösse nach geordnet sind, so dass:

$$x > y > z. \tag{1}$$

Es bedeute n eine ungerade Primzahl; es ist also

$$n > 2. \tag{2}$$

Wir nehmen an, es bestehe eine Gleichung der Form

$$x^n = y^n + z^n \tag{3}$$

und wollen zeigen, dass diese Annahme zu Widersprüchen

---

[1]) Vergl. Wallis, Opera Mathematica, t. II, p. 844, Oxford 1693.

[2]) Beide Briefe abgedruckt in den Oeuvres de Fermat, t. II, p. 343 ff. und p. 376; vergl. ferner Henry, Recherches sur les manuscripts de Pierre de Fermat, Bulletino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche e fisiche publ. da B. Boncompagni, Bd. XII, 1879, wo insbesondere auch die Frage erörtert wird, ob Fermat im Besitze von Beweisen für seine Sätze war; vergl. dazu Mansion, Nouvelle correspondance de mathématiques t. V.

[3]) Monatsberichte der Berliner Akademie, April 1847 und Crelle's Journal Bd. 45, p. 93, 1847; vergl. dazu Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1894/95, p. 517 ff., wo auch die ältere Litteratur angegeben ist; hinzuzufügen sind die Arbeiten von Genocchi im Bd. 3 und 6 der Annali di matematica und Crelle's Journal Bd. 99, ferner Pepin, Comptes rendus t. 82.

führt. Da gemeinsame Factoren aus dieser Gleichung herausfallen, so können die Zahlen x, y, z jedenfalls als relativ prim zu einander vorausgesetzt werden.

Die Differenz $x^n - y^n$ ist sofort in die Factoren

$$(4)\qquad x - y \text{ und } x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}$$

zerlegbar; es muss deshalb auch die Zahl z in entsprechender Weise in Factoren zerfallen. Ist R ein Factor von z, so müssen die beiden Ausdrücke (4) zusammen den Factor R^n enthalten; es wird also eine Potenz R^{n-i} in der Differenz $x - y$, eine Potenz R^i in dem andern Ausdrucke (4) enthalten sein; eine solche Zahl R werde mit r_i bezeichnet; dann ist

$$(5)\qquad z = r \cdot r_1 \cdot r_2 \dots . r_n,$$

$$(6)\qquad x - y = r^n \cdot r_1^{n-1} \cdot r_2^{n-2} \dots . r_{n-2}^2 \cdot r_{n-1} = r^n \cdot \varrho,$$

$$(7)\qquad x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} = r_1 \cdot r_2^2 \cdot r_3^3 \dots . r_{n-1}^{n-1} \cdot r_n^n.$$

Jede dieser Zahlen r_i kann wieder in verschiedene Primfactoren zerfallen. Für das Folgende sind die Zahlen r und r_n von besonderer Wichtigkeit; beide sind offenbar durch die Gleichungen (5), (6) und (7) eindeutig bestimmt: r_n als derjenige Factor von z, welcher in $x - y$ nicht vorkommt, und r als derjenige Factor von z, welcher in dem Quotienten $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ nicht enthalten ist. Die übrigen Zahlen r_i sind nicht nothwendig eindeutig festgelegt, sind auch für das Folgende von geringerer Bedeutung.

In gleicher Weise kann die Differenz $x - z$ in Factoren zerlegt werden; es ist:

$$(6^a)\qquad x - z = q^n \cdot \varkappa = q^n \cdot q_1^{n-1} \cdot q_2^{n-2} \dots . q_{n-2}^2 \cdot q_{n-1},$$

wo $\varkappa$ keine n^{te} Potenz mehr enthält, ferner

$$(7^a)\qquad x^{n-1} + x^{n-2}z + \dots + z^{n-1} = q_1 \cdot q_2^2 \dots . q_{n-1}^{n-1} \cdot q_n^n,$$

$$(5^a)\qquad y = q \cdot q_1 \dots . q_n.$$

Eine analoge Zerlegung kann auch für die Summe $y+z$ zur Anwendung kommen, so dass:

$$(6^b) \qquad y+z=p^n\cdot\pi=p^n\cdot p_1^{n-1}\cdot p_2^{n-2}\dots\cdot p_{n-2}^2\cdot p_{n-1},$$

$$(7^b) \qquad \begin{aligned} &y^{n-1}-y^{n-2}z+y^{n-3}z^2-\dots+(-1)^{n-1}z^{n-1}\\ &\qquad=p_1\cdot p_2^2\dots\cdot p_{n-1}^{n-1}\cdot p_n^n,\end{aligned}$$

$$(5^b) \qquad x=p\cdot p_1\cdot p_2\dots p_n.$$

Offenbar lässt sich, wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet, die Zahl N_1 so bestimmen, dass die Differenz

$$x^n-y^n-N_1(x-y)^n$$

durch das Product xy theilbar wird; und zwar ergibt sich

$$N_1=1.$$

Ferner kann N_2 so gewählt werden, dass der Ausdruck

$$x^n-y^n-N_1(x-y)^n-N_2\,xy\,(x-y)^{n-2}$$

durch x^2y^2 theilbar wird. Man muss zu dem Zwecke den Factor von $x^{n-1}y$ gleich Null setzen und findet $N_1 n-N_2=0$, oder

$$N_2=n.$$

Der Factor von xy^{n-1} fällt dann von selbst heraus. Um ebenso das Aggregat

$$x^n-y^n-N_1(x-y)^n-N_2\,xy\,(x-y)^{n-2}-N_3\,x^2y^2(x-y)^{n-4}$$

durch x^3y^3 theilbar zu machen, muss man den Factor von $x^{n-2}y^2$ (welcher bis auf das Vorzeichen gleich dem Factor von x^2y^{n-2} ist) zum Verschwinden bringen, d. h. es muss

$$-N_1\binom{n}{2}+N_2(n-2)-N_3=0,$$

also

$$N_3=\frac{n(n-3)}{2}$$

sein. In gleicher Weise wird

$$\begin{aligned} &x^n-y^n-N_1(x-y)^n-N_2\,xy\,(x-y)^{n-2}-N_3\,x^2y^2(x-y)^{n-4}\\ &\qquad-N_4\,x^3y^3(x-y)^{n-6}\end{aligned}$$

durch $x^4 y^4$ theilbar, wenn

$$N_1 \binom{n}{3} - N_2 \binom{n-2}{2} + N_3 (n-4) - N_4 = 0$$

ist, oder:

$$N_4 = \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ebenso kann man weiter schliessen und findet durch ein Recursionsverfahren leicht, dass das Aggregat

$$(8) \qquad \begin{aligned} x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - N_2\, x\, y\, (x-y)^{n-2} \ldots\ldots \\ - N_s\, x^{s-1}\, y^{s-1} (x-y)^{n-2s+2} \end{aligned}$$

durch $x^s y^s$ theilbar ist, wenn

$$(9) \qquad N_s = \frac{n(n-s)(n-s-1)\ldots\ldots(n-2s+4)(n-2s+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (s-1)}$$

gesetzt wird.

Sei nun die Primzahl n gleich $2\nu + 1$, und setzen wir $s = \nu$, so wird

$$(10) \qquad N_\nu = \frac{(2\nu+1)\,\nu\,(\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Es ist also identisch

$$(11) \qquad \begin{aligned} x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - N_2\, x\, y\, (x-y)^{n-2} - \ldots. \\ - N_\nu\, x^{\nu-1}\, y^{\nu-1} (x-y)^3 = N x^\nu y^\nu (x-y), \end{aligned}$$

wo N noch zu bestimmen ist, denn die linke Seite ist theilbar durch $x^\nu y^\nu$ und ist Null für $x = y$. Der Werth von N wird aber durch Fortsetzung derselben Schlussweise gefunden, die wir bisher anwandten, nemlich indem wir verlangen, dass aus dem Ausdrucke

$$x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - \ldots - N_\nu x^{\nu-1} y^{\nu-1} (x-y)^3 - N x^\nu y^\nu (x-y)$$

der Term $x^{\nu+1} y^\nu$ (und folglich auch $x^\nu y^{\nu+1}$) herausfalle; es wird daher

$$(12) \qquad N = N_{\nu+1} = 2\nu + 1 = n.$$

Unter Benutzung von (6) und (7) erhalten wir sonach die Identität:

$$n\,x^{\nu}\,y^{\nu}\,r^{n}\,\varrho = r^{n}\cdot r_1^{n}\ldots\ldots r_n^{n} - \sum_{i=1}^{i=\nu} N_i\,x^{i-1}\,y^{i-1}\,r^{n(n-2i+2)}\,\varrho^{n-2i+2},$$

oder, wenn beiderseits mit $\varrho\,r^{n}$ dividirt wird:

$$(13)\quad n\,x^{\nu}\,y^{\nu} = r_1\cdot r_2^2\,r_3^3\ldots\ldots r_n^{n} - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\,x^{i-1}\,y^{i-1}\,r^{n(n-2i+1)}\,\varrho^{n-2i+1},$$

wobei die Zahlen N_i offenbar sämmtlich ganze Zahlen sind.

Die relativen Primzahlen x und y können wegen (6) mit den Zahlen $r_1, r_2, \ldots\ldots r_{n-1}$ keinen Factor gemein haben. Jedes Glied der rechten Seite von (13) ist durch jede dieser Zahlen theilbar, da mit ϱ die Zahl $r_1^{n-1}\,r_2^{n-2}\ldots\ldots r_{n-1}$ bezeichnet wurde. Soll daher auch die linke Seite durch $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ theilbar sein, so muss die Zahl n diese Factoren enthalten. Nun sollte aber n eine Primzahl bedeuten; also bleiben nur folgende Möglichkeiten:

Entweder es ist

$$(14)\qquad r_1 = n,\; r_2 = r_3 = \ldots\ldots = r_{n-1} = 1,$$

und dann folgt aus (5) und (6)

$$(15)\qquad z = n\cdot r\cdot r_n,\quad x - y = r^{n}\cdot n^{n-1}.$$

Oder es ist

$$(16)\qquad r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_{n-1} = 1,$$

und dann folgt

$$(17)\qquad z = r\cdot r_n,\quad x - y = r^{n}.$$

Eine andere Möglichkeit bleibt nicht offen, denn von den Zahlen $r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$ kann keine gleich n sein; es wäre nemlich dann die rechte Seite von (13) mindestens durch n^2 theilbar, folglich auch die linke Seite; d. h. es müsste x oder y durch n theilbar sein; dann aber wären nach (6) beide Zahlen durch n theilbar, während sie doch als relative Primzahlen vorausgesetzt sind. Die Zahl r_n bleibt zunächst beliebig.

Da die Gleichung (11), wenn N durch (12) bestimmt wird, eine Identität ist, können wir in ihr y durch z ersetzen und

erhalten so in Rücksicht auf (6^a) und (7^a) an Stelle von (13) die Beziehung:

$$(13^a)\ n\,x^\nu z^\nu = q_1 \cdot q_2^2 \ldots . q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)} \varkappa^{n-2i+1},$$

auf welche wir die gleichen Ueberlegungen anwenden können. Es ist also entweder

$$(15^a)\qquad y = n \cdot q \cdot q_n, \quad x - z = q^n \cdot n^{n-1},$$

oder:

$$(17^a)\qquad y = q \cdot q_n, \quad x - z = q^n.$$

Endlich können wir in der Identität (11) auch x durch y und y durch $-z$ ersetzen; dann ergibt sich mit Rücksicht auf (6^b) und (7^b):

$$(13^b)\quad \begin{aligned} &(-1)^\nu n\,y^\nu z^\nu = p_1 p_2^2 \ldots . p_n^n \\ &- \sum_{i=1}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)} \pi^{n-2i+1}; \end{aligned}$$

und die nochmalige Wiederholung der gleichen Schlussweise führt zu dem Resultate, dass entweder:

$$(15^b)\qquad x = n \cdot p \cdot p_n, \quad y + z = p^n \cdot n^{n-1}$$

oder

$$(17^b)\qquad x = p \cdot p_n, \quad y + z = p^n$$

sein muss.

Da x, y, z keinen gemeinsamen Factor enthalten sollen, so ergibt die Combination der Gleichungen (15), (17), (15^a), (17^a), (15^b), (17^b), dass nur drei Fälle noch näher zu untersuchen sind. Die Annahme (15) nemlich ist mit (15^a) oder (15^b) nicht vereinbar, so dass aus der Annahme (15) nothwendig die Gleichungen (17^a) und (17^b) folgen. Gehen wir aber von (17) aus, so kann sowohl (15^a) als (15^b) möglich sein. Betrachten wir diejenigen Möglichkeiten als gleichwerthig, die durch Vertauschung von y mit z aus einander hervorgehen, so bleiben die folgenden drei Fälle:

I) $$x - y = r^n \cdot n^{n-1}, \qquad z = n \cdot r \cdot r_n,$$
$$x - z = q^n, \qquad y = q \cdot q_n,$$
$$y + z = p^n, \qquad x = p \cdot p_n;$$

II) $$x - y = r^n, \qquad z = r \cdot r_n,$$
$$x - z = q^n, \qquad y = q \cdot q_n,$$
$$y + z = p^n \cdot n^{n-1}, \qquad x = n \cdot p \cdot p_n;$$

III) $$x - y = r^n, \qquad z = r \cdot r_n,$$
$$x - z = q^n, \qquad y = q \cdot q_n,$$
$$y + z = p^n, \qquad x = p \cdot p_n.$$

Hieraus folgt im Falle I):

$$x = \frac{p^n + q^n + n^{n-1} r^n}{2},$$

im Falle II):

$$x = \frac{r^n + q^n + n^{n-1} p^n}{2}$$

und im Falle III):

$$x = \frac{p^n + q^n + r^n}{2}.$$

Dass x sich durch drei Zahlen p, q, r in einer dieser Formen darstellen lassen müsse, hat schon Abel ohne Mittheilung eines Beweises angegeben.[1]) Er erwähnt ausserdem noch die Möglichkeit

$$x = \frac{p^n + n^{n-1}(q^n + r^n)}{2},$$

welche bei uns ausgeschlossen ist.

Wir machen zuerst die Annahme I). Die Gleichung (13^a) wird hier

$$n\, x^\nu z^\nu = q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}. \tag{18}$$

Alle Zahlen N_i mit Ausnahme von $N_1 = 1$ sind durch n theilbar; auch z ist durch n theilbar; vom dritten Gliede ab

---

[1]) Lettre à Holmboe vom 3. August 1823, Oeuvres t. II, p. 255.

sind also alle Terme der rechten Seite durch n^2 theilbar. Die linke Seite ist mindestens durch $n^{\nu+1}$ theilbar; folglich ist auch

$$q_n^n - q^{n(n-1)} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2. \tag{19}$$

Nach dem Fermat'schen Satze ist

$$q^{n(n-1)} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2, \tag{20}$$

denn q kann, da y zu z relativ prim ist, nicht durch n theilbar sein. Es ergibt sich

$$q_n^n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2,$$

und da identisch $q_n^n \equiv q_n$ mod. n ist

$$q_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n. \tag{21}$$

Ebenso folgt aus (13^b):

$$(-1)^\nu n y^\nu z^\nu = p_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}, \tag{22}$$

und die Anwendung derselben Schlussweise führt zu der Congruenz

$$p_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n. \tag{23}$$

Folglich ist auch

$$\begin{aligned} x &= p \cdot p_n \equiv p \quad \text{mod. } n, \\ y &= q \cdot q_n \equiv q \quad \;\;\text{"} \quad n. \end{aligned} \tag{24}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} x - y &= p\,p_n - q\,q_n \equiv p - q \quad \text{mod. } n \\ &= r^n \cdot n^{n-1} \quad \equiv 0 \qquad\quad \text{"} \quad n, \end{aligned}$$

also auch:

$$p^n \equiv q^n \quad \text{mod. } n^2. \tag{25}$$

Weiter folgt aus den Gleichungen I):

$$2z = p^n - q^n + r^n \cdot n^{n-1}, \tag{26}$$

also nach (25), da $n > 2$:

$$2z \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2. \tag{27}$$

Es wäre also z nicht nur durch n, sondern durch n^2 theilbar, d. h. eine der beiden Zahlen r oder r_n müsste den Factor n enthalten.

Setzen wir die der Annahme I) entsprechenden, in (14) und (15) gegebenen Werthe der Zahlen r_i in (13) ein, so ergibt sich:

$$n\, x^\nu y^\nu = n\, r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1}\, y^{i-1}\, r^{n(n-2i+1)}\, n^{(n-1)(n-2i+1)},$$

und nach Division mit n:

$$\begin{aligned} x^\nu y^\nu &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1}\, y^{i-1}\, r^{n(n-2i+1)}\, n^{n^2-2in+2i-2} \\ (28) \qquad &= r_n^n - r^{n(n-1)}\, n^{n(n-2)} - x\, y\, r^{n(n-3)}\, n^{n^2-4n+3} - \ldots\ldots \\ &\quad - \frac{\nu(\nu+1)}{2\cdot 3}\, x^{\nu-1}\, y^{\nu-1}\, r^{2n}\, n^{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Wäre also $r_n \equiv 0$ mod. n, so müsste eine der Zahlen x oder y durch n theilbar sein, was nicht angeht. Es kann also nur r den Factor n enthalten, so dass z mindestens durch n^2 theilbar ist.

Wir wollen allgemein annehmen, dass r durch $n^{\lambda-1}$, also z durch n^λ theilbar sei, wobei also λ mindestens gleich 2 wäre. Durch diese Annahme modificiren sich auch die soeben an die Relation (18) geknüpften Schlüsse. Da jetzt z durch n^λ theilbar ist, ergibt sich nemlich an Stelle von (19):

$$(29) \qquad q_n^n - q^{n(n-1)} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1},$$

also auch

$$q_n \equiv q^{n-1} \qquad \text{mod. } n^\lambda.$$

Ebenso folgt aus (22)

$$p_n \equiv p^{n-1} \qquad \text{mod. } n^\lambda.$$

Ferner mit Hülfe der Gleichungen I)

$$x = p \cdot p_n \equiv p^n \quad \text{mod. } n^\lambda,$$
$$y = q \cdot q_n \equiv q^n \quad \text{,,} \quad n^\lambda.$$

Nun ist nach I)

$$x = q^n + z \equiv q^n \quad \text{mod. } n^\lambda$$
$$= p\,p_n \quad \equiv p^n \quad \text{,,} \quad n^\lambda,$$

also auch

$$(30) \qquad p^n \equiv q^n \qquad \text{mod. } n^\lambda,$$

folglich:

$$p \equiv q \qquad \text{mod. } n^{\lambda-1},$$

$$(30^a) \qquad p^{n^2} - q^{n^2} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1},$$

wobei $\lambda \geqq 2$ ist. Andererseits aus I) und (1):

$$p^{n^2} - q^{n^2} = (y+z)^n - (x-z)^n$$

$$(31) \qquad \equiv n\,z\,(x^{n-1} + y^{n-1}) \quad \text{mod. } n^{2\lambda+1},$$

denn alle anderen Terme der rechten Seite enthalten höhere Potenzen von z, multiplicirt in Binomialcoefficienten des Exponenten n.

Aus den Identitäten (18) und (23) folgt durch Subtraction

$$p_n^n - q_n^n \equiv p^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} - n z (y p^{n(n-3)} - x q^{n(n-3)}) \text{ mod. } n^{2\lambda+1}.$$

Wir multipliciren beiderseits mit $p^n q^n$ und benutzen wieder die Relationen $x = p\,p_n$, $y = q\,q_n$, sowie die Congruenz (31); dann ergibt sich

$$q^n x^n - p^n y^n \equiv q^{n^2}(q^n - p^n) + n\,z\,q^n\,(x^{n-1} + y^{n-1})$$
$$- n\,z\,p^n\,q^n\,(y\,p^{n(n-3)} - x\,q^{n(n-3)}) \qquad \text{mod. } n^{2\lambda+1}.$$

Da nun r durch $n^{\lambda-1}$ theilbar sein sollte, und da nach I) $x - y$ durch $r^n n^{n-1}$ theilbar ist, kann hier (indem $n\lambda - 1 \geqq 2\lambda + 1$ ist) überall x durch y ersetzt werden; es ist also auch

$$(q^n - p^n)(y^n - q^{n^2}) \equiv 2 n z y^{n-1} q^n - n z y p^n q^n (p^{n(n-3)} - q^{n(n-3)})$$
$$\text{mod. } n^{2\lambda+1}.$$

Der erste Factor der linken Seite ist nach (30) durch n^λ, der zweite Factor (da $y = q\,q_n$) nach (29) durch $n^{\lambda+1}$ theilbar; der letzte Factor des zweiten Gliedes der rechten Seite enthält nach (30) den Factor n^λ, das ganze Glied also (da z durch n^λ theilbar ist) auch den Factor $n^{2\lambda+1}$; es folgt also

$$0 \equiv 2nzy^{n-1}q^n \quad \text{mod. } n^{2\lambda+1}$$

oder, da n nicht durch 2 theilbar ist:

$$(32) \qquad zy^{n-1}q^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{2\lambda}.$$

Nach unseren Annahmen sollten y und q nicht durch n theilbar sein; es muss demnach z den Factor $n^{2\lambda}$ enthalten.

Nimmt man also an, dass die Zahl z durch n^λ theilbar sei, so müsste sie auch durch $n^{2\lambda}$ theilbar sein, was nur mit der Voraussetzung $z = 0$ verträglich ist. Der Fall I) ist damit als unzulässig nachgewiesen.

Der Fall II) lässt sich in genau der gleichen Weise erledigen. Aus den Identitäten (13) und (17[a]) erhalten wir bez.

$$(33) \qquad \begin{aligned} n x^\nu y^\nu &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} y^{i-1} r^{n(n-2i+1)}, \\ n x^\nu z^\nu &= q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}, \end{aligned}$$

und schliessen aus ihnen, wie in (21), (23) und (24) die Congruenzen

$$\begin{aligned} q_n \equiv \ r_n \ &\equiv 1 && \text{mod. } n, \\ y = q \cdot q_n &\equiv q && \text{mod. } n, \\ z = r \cdot r_n &\equiv r && \text{mod. } n, \\ y + z = q\,q_n + r\,r_n &\equiv q + r && \text{mod. } n, \\ = p^n \cdot n^{n-1} &\equiv 0 && \text{mod. } n, \end{aligned}$$

also auch, entsprechend zu (25):

$$q^n + r^n \equiv 0 \qquad \text{mod. } n^2,$$

ferner aus II)

$$2x = q^n + r^n + p^n n^{n-1} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Die Identität (13[b]) gibt nach Division mit n

$$(34) \qquad \begin{aligned} (-1)^\nu y^\nu z^\nu &= p_n^n - p^{n(n-1)} n^{n(n-2)} \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu} (-1)^i N_i x^{i-1} y^{i-1} p^{n(n-2i+1)} n^{n^2-2in+2i-2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wie oben entsprechend aus (28), dass p durch n theilbar sein muss. Sei allgemein p durch $n^{\lambda-1}$, also x durch n^{λ} theilbar; dann folgt aus (33)

$$\begin{aligned}
r_n^n - r^{n(n-1)} &\equiv q_n^n - q^{n(n-1)} \equiv 0 && \text{mod. } n^{\lambda+1}, \\
r_n \equiv r^{n-1},\ q_n &\equiv q^{n-1} && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
y = x + r^n &\equiv r^n && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
z = x - q^n &\equiv -q^n && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
r^n + q^n &\equiv 0 && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
r^{n^2} + q^{n^2} &\equiv 0 && \text{mod. } n^{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Endlich aus II) und (1):

$$\begin{aligned}
r^{n^2} + q^{n^2} &= (x-y)^n + (x-z)^n \\
&\equiv -n\,x\,(y^{n-1} + z^{n-1}) \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Durch Benutzung dieser Relation und durch Addition der Gleichungen (33) wird man schliesslich, wie bei (32), zu der Congruenz

$$x\,y^{n-1}\,q^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{2\lambda}$$

geführt. Also müsste x durch $n^{2\lambda}$ theilbar sein, was nicht angeht, wenigstens nur zu der identischen Lösung $x = 0$ führen würde.

Wir haben endlich den Fall III) zu untersuchen. Es gelten wieder die Gleichungen (33) und ausserdem Gleichung (22). In jeder dieser Gleichungen sind alle Glieder der rechten Seite durch n theilbar bis auf das erste und zweite; auch die linke Seite ist durch n theilbar. Es bestehen demnach die Congruenzen

$$(35) \quad p_n^n \equiv p^{n(n-1)},\ q_n^n \equiv q^{n(n-1)},\ r_n^n \equiv r^{n(n-1)} \quad \text{mod. } n,$$

also auch nach dem Fermat'schen Satze (nach welchem $p^n \equiv p$ ist)

$$p_n \equiv p^{n-1},\ q_n \equiv q^{n-1},\ r_n \equiv r^{n-1} \quad \text{mod. } n$$

und hieraus

$$p_n \equiv 1,\ q_n \equiv 1,\ r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n.$$

Nehmen wir allgemein an, es sei

(36) $$p_n \equiv q_n \equiv r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^\lambda, \ \lambda \geq 1,$$

so ist

(37) $$x = p \cdot p_n \equiv p\,, \quad y \equiv q\,, \quad z \equiv r \quad \text{mod. } n^\lambda\,,$$

(38) $$x^n \equiv p^n, \quad y^n \equiv q^n, \quad z^n \equiv r^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

also folgt aus (3)

(39) $$p^n \equiv q^n + r^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

und aus den Gleichungen III):

$$y + z \equiv (x - z) + (x - y) \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

folglich

(40) $$y + z \equiv x \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

oder, da $y + z = p^n$ ist:

(41) $$x = p \cdot p_n \equiv p^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

also

(42) $$p^{n-1} \equiv p_n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

und wegen (36):

(43) $$p^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^\lambda.$$

Ebenso ist

(44) $$q^{n-1} \equiv 1, \quad r^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^\lambda.$$

Die weitere Betrachtung knüpft sich wieder an die beiden Gleichungen (33), zu denen noch die aus (13) hervorgehende Relation (22), nemlich

(45) $$(-1)^\nu n y^\nu z^\nu = p_n^n - p^{n(n-1)} - \sum_{i=2}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}$$

hinzutritt. Durch Addition der Gleichungen (33) ergibt sich

(46) $$n x^\nu (y^\nu + z^\nu) = q_n^n + r_n^n - (r^{n(n-1)} + q^{n(n-1)}) - P,$$

wo zur Abkürzung:

$$P = \sum_{i=2}^{\nu} N_i x^{i-1} (y^{i-1} r^{n(n-2i+1)} + z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}).$$

Nun ist nach III)

$$y = x - r^n, \quad z = x - q^n.$$

Nach Anwendung des binomischen Satzes wird daher:

$$P = \sum_{i=2}^{i=\nu} N_i x^{i-1} \sum_{s=0}^{s=i-1} (-1)^{i-1-s} x^s \binom{i-1}{s} [r^{n(n-i-s)} + q^{n(n-i-s)}].$$

Ferner folgt aus (37) und (40)

$$p \equiv q + r \quad \text{mod. } n^\lambda, \tag{47}$$

also durch Potenziren

$$p^{n(n-i-s)} \equiv q^{n(n-i-s)} + r^{n(n-i-s)} \quad \text{mod. } n. \tag{48}$$

Da alle in P vorkommenden Zahlen N_i durch n theilbar sind, ist demnach

$$P \equiv \sum_{i=2}^{i=\nu} N_i x^{i-1} \sum_{s=0}^{s=i-1} (-1)^{i-1-s} x^s \binom{i-1}{s} p^{n(n-i-s)} \quad \text{mod. } n^2$$

$$\equiv \sum_{i=2}^{\nu} N_i x^{i-1} (x - p^n)^{i-1} p^{n(n-2i+1)} \quad \text{mod. } n^2.$$

Nach (41) ist $x - p^n$ durch $n^{\lambda+1}$ theilbar, also folgt:

$$P \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Aus (36) und (44) erhalten wir

$$q^{n(n-1)} - q_n^n \equiv 0, \quad r^{n(n-1)} - r_n^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

Die Gleichung (46) führt demnach zu folgender Congruenz:

$$x^\nu (y^\nu + z^\nu) \equiv 0 \quad \text{mod. } n. \tag{49}$$

Durch Addition von (45) zu der ersten Gleichung (33) ergibt sich in analoger Weise

$$n y^\nu (x^\nu - (-1)^\nu z^\nu) = r_n^n - p_n^n + p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} - Q, \tag{50}$$

wo

$$Q = \sum_{i=2}^{\nu} N_i y^{i-1} (x^{i-1} r^{n(n-2i+1)} - (-1)^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}).$$

Hierin setzen wir nach III)

$$x = y + r^n, \quad z = -y + p^n;$$

dann wird

$$Q = \sum_{i=2}^{\nu} N_i y^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} \binom{i-1}{s} y^s \left[r^{n(n-i-s)} - (-1)^{i-1-s} p^{n(n-i-s)}\right].$$

Erheben wir die beiden Seiten der Congruenz (47) zur Potenz $n(n-i-s)$, so folgt:

$$r^{n(n-i-s)} + (-1)^{n(n-i-s)} p^{n(n-i-s)} \equiv q^{n(n-i-s)} (-1)^{n(n-i-s)} \mod. n.$$

Der Voraussetzung nach ist n eine ungerade Zahl, also $(-1)^n = (-1)^{n^2} = -1$, und somit auch

$$r^{n(n-i-s)} - (-1)^{i-1-s} p^{n(n-i-s)} \equiv q^{n(n-i-s)} (-1)^{i-1-s} \mod. n.$$

Es wird daher

$$Q \equiv \sum_{i=2}^{\nu} N_i y^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} \binom{i-1}{s} y^s q^{n(n-i-s)} (-1)^{i-1-s} \mod. n^2$$

$$\equiv \sum_{i=2}^{\nu} N_i y^{i-1} (y - q^n)^{i-1} q^{n(n-2i+1)} \mod. n^2.$$

Da nach III) $x - z = q^n$ ist, so folgt aus (40)

$$y - q^n \equiv 0 \mod. n^{\lambda+1}.$$

Es wäre demnach auch

$$Q \equiv 0 \mod. n^2.$$

Da ferner analog zu (41) die Congruenzen

$$y = q\, q_n \equiv q^n, \quad z = r\, r_n \equiv r^n \mod. n^{\lambda+1}$$

bestehen und nach (35)

$$q_n^n \equiv q^{n(n-1)}, \quad r_n^n \equiv r^{n(n-1)} \mod. n^{\lambda+2},$$

ist, so würde aus (50) folgen:

$$(51) \qquad y^{\nu} (x^{\nu} - (-1)^{\nu} z^{\nu}) \equiv 0 \mod. n.$$

In derselben Weise würde man aus der zweiten Gleichung (33) in Verbindung mit (45) die Congruenz

$$(52) \qquad z^{\nu} (x^{\nu} - (-1)^{\nu} y^{\nu}) \equiv 0 \mod. n$$

ableiten können. Die Zahlen x, y, z sollten der Voraussetzung

nach nicht durch n theilbar sein; es müssten also wegen (49), (51) und (52) auch die Congruenzen

$$\begin{aligned} y^\nu + \qquad\quad z^\nu &\equiv 0 \quad \text{mod. } n, \\ x^\nu - (-1)^\nu z^\nu &\equiv 0 \quad \text{mod. } n, \\ x^\nu - (-1)^\nu y^\nu &\equiv 0 \quad \text{mod. } n \end{aligned}$$

gleichzeitig Geltung haben. Multiplicirt man die erste dieser Congruenzen mit $(-1)^\nu$ und addirt sodann die linken Seiten, so ergibt sich

$$2\,x^\nu \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

Es müsste also x durch n theilbar sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Hiermit ist die Unmöglichkeit dargethan, eine Gleichung der Form (3), d. h. eine Gleichung

$$x^n = y^n + z^n$$

durch ganze Zahlen x, y, z zu befriedigen, wenn n eine ungerade Primzahl bedeutet, und wenn keine der Zahlen x, y, z durch n theilbar sein soll. Der Fall aber, wo eine dieser Zahlen durch n theilbar ist, wurde schon oben (p. 192 ff.) erledigt.

Da nun die Unmöglichkeit des Falles $n = 4$ von Lamé nachgewiesen wurde, kann n auch keine Potenz von 2 sein; es bleibt also in der That nur die eine Möglichkeit $n = 2$.

Die im Vorstehenden herangezogenen Hülfsmittel sind durchaus elementarer Natur; ausser dem Fermat'schen Satze der Zahlentheorie sind nur einfache algebraische Umformungen benutzt worden. Es ist daher sehr wohl möglich, dass Fermat bereits im Besitze eines Beweises für seine Behauptung gewesen ist.

Das gewonnene Resultat kann man auch dahin aussprechen, dass die Curve

$$x^n - y^n - z^n = 0$$

ausser den drei Punkten $0, 1, -1$; $1, 0, 1$; $1, 1, 0$ keinen weiteren Punkt mit rationalen Coordinaten besitzt.

Bedeutet daher λ eine rationale Zahl, und schneiden wir die Curve mit der geraden Linie

$$(x - y) - \lambda z = 0,$$

welche durch den Punkt 1, 1, 0 hindurchgeht, so kann die resultirende Gleichung nicht durch rationale Werthe erfüllt werden. Es ergibt sich aber

$$\lambda^n (x^n - y^n) - (x - y)^n = 0,$$

oder nach Division mit $x - y$, wenn noch

$$\frac{x}{y} = t$$

gesetzt wird,

$$\lambda^n (t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1) - (t - 1)^{n-1} = 0.$$

Ist die ganze Zahl n grösser als 2, so kann demnach diese Gleichung nicht durch rationale Werthe von t und λ erfüllt werden, ausgenommen die Werthe $t = 1$, $\lambda = 0$ und $t = 0$, $\lambda = \pm 1$, wobei das obere Zeichen für eine ungerade, das untere für eine gerade Zahl gilt.

Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumann's vorgefundene Rede von C. G. J. Jacobi.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juni
von **Walther v. Dyck.**

(*Eingelaufen 21. Juli.*)

Die im Folgenden veröffentlichte Rede hat Jacobi zum Eintritt in die philosophische Facultät der Universität am 7. Juli 1832 gehalten (die Ernennung Jacobi's zum Ordinarius war 1829 erfolgt).

Herr Carl Neumann in Leipzig hatte diese Rede als Student unter den Büchern seines Vaters gefunden, für sich abgeschrieben und eine besonders charakteristische Stelle derselben im Vorwort zu seinen „Beiträgen zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik“ Leipzig 1893 veröffentlicht. Als ich mich im Herbste des vorigen Jahres mit Studien über „die Beziehungen zwischen dem künstlerischen und dem wissenschaftlichen Erfassen der Natur“ beschäftigte und mir eben jene citirte Stelle die Art wissenschaftlicher und künstlerischer Intuition besonders prägnant zu bezeichnen schien, ersuchte ich Herrn Carl Neumann um Mitteilungen über den Ursprung jenes Citates. Dies gab Veranlassung, dass ein Enkel F. Neumann's, Herr E. Neumann in Halle, in dem Nachlasse seines Grossvaters nach jener Rede forschte, mit dem Erfolge, dass er das Original der Rede von der Hand Jacobi's eingetragen fand in einem durchschossenen Handexemplar einer für den eingangs genannten Zweck gedruckten Abhandlung, deren ausführlicher Titel lautet:

„Commentatio / de transformatione integralis duplicis indefiniti

$$\int \frac{d\varphi\, d\psi}{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + (A' + B'\cos\varphi + C'\sin\varphi)\cos\psi + (A'' + B''\cos\varphi + C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

in formam simpliciorem

$$\int \frac{d\eta\, d\vartheta}{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}$$

quam / auctoritate A. Ordinis philosophorum / pro loco in eo rite obtinendo / D. VII. Julii MDCCCXXXII / H. h. a. c. / publice defendet / Carolus Gustävus Jacobus Jacobi Ph. Dr. / Math. P. P. O., Academiarum Parisiensis, Berolinensis, Petropolitanae sodalis. / assumpto ad respondendum socio / Herrmanno Henrico Haedenkamp Halensi / opponentibus / Julio Eduardo Czwalina, Tolksensi / Augusto Rudolpho Luchterhand, Mariaeinsulano. / Regiomonti."

Es ist diese Abhandlung der erste Teil (Nr. 1—9) der im 8. Band von Crelle's Journal S. 253—279 und S. 321—357 abgedruckten Abhandlung „De transformatione integralis duplicis indefiniti etc." (Vergleiche Werke, Band III S. 91—158, sowie das Verzeichnis sämtlicher Abhandlungen Jacobi's im Bd. VII der Werke, S. 427.)

Ihr sind noch folgende Thesen vorgedruckt:

Theses.

1. Mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt.
2. Principium methodi geometricae et analyticae idem est.
3. Per Theoriam Functionum illustrissimi Lagrange analysis infinite parvi non refutatur, sed demonstratur.

Dass die vorliegende Rede wirklich für die genannte Gelegenheit verfasst wurde, geht aus der Anrede, wie aus der am Schluss zugefügten Aufforderung zur Disputation (die wir eben

deshalb noch in ihren ersten Sätzen mit abdrucken) unzweifelhaft hervor.

Ich darf Herrn Geheimrath Carl Neumann, welcher mir mit dem Original der Rede ihre Veröffentlichung vollständig übergab, auch an dieser Stelle für die hierdurch erwiesene Auszeichnung aufs herzlichste danken. Ich glaube, dass auch heute noch die Rede Jacobi's das besondere Interesse der Fachgenossen durch die in ihr vertretene Auffassung mathematischer Arbeit erwecken wird.

Prorector magnifice, decane spectabilis, professores doctoresque clarissimi atque doctissimi, commilitones ornatissimi, auditores omnium ordinum honoratissimi.

Ex quo primum ad artem analyticam accuratius cognoscendam animum appuli atque exemplaria mathematicorum assidua manu evolvi, magnum illud admiratus sum et stupendum opus mentis humanae, quod mathesis nomine usurpamus. Nam si id jam celebramus atque posteritati commendamus, quoties Rex aut Imperator aedificii alicujus prae ceteris decori fundamento vel unum infixerit lapidem — habemus jam aedem amplam paene ad astra usque exstructam, cujus singulos lapides alios post alios per tantam saeculorum seriem struxerunt regia illa et imperatoria ingenia, quibus gloriatur genus humanum et saeculum, quod illustraverunt. Eo magis miratus sum errorem singularem, in quem video incidere viros non sane contemnendos aut rerum mathematicarum expertes, qui quasi caeci judicent de coloribus, sed viros eximios, ipsos adeo mathematicos praestantissimos, errorem dico, huic tantae disciplinae suum deesse sibi insitum principium progressionis; fieri scilicet rerum mathematicarum progressum, quoties hoc vel illud problema de mundo naturali petitum seu quaestio physica mathematicorum labores provocat. Tristis sane et deplorabilis sors disciplinae, sancto illo nomine indignae, quae e libera facta esses serva, e filia

numinis divini, mentis humanae gloriam manifestante, ipsa mentis expers, ipsa nescia quid tibi velis, non proprio ac superbo volatu altum petens, sed dominae jussu alienae huc illuc dirigens gressus incertos ac titubantes. Permittatis velim, Auditores omnium ordinum honoratissimi pro humanitate vestra, quam imploro in re delicata et variis difficultatibus obnoxia, ut paucis erroris istius fontem detegam.

Et mundus naturalis et homo sibi conscius a Deo O. M. creati sunt; eaedem leges aeternae mentis humanae, eaedem naturae; quae est conditio, sine qua non intelligibilis esset mundus, sine qua nulla daretur rerum naturae cognitio. Missum hic faciamus ideas logicas quatenus expressas habet natura, quam hoc respectu habito considerant philosophi recentiores (ut verbo usitato utar et nimis usitato) tanquam logicam petrefactam. Consideremus naturam quatenus leges exprimat mathematicas. Non solis sensibus externis per tantam phaenomenorum varietatem et quasi tumultum dignosci potuit lex moderatrix, cui prorsus illa aut proxime obtemperant, nisi ipse accesseris ad contemplationem naturae ea fide et persuasione, ut mentis conceptiones tuae in ea expressas invenias. Leges naturae insitae mathematicae percipi non potuerunt, nisi jam proprio motu mentis humanae e legibus ei insitis exstructa esset mathesis. Corpora coelestia in sectionibus proxime conicis solem ambire non intellectum esset, nisi aeternum sectionum conicarum schema observabatur Graecorum ingenio. Quod Keplerus detexit stellae Martis moderari maeandros, idem jam Apollonii subtilitas mente conceperat, et praemeditata erat. Quantum in explicanda arte proficit mens humana, tantum natura etiam suam ei explicat sibi insitam mathesin.

Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem, omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae; jam illa, certo temporis momento, divina quadam necessitate coacta emergit; praeparatis omnibus causa levissima accidens, quamvis remota quaestio physica eam elicere valet. Num hanc ob rem quaestioni physicae debemus incrementa, quae veritate nova in lucem

prolata disciplina capit? Cur hodie applicas calculum? Num hoc die primum proponitur a natura problema? — Sedet Sphinx illa inde a creatione mundi, sedebit in sempiternum, proponit aenigmata generi mortalium; at suo tantum tempore venit Oedipus ab Apolline missus.

Errorem, in quem diximus magnos etiam incidisse geometras, in eo videmus consistere, quod non probe distinctum sit inter causas veras et causas accidentes; sive ut viri medici aiunt, inter causas proximas et causas remotas. Novimus, Eulerum olim e passu Virgiliano describente fluctuantes proras, puppes littore stantes, occasionem cepisse Hydraulicae condendi analyticae fundamenta. Exstat de Neutono lepida fabula, pomum super nares dormitantis incidens dedisse viro occasionem detegendi gravitatem universalem. Num pomo humi cadenti inest principium illud progressus, num carminibus Virgilianis? Inest ingeniis Neutonorum Eulerorum; inest ingeniis, quae magnos illos viros antecedebant, inest toti historiae artis.

Est causa vera progressus mathesis necessaria ejus explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas aeternas. Causa accidens esse potest quaestio physica, pomum cadens, passus Virgilianus. Qui de causis illis fortuitis natam putant mathesin similes mihi videntur iis, qui Epicureorum sententia ex atomis per vacuum volitantibus construunt mundum. Contra quos disserens Keplerus narrat se fessum a scribendo animoque intus pulverulento ab atomorum istorum considerationibus vocatum esse ad coenam, apposuisse uxorem acetarium. Quam se interrogasse, num si toto aëre confertae volitarent patinae stanneae, folia lactucae, micae salis, guttae aquae, aceti, olei, ovorum decusses, idque ab aeterno duret, num futurum sit tandem aliquando, ut fortuito tale coeat acetarium; respondisse bellam suam: sed non hoc decore, neque hoc ordine. Neque, cum Kepleriana uxore dico, de phaenomenorum tumultu ac confusione nasci potuit divina illa mathesis structura, omnibus numeris absolutissima, non hoc decore neque hoc ordine.

Geometras Francogallos plerosque, qui prodiere e schola illustris comitis de la Place, his temporibus in errorem illum

incidisse, dolemus. Qui dum unicam e quaestionibus physicis mathesis salutem petunt, relinquunt veram illam ac naturalem disciplinae viam, quam ingressi olim Eulerus et de la Grange, artem analyticam ad id evexerunt, quo nunc gaudet, fastigium. Quo non tantum mathesis pura, sed ipsae quoque ejus ad quaestiones physicas applicationes haud parum detrimenti capiunt. Semper enim arbitratus sum, ista maxime negligentia factum esse, ut magnum illud et inclytum problema de motu corporum coelestium per attractiones mutuas ex orbita elliptica exturbatorum, careat adhuc solutione, quae motibus systematis nostri solaris explicandis satisfaciat. Simulque persuasum habeo, omni studio ac labore excultis et theoria functionum ellipticarum et theoria integralium duplicium, quas ut problemata praecipua nostro tempore in rebus mathematicis proposita specto, fore, ut problematis illius paene desperati solutio vel sua sponte emergat. Theoriam functionum ellipticarum ante hos quatuor annos novis superstruxi fundamentis, itaque novum quasi calculi instrumentum cum Geometris communicavi. Fortasse etiam haec quam publico jam examini subjicio, de integralibus duplicibus commentatiuncula non omnino indigna videbitur hac solemnitate, qua coetui adscribar venerando eruditorum, qui artium plus ultra promovendarum sancto et augusto officio vitam et vigilias consecraverunt.

Jam ad arma vos provoco, juvenes ornatissimi, Czwalina et Luchterhand; surgite et tela contra nos nostraque dirigite, quae evitare studebo et, si fors fert, remittere. Quo in certamine te oro rogoque, Respondens dilectissime, ut fidelis mihi sis armiger, nam fortes ac strenui sunt adversarii. Quos et tu jam ad certamen provoca, ut nostrum pugnandi ardorem cognoscant. . . . .

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 6. Juli 1901.

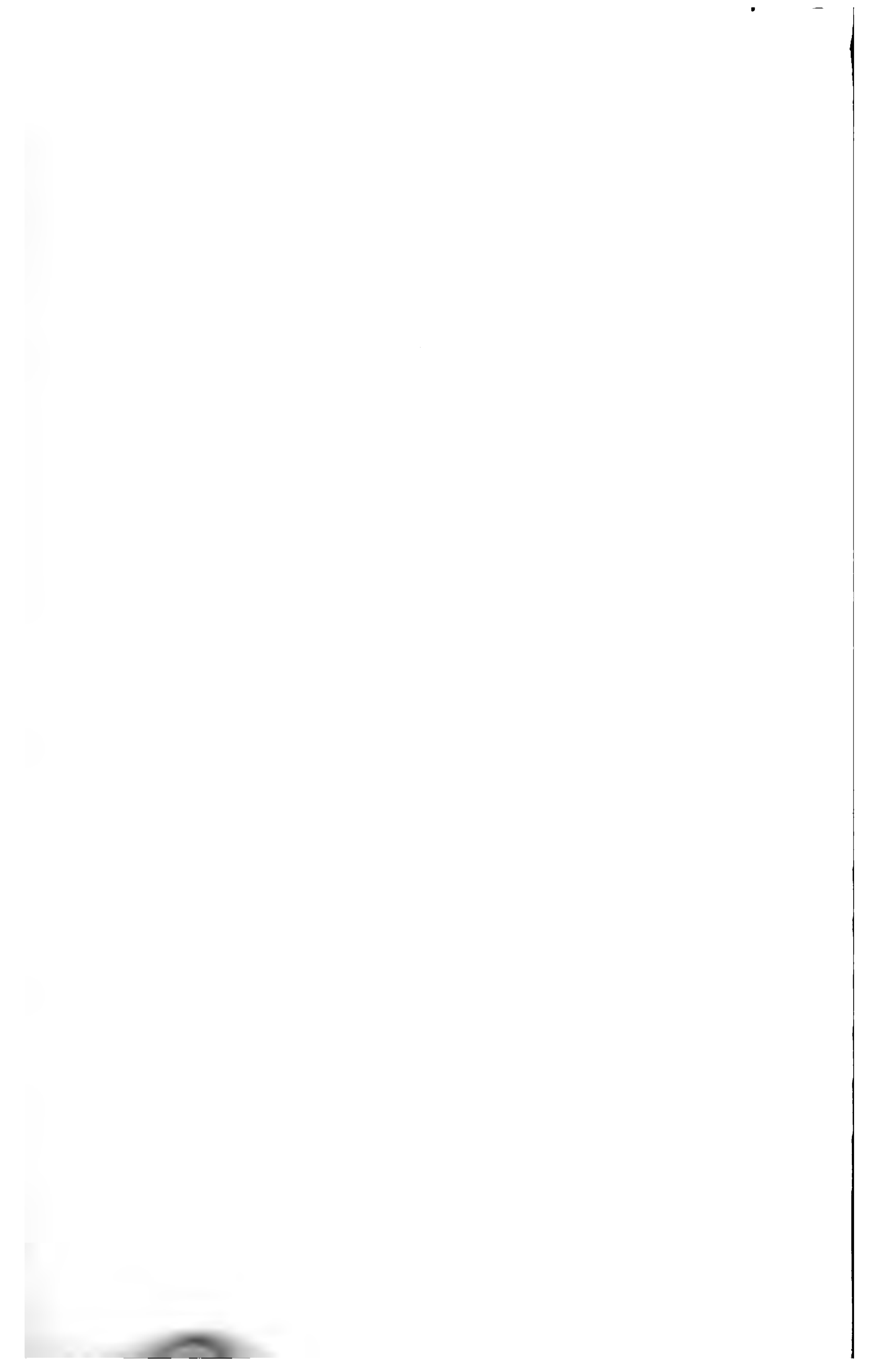
1. Herr Siegmund Günther erstattet einen Bericht über den II. und III. Theil seiner Untersuchung: „Akustisch-geographische Probleme."

2. Herr H. Seeliger spricht: „Ueber kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht."

3. Herr H. Seeliger legt eine Arbeit des Privatdozenten an der hiesigen Universität, Herrn Dr. Karl Schwarzschild: „Der Druck des Lichtes auf kleine Kugeln und die Arrhenius'sche Theorie der Kometenschweife" vor.

4. Herr H. Seeliger legt ferner eine Abhandlung des Privatdozenten für Physik an der hiesigen technischen Hochschule, Herrn Dr. R. Emden: „Beiträge zur Sonnentheorie" vor.

5. Herr Ferd. Lindemann überreicht eine Untersuchung der Herren C. Cranz und K. R. Koch in Stuttgart: „Ueber die Vibration des Gewehrlaufs, II. Schwingungen in horizontaler Ebene." Die Untersuchung erscheint wie die frühere derselben Autoren in den Abhandlungen der Akademie.



Akustisch-Geographische Probleme.

Von **Siegmund Günther.**

(Eingelaufen 6. Juli.)

Von den drei Gruppen, in welche in unserer früheren Mitteilung[1]) die spontanen Schallphaenomene zerlegt wurden, hat die eine bereits ihre Erledigung gefunden.[2]) Die zweite Gruppe hatte alle diejenigen Schallerscheinungen zu umfassen, bei denen es zur Herausbildung wirklicher Töne

---

[1]) Diese Sitzungsberichte, 31. Band (1901), S. 15 ff.

[2]) Von Prof. Dr. Pechuel-Loesche in Erlangen erfuhr der Verf., eben auf grund jener früheren Veröffentlichung, dass auf dem Sand- und Lateritboden Afrikas Töne von wechselnder Art und Stärke gar nicht selten gehört werden, was natürlich dem Aberglauben der Negerstämme vielfach Vorschub leistet. Dem erwähnten Geographen ist persönlich musikalischer Sand bekannt von Darsser Ort an der Ostseeküste, von der Colorado-Wüste, vom Kap Hatteras, von der westindischen Insel Inagua, vom Kap der guten Hoffnung; in der südwestafrikanischen Wüste Namib hat er die gleichen, tönenden Dünenhügel gefunden, wie Lenz in der Sahara (s. o. S. 25). „Schreienden Sand" kennen die Neger an der Loango-Küste; natürlich behält er diese Eigenschaft nur solange, als ihn nicht die Tropenregen gründlich durchfeuchtet haben. Herrn Prof. Pechuel-Loesche schuldet der Verf. aufrichtigen Dank für die umfangreichen Mitteilungen, durch welche ersterer die vorliegende Untersuchung wesentlich gefördert hat. Nicht unerwähnt soll auch bleiben, dass Schnee, wenn er infolge extremer Kälte körnig geworden ist, sich akustisch ähnlich wie Sand verhält. Payer berichtet (R. Andree, Der Kampf um den Nordpol, Bielefeld-Leipzig 1880, S. 263) von Franz Josephs-Land: „Dort, wo der Schnee in massigen Wehen liegt, sind diese wogenartig und scharf berandet, und der Schritt wiederhallt auf ihnen wie Trommelton" — offenbar eine ganz analoge Erscheinung.

kommt, die einen deutlich ausgesprochenen musikalischen Charakter an sich tragen, was beim tönendem Sande nicht, oder doch nur ausnahmsweise, der Fall war. Eine klar erkennbare Bezeichnung für solche Tonbildungen fehlt; wenn wir von musikalischen Naturklängen sprechen, so hoffen wir für diese Namenwahl durch den Inhalt des folgenden Abschnittes die Berechtigung darthun zu können.

II. Musikalische Naturklänge.

Das Material dieser Abteilung, welches freilich nur partiell und bedingt die Unterlagen für eine kritische Bearbeitung darbietet, ist ziemlich reichhaltig. Um die Sammlung desselben machten sich verdient einige Abhandlungen von Schleiden,[1]) Springer[2]) und Carus Sterne,[3]) und zumal die letztgenannte will ernsthaft beachtet sein, weil sie sich eine Scheidung der zumeist bunt durch einander gewürfelten Angaben nach festen Grundsätzen zum Ziele gesetzt hat. Gewisse gar nicht näher kontrollierbare Vorkommnisse, über die nur zufällige, sonst nicht bestätigte Nachrichten vorliegen, scheiden wir von vornherein aus.[4]) Wenn dies geschieht, so verbleiben für eine

---

[1]) M. J. Schleiden, Studien und populäre Vorträge, Leipzig 1857, S. 116 ff. („Die Töne in der Natur").

[2]) Springer, Die sonoren Naturerscheinungen im Weltall, Die Natur, (2) 6. Jahrgang, S. 223 ff.

[3]) Carus Sterne (Ernst Krause), Musik der Berge und Thäler, Wälder und Wüsten, Gartenlaube, 1882, S. 702 ff.

[4]) Dahin gehören z. B. die Seufzerklänge, welche man auf einem Berge bei Granada hie und da hören will und „el ultimo sospiro del Moro" — des letzten Maurenkönigs Boabdil — genannt hat (W. Irving, Chronicle of the Conquest of Granada, 2. Band, London 1850, S. 86); hierher eine Nachricht des alten Missionars G. B. Schwarz (Reise in Ostindien, Heilbronn 1751, S. 26) von dem eine eigentümlich tosende Musik machenden „Teufelsberge" nächst der Kapstadt; hierher endlich gewisse, halb ins Bereich der Gespenstergeschichten einschlagende Erzählungen aus Frankreich, welche Monnier und Vingtrinier (Traditions populaires comparées, Paris 1854, S. 50 ff.) mit grossem Eifer gesammelt haben. Klagende Stimmen vernehme man hie und da im Jura-

Untersuchung, die exakt vorzugehen bestrebt ist, wiederum drei verschiedene Erscheinungskomplexe übrig. Wir meinen erstmalig die musikalischen Töne in abgeschlossenen Thälern, nächstdem diejenigen in Wäldern, an dritter Stelle die Töne, welche zerklüfteten Felsen zu entströmen scheinen. Dass eine scharfe Grenzlinie zwischen den drei Kategorien nicht gezogen werden kann, dass zumal die unter die beiden ersten Klassen fallenden Erscheinungen sich ursächlich nahe berühren, leuchtet ein. Wir folgen, da die wissenschaftliche Terminologie sich des Gegenstandes noch kaum zu bemächtigen begonnen hat, der populären Ausdrucksweise und sprechen von singenden Thälern, singenden Wäldern und singenden Felsen.

a) Singende Thäler. Die Ermittlungen Carus Sternes haben ergeben, dass die erste Andeutung, die hier einzubeziehen ist, auf den Schweizer Scheuchzer, den Begründer der physikalischen Geographie der Alpen, zurückgeht. In das Glarner

---

gebirge bei Pontarlier, und zwar erinnerten dieselben abwechselnd an menschliche Töne und an „des coups d'archet sur des cordes sonores". Andere „crieurs" seien in den östlichen Departements nichts ungewöhnliches, wie z. B. „l'esprit de Cri-mont" am Doubs. Etwas zuverlässiger ist wohl (Stimmen in der Luft, Das Ausland, 1830, Sp. 1087) der Bericht eines Reisenden, der im Herbste 1828 den Pass „Porte de Venasque" in den Pyrenäen überstieg. Er erzählt, die Luftströmung habe ihm vom Berge Maladetta her „einen dumpfen, langsamen, klagenden, der Windharfe ähnlichen Ton" zugetragen, und zwar sei die Luft ziemlich ruhig, der Himmel wolkenlos gewesen; später, als er den gleichen Weg nochmals gemacht, sei die Sonne hinter Wolken gestanden, und Töne hätten sich nicht mehr hören lassen. Nach Springer (S. 255 ff.) habe man unbestimmte Kunde von ähnlichen akustischen Phaenomenen aus Griechenland, China, der Tartarei. Wenn auch Schweden in diesem Zusammenhange genannt wird, so wird es sich zeigen, dass es mit den dortigen Naturklängen eine ganz andere Bewandnis hat. Der gleichen — leider auf genaue Zitate zumeist verzichtenden und etwas allzu kompilatorischen — Zusammenstellung sei entnommen, dass, einer Notiz im „Magazin pittoresque" zufolge, ein Engländer 1852 in der Wüste deutlich ein zehn Minuten andauerndes Geläute, wie von Kirchenglocken, bemerkt habe. Hier dürfte fraglos an den tönenden Sand der Dünenhügel zu denken sein.

Hochgebirge eingebettet liegt ein kleines Hochthal, die Sandalp, und von ihr berichten[1]) die Hirten, dass sie zu Zeiten dort oben „den angenehmsten Wettkampf musikalischer Töne" zu hören bekämen. Auch jetzt noch, zweihundert Jahre nach Scheuchzer, hat sich diese Ueberlieferung bei den Alpenbewohnern erhalten. Carus Sterne stellt diesem Falle einen zweiten zur Seite, der sich auf das Siegerland (Provinz Westfalen) bezieht, über den jedoch irgend zuverlässige Nachrichten nicht vorzuliegen scheinen. Etwas festeren Boden bekommen wir unter die Füsse, wenn wir des singenden Thales an der steierischen Koralpe gedenken, insofern wir von den dortigen Verhältnissen eine vertrauenswürdige, Sinn für Naturbeobachtung bekundende Beschreibung[2]) zur Verfügung haben.

Der betreffende Gebirgszug trennt auf eine grössere Strecke auf seinem Kamme Steiermark und Kärnten. Ganz nahe der Grenze befindet sich eine kleine Mulde, auf drei Seiten von Felsen umgeben, und wenn man diesen fast abgeschlossenen Raum betritt, dringen eigenartige, leise Töne, die jedoch einen ganz harmonischen Eindruck hervorrufen, zu den Ohren des Besuchers. Sowie sich stärkerer Wind erhebt, erlischt die Hörbarkeit der Töne. Nach der Ansicht Mallys ist der Ursprung jener in einer Quelle zu suchen, welche in der Nähe des Gipfels des Speikkogels, des höchsten Punktes im Koralpenzuge, entspringt und von dort mit vernehmlichem Rauschen über das Steingerölle hinrieselt; die Felswände wirken als Reflektoren und vereinigen die diffusen Geräusche innerhalb eines kleinen Fokusraumes, wo man also musikalische Klänge vernimmt.

Diese Erklärung trifft aller Wahrscheinlichkeit nach das Richtige. Indess bedarf es doch einer etwas eindringenderen Analyse des Sachverhaltes, denn bewegtes Wasser kann, von

---

[1]) J. J. Scheuchzer, Itinera per Helvetiae alpinas regiones, 2. Band, Leiden 1723, S. 186.

[2]) Mally, Das Geläute in der Schwanbergeralpe, eine akustisch merkwürdige Erscheinung, Steiermärkische Zeitschr., (2), 2. Jahrgang (1835), S. 4 ff.

dem gewöhnlichen, unbestimmten Brausen natürlich abgesehen, nach zwei Richtungen hin akustische Wirkungen hervorbringen. Mit den im engeren Sinne so genannten Wasserfalltönen haben wir es im gegenwärtigen Falle mutmasslich nicht zu thun; von ihnen wird gleich nachher speziell die Rede sein müssen. Wohl aber dürfte jene Tonbildung in frage kommen, auf welche durch den feinsinnigen Akustiker Oppel die Aufmerksamkeit gelenkt wurde; er ist, wo nicht der eigentliche Entdecker der Reflexionstöne, so doch derjenige, der zuerst deren Entstehung eingehend untersucht und die verschiedenen Möglichkeiten unterschieden hat.[1]) Die erste Art solcher Töne tritt in die Erscheinung, wenn in der Nähe eines Gitters eine Lufterschütterung stattgefunden hat, denn dann hört man neben dem scharf ausgesprochenen Hauptklange einen sich mit diesem kombinierenden Reflexionston, dessen Höhe rasch abnimmt. Was die zweite Art von Reflexionstönen anlangt, so besteht deren einfachste Erzeugung darin, dass man mit hinlänglich starkem Schritte durch eine enge Gasse geht; durch Zurückwerfung des Schalles von beiden Wänden entsteht ein wirklicher Ton, der übrigens ebenfalls an Höhe und Stärke ziemlich schnell sinkt. Diese letztere Gruppe von Tönen steht mutmasslich, obwohl Pfaundler einige Bedenken hegt, in nahem Zusammenhange mit derjenigen, auf deren Vorkommen der Innsbrucker Physiker Baumgarten durch eine zufällige Wahrnehmung aufmerksam wurde.[2]) Die diffusen Reibungs-

---

[1]) Oppel, Beobachtungen über eine neue Entstehungsweise des Tones und Versuch einer Theorie desselben, Ann. d. Phys. u. Chem., 94. Band (1855), S. 357 ff.; Beobachtung einer zweiten Gattung von Reflexionstönen nebst Andeutungen über die Theorie derselben, ebenda, 101. Band (1857), S. 165 ff. In neuer Beleuchtung stellt die Oppel'sche Lehre von den Reflextönen jene Abhandlung v. Fischer-Benzons dar, deren oben (S. 15) Erwähnung gethan worden ist. Dort ist auch von Reflextönen die Rede, die man auf der grossen Freitreppe der Walhalla vernehme.

[2]) Baumgarten, Töne durch Reflexion von Geräusch mit gleichmässigem Schallfalle, Mitteil. d. Naturwissensch.-Mediz. Ver. zu Innsbruck, 1877. Pfaundler hat gezeigt, dass und wie man diese Reflexions-

geräusche, welche durch das einigermassen gestörte Hinwegfliessen des Wassers über loses Gestein ausgelöst wurden, erfahren infolge der Reflexion einerseits eine Verstärkung und andererseits auch eine Differentiierung in dem Sinne, dass sich ein bestimmter Ton losschält, der natürlich, angesichts der Vielzahl der bedingenden Einflüsse, weder an Höhe noch an Klangfarbe konstant bleiben kann. Das ist Oppels Quellton, den man in unmittelbarer Nähe von Quellen in felsiger Umgebung leicht zu hören Gelegenheit bekommt. Durch diese Entdeckung, welche von dem Vorkommnis im steierischen Gebirge ganz unabhängig zustande kam, ist für dieses letztere eine völlig zureichende Begründung ermöglicht worden.

β) Singende Wälder. Ungleich weniger günstig ist es mit den Erscheinungen bestellt, welche nun in dieser Unterabteilung ihre Erörterung finden sollen. Auch für sie lässt sich ein sehr alter, der Diskussion freilich so gut wie ganz entrückter Beleg beibringen. Der Engländer Gervasius von Tilbury, der für den Kaiser Otto IV. zu Anfang des XIII. Jahrhunderts unter dem Titel „Kaiserliche Mussestunden“ ein didaktisches Tendenzwerk verfasste, weiss von einem Walde bei der Stadt Carlisle zu melden,[1]) der eine Merkwürdigkeit in sich schliesse. In der Mitte dieses Waldes befinde sich ein von Bergen umrandetes Thal, neben der grossen Heerstrasse, und in diesem vernehme man regelmässig „zur ersten Stunde des Tages“ einen süssen Ton, wie von fernem Glockengeläute; des-

---

töne, die der zweiten Oppel'schen Gattung doch mindestens sehr nahe stehen, an der Sirene nachbilden kann. „Man beobachtet sie, wenn man zwischen einem rauschenden Bache oder Flusse — auch das Geräusche eines Eisenbahnzuges ist verwendbar — und einer Mauer, von letzterer ungefähr 1 m entfernt, steht. Jeder Schallimpuls trifft das Ohr zweimal, direkt und reflektiert. So entsteht ein Ton, der sich bei Annäherung an die Wand erhöht, bei Entfernung von derselben vertieft“ (Pfaundler, Ueber die geringste absolute Anzahl von Schallimpulsen, welche zur Hervorbringung eines Tones nötig ist, Sitzungsber. d. Wiener Akademie d. Wissensch., Math.-Phys. Kl., 8. November 1877).

[1]) Gervasius von Tilbury, Otia imperalia, ed. Liebrecht, Hannover 1856, S. 34.

halb hätten die Eingeborenen dem einsamen Orte in ihrer Sprache einen bezeichnenden Namen („Laikibrait") gegeben.[1]) Für unmöglich braucht man die zunächst etwas abenteuerlich anmutende Mitteilung keineswegs zu halten, wenn man sie mit den Thatsachen in Parallele stellt, die als gesichert gelten können. Es sind allerdings nur zwei ähnliche Fälle, aber diese werden durch anscheinend unverwerfliche Zeugnisse gestützt.

Zunächst sehen wir uns in den badischen Schwarzwald versetzt. Schon vor langer Zeit, nämlich bald nach dem dreissigjährigen Kriege oder in der zweiten Hälfte des XVII. Jahrhunderts, wurden, wie wir in dem grossen geschichtlich-geographischen Sammelwerke Kolbs[2]) über Baden lesen, Soldaten, die in einer unfern des Städtchens Triberg gelegenen Waldschlucht kampierten, durch einen sonderbaren Gesang, der aus den Wipfeln der Bäume zu kommen schien, überrascht und stifteten deshalb eine Votivtafel, die anscheinend zu Anfang des XIX. Jahrhunderts noch vorhanden gewesen ist. Inwieweit die von Kolb versuchte Deutung[3]) dieses Schallphänomenes korrekt ist, das wollen wir einstweilen noch dahingestellt sein lassen. Jedenfalls erheischt volle Beachtung der Umstand, dass dasselbe einen konstanten Charakter besass und nach mehr denn hundert Jahre nachher nicht verschwunden war. Es wäre jedenfalls von Interesse, zu erfahren, ob auch jetzt noch das Triberger Thal seine musikalische Eigenschaft beibehalten hat; dass aber schon geringfügige Veränderungen des Land-

[1]) Carlisle liegt an der Grenze von Schottland. Das keltische Sprachgebiet, jetzt auf Wales und den äussersten Norden der Insel beschränkt, hatte vor siebenhundert Jahren noch eine die heutige weit übertreffende Ausdehnung.

[2]) J. B. Kolb, Historisch-statistisch-topographisches Lexicon von dem Grossherzogtum Baden, 3. Band, Karlsruhe 1816, S. 300 ff.

[3]) „Die dortige Bergkluft, die durch ein schnell abbrechendes Felseneck der auf- und abströmenden Luft einen eigenen widerstrebenden Impuls gab, bildete in den Wipfeln der Tannen und des Gesträuches eine natürliche Aeolsharfe, deren Töne durch den gegenüber strömenden Waldbach begleitet wurden. Noch jetzt kann man bei windiger Nacht diesen Aeolsgesang im Konzerte mit dem Waldstrom spielen hören".

schaftsbildes, wie etwa Abholzungen, einen tief gehenden Einfluss auf die Akustik einer Gegend auszuüben vermögen, ist bekannt und oben[1]) bereits betont worden.

Nunmehr gelangen wir zu dem dritten, bekanntesten und viel umstrittenen, jedoch noch keineswegs vollkommen aufgehellten Beispiele dieser Art, zum singenden Walde oder singenden Thale von Thronecken. Wie erwähnt, kann man die Erscheinung gleich gut unter unsere erste oder zweite Rubrik bringen, denn es ist ein einsames Waldthal, in dessen Grenzen sich die Ereignisse abgespielt haben. Thronecken, der gewöhnlichen Annahme nach das „Tronje“ des Nibelungenliedes, ist ein kleines, im südwestlichen, Hochwald genannten Teile des Hunsrück-Gebirges gelegenes Dorf, in dessen Flur der Malborner-Bach sich mit dem zur Mosel fliessenden Thron-Bache vereinigt. Zwei Kilometer oberhalb ergiesst sich in den Malborner Bach der Röder-Bach, dessen mit dichtem Walde bestandenes Thal sich gegen den höchsten Punkt der Rheinprovinz, den Erbeskopf (815 m), hinaufzieht. Dieses Röderbachthal nun ist der Schauplatz der Geschehnisse, welche ihm den auch vom Volksmunde und von der Reiselitteratur[2]) adoptierten Namen des singenden Thales verschafft haben.

Was wir von den Dingen wissen, verdanken wir grösstenteils dem vor wenigen Jahren verstorbenen Ingenieur H. Reuleaux aus Remagen. Es kommen zunächst drei Publikationen[3]) desselben in frage; allein auch davon abgesehen, hat er etwa einundeinhalb Dezennien daran gesetzt, das Rätsel, zu dessen

---

[1]) Vgl. o. S. 31.

[2]) Hochwald- und Hunsrückführer, Kreuznach 1899, S. 153 ff.

[3]) H. Reuleaux, Wandernde Töne, Sitzungsber. d. Verhandl. d. Naturhistor. Ver. d. Rheinlande, 37. Band, S. 161 ff.; Zwei Reflexionstöne, ebenda, 41. Band, S. 278 ff.; Das singende Thal bei Thronecken, ein Hochwaldrätsel, Koblenz 1880. Die an letzter Stelle genannte, selbständige Schrift enthält nebst der Gesamtheit der vom Autor angestellten Beobachtungen auch dessen Versuche, sich auf dem weiten Felde der theoretischen Akustik zu orientieren und zu einer befriedigenden Interpretation der mysteriösen Erscheinung durchzudringen. Wir beziehen uns vorwiegend auf diese Arbeit.

Mitwisser ihn der Zufall gemacht hatte, zu lösen, und die hiezu dienlichen Materialien, welche er zu dem Ende gesammelt hatte, und welche in unserer folgenden Darstellung gebührende Berücksichtigung gefunden haben,[1]) erreichten einen geradezu staunenswerten Umfang. Es darf deshalb auch die Hoffnung ausgesprochen werden, dass das Problem, welches von Reuleaux der tellurischen Physik vorgelegt ward, an dieser Stelle soweit gefördert wird, als dies unter den obwaltenden Verhältnissen überhaupt möglich erscheint.

An einem schönen Spätherbsttage hielt der Oberförster von Malborn im Hochwaldreviere eine Hirschjagd ab, an der u. a. auch Reuleaux teil nahm. Die Schützen wurden im unteren Röderbachgrunde postiert, und während unser Berichterstatter ruhig dastand, hörte er plötzlich ein Klingen in der Luft, wie von fernem Glockenläuten. Vereinzelt blos liessen sich anfänglich tiefe Glockentöne vernehmen, die vom Thaleingange her das Thal hinaufzogen und „in prächtiger Schwellung" langsam vorbei wallten, so dass man den Ton selbst und zugleich das Mitklingen der Oktave ganz deutlich zu erkennen imstande war. Das unterste Ende des Thales weist eine Verengerung auf; dem entsprechend breiteten sich von der Engstelle ab die Tonwellen fächerförmig aus. Die Luft war bewegt, aber von dem Brausen des Windes hoben sich die sonoren Glockenklänge unverkennbar ab. Der weitere Verlauf der Jagd zwang den Beobachter, seinen Standort zu verlassen, und damit hörte auch bald das Weiterbestehen des Klangphaenomenes auf; als jedoch nach fünf Stunden das Jagen sich wieder dem unteren Thale zuwandte, traten auch die Töne wieder hervor, und Reuleaux konnte ganz gut feststellen, ob

---

[1]) Durch die grosse Freundlichkeit von Frau und Fräulein Reuleaux, denen beiden er an diesem Orte seinen aufrichtigen Dank für das ihm geschenkte Vertrauen aussprechen möchte, wurde der Schreiber dieser Zeilen in den Stand gesetzt, alle Aufzeichnungen des Verstorbenen und den von ihm in der fraglichen Angelegenheit geführten, umfangreichen Briefwechsel einsehen zu können; auch wurde ihm anstandslos gestattet, diese Daten für die vorliegende Abhandlung nach Belieben auszunützen.

eine Luftschwingung gerade über ihn hinwegging oder aber eine mehr seitliche Richtung einhielt.

Ehe wir an die Frage herantreten, wie denn wohl ein solches Wandern tönender Luftwellen zustande kommen könne, haben wir zuerst uns über die Realität der Reuleaux-schen Beobachtung selbst ein Urteil zu bilden. Dieselbe blieb nämlich keineswegs unangefochten. Zumal einzelne Forstbeamte verfochten energisch die Annahme,[1]) dass irgend eine Täuschung vorgekommen sein müsse; gerade dem Forstpersonale, welches das Röderbachthal zu allen Tages- und Jahreszeiten durchstreife oder kreuze, hätte unmöglich eine so auffallende Schallerscheinung verborgen bleiben können. Dem gegenüber sah sich Reuleaux in die Notwendigkeit versetzt, Ohrenzeugen ausfindig zu machen, und es ist ihm dies auch vollauf geglückt.[2])

---

[1]) Kritiken der Reuleaux'schen Schrift gaben Grunert und Borggreve (Forstliche Blätter, 1880, S. 276 ff.). Es müsse, hiess es, eine Täuschung inmitte liegen; vielleicht könne man an verwehte Hornsignale oder an das von Zugvögeln bewirkte Geräusche denken. Es fiel dem Angegriffenen nicht schwer, sich solcher — doch wirklich recht gezwungener — Einwände zu erwehren (Noch einmal „Das singende Thal bei Thronecken", ebenda 1880, besonders paginierter Anhang). Insbesondere wies er darauf hin, dass eben nur durch ein seltenes Zusammenwirken der verschiedensten begünstigenden Momente die Tonbildung so charakteristische Formen annehmen könne, und dass man mithin gar kein Recht habe, dergleichen als etwas sich regelmässig Wiederholendes zu betrachten.

[2]) Ueber die sowohl in der bezeichneten Antikritik als auch in den Reuleaux'schen Aufzeichnungen enthaltenen Zeugenberichte mögen noch ein paar Worte hier Platz finden, um unser positives Urteil von vorhin zu rechtfertigen. Der Förster Haak hatte zwar selbst keine direkte Kenntnis, wusste aber wohl, dass abergläubische Leute die „Geisterstimmen" des Roederbachgrundes mit den um das alte, unheimliche Schloss von Thronecken schwebenden Sagen in Verbindung brachten. Ebenfalls aus dem Volksmunde hatte Oberförster Helbron seine Kenntnis, von dem der Ausdruck „singendes Thal" herrührt. Dies setzt ausser Zweifel ein Brief, den am 29. Dezember 1879 der Bürgermeister von Remagen, v. Lassaulx, an Reuleaux richtete. Oberförster Werbaum in Thronecken nannte sein Thal ein „singendes, pfeifendes oder musizierendes". Ferner schreibt der Forstkandidat Gericke aus Greifswald

Will man nicht überhaupt die Regeln ausser Kraft treten lassen, nach denen die Konstatierung von Naturereignissen auf dem Wege der Zeugenaussage gemeiniglich erfolgt, so wird man zugestehen müssen: An der Thatsächlichkeit spontaner Klangphaenomene von musikalischem Typus im Röderbachthale lässt sich vernünftigerweise nicht zweifeln. Dem Verständnis des Thatbestandes stehen hingegen sehr grosse Schwierigkeiten im Wege.

Zwei hervorragende Physiker, an die sich Reuleaux um Belehrung wandte, erklärten, wie ihre Zuschriften an den Fragesteller beweisen, eine exakte Erklärung für unmöglich. Ein dritter deutete an, dass jene Reflexionstöne, deren weiter oben Erwähnung geschah, wohl irgendwie im Spiele sein könnten, aber klargestellt sei der Zusammenhang in keiner Weise. Wir wollen versuchen, die überhaupt als möglich zu denkenden Kategorien der Prüfung zu unterziehen, um so vielleicht durch Ausschluss derjenigen, die nicht als brauchbar erfunden werden, der Wahrheit näher zu kommen.

Aehnlich, wie bei dem Triberger Phaenomene, könnte man die Aeolsharfe als ein Analogon heranziehen. Schon deren Erfinder Kircher legte Gewicht darauf,[1]) dass dieses originelle Musikinstrument nicht durch einen wie immer gearteten künstlichen Mechanismus, sondern einzig durch die Aktion des Windes zum Tönen gebracht werde. Man kann sich somit

---

1881, er habe die typischen Töne am 8. Dezember 1880 zwischen Fuchsstein und Erbeskopf, also gerade am kritischen Platze, vernommen. Noch gewichtiger sind drei Schreiben (4. Juni, 22. Juni, 5. Juli 1880) des bekannten Bismarck'schen Forstmeisters Lange aus Friedrichsruh, der im Jahre 1852 im oberen Hunsrück stationiert war und dort diese „wilde Jagd" mehrfach zu hören bekam. Von Reuleaux' Jagdgefährten an jenem Herbsttage des Jahres 1880 hatte der Gasthofbesitzer Blinzler aus Godesberg, dessen Anstand ein benachbarter war, ganz die gleichen Wahrnehmungen gemacht.

[1]) Athanasius Kircher, Phonurgia nova, Kempten 1573, S. 145 ff. „Aliam machinam harmonicam automatam concinnare, quae nulla rotarum, follium, vel cylindri phonotactici ministerio, sed solo vento ed aëre harmonicum sonum excitet".

auch ganz wohl denken, dass ohne jedes Zuthun des Menschen gelegentlich einmal eine derartige Tonbildung statt hat, wenn Stäbe oder Saiten, die einer Versetzung in longitudinale oder transversale Schwingungen fähig sind, von ungefähr dem Winde ausgesetzt werden. Wie jedoch das Wegstreichen des Windes über die Bäume statt des diffusen Geräusches, das jedermann kennt und als etwas Selbstverständliches betrachtet, wirkliche Töne hervorbringen soll, bleibt ganz ungeklärt. Nehmen wir aber auch für den Augenblick an, es liege eine solche Tonbildung im Bereiche des Möglichen, so müsste man solche seufzende Klänge, wie sie der Windharfe eigentümlich sind, recht häufig, in jedem vom Winde durchzogenen Walde hören, und daran ist doch nicht zu denken. Zudem will sich einer solchen Theorie auch die Beschaffenheit der vernommenen Töne durchaus nicht fügen. Dieselben waren voll, kräftig, harmonisch, aber es fand kein rascher Wechsel statt; dagegen weiss jedermann, der einer Aeolsharfe gelauscht hat, dass diesen förmliche Melodien, und zwar mit allen möglichen Aenderungen der Tonstärke, entströmen. Endlich ist der Ort, von dem die Klänge kommen, im letzteren Falle ein stabiler, während Reuleaux ein deutliches Hinwegziehen der tönenden Luftwellen über seinen Standort und ein Hervorkommen derselben von einer ganz bestimmten Oertlichkeit her konstatieren konnte. Es scheint deshalb diese Hypothese, so sehr sie sich auch dem ersten Eindrucke empfehlen mag, aufgegeben werden zu müssen.[1])

---

[1]) Ein Aufsatz von Sorel (Correspondance sur les sons produits par le vent, La Nature, 1883, I, S. 206 ff.), der übrigens die von Carus Sterne mitgeteilten Thatsachen, den „Glockenberg" und die Memnonsäule ohne gehörige Kritik zusammenwirft, will Reibungstöne als die wesentliche Veranlassung aller auffälligen Schallerscheinungen hinstellen. Wenn man einen Stab so halte, dass sich der Wind an ihm bricht, so vernehme man stets einen leisen Ton, wie von einer fernen Glocke, und so seien auch jene spontanen Naturklänge, von denen die Litteratur berichte, nur Folgen der sich in sehr verschiedener Weise bethätigenden Windreibung an Hindernissen. In so bequemer Art und Weise werden sich die verwickelten Ereignisse, die der genannte Autor im Sinne hat, schwerlich als Ausfluss ein und desselben mechanischen Faktums auffassen lassen.

Was das Triberger Phaenomene betrifft, so gestattet dasselbe, da eben doch nur eine ziemlich vage Schilderung vorliegt, keine gleich gesicherte Entscheidung; immerhin aber sprechen manche Anzeichen dafür, dass die unerklärlichen Schallerscheinungen im Schwarzwald wie im Hunsrück auf die nämliche Ursache zurückgeführt werden müssen.

Reuleaux selbst hat sich eingehend mit Spekulationen über die von ihm entdeckten Hochwaldtöne beschäftigt und zu diesem Zwecke die Lehre vom Schalle nach allen Richtungen durchgearbeitet, um Anknüpfungspunkte oder Analogien aufzufinden. Für ihn, den mit den örtlichen Verhältnissen bestens Vertrauten, unterlag es von allem Anfang an keinem Zweifel, dass die Konfiguration des Thales von ausschlaggebender Bedeutung sei, dass also nicht der Wald, sondern das Thal das „Singen“ verschulde. Nicht als ob das Thälchen eine besondere Plastik besässe, so dass man etwa auf die Reibung der bewegten Luft an Felsecken u. dgl. als auf den eigentlichen Grund verfallen könnte.[1]) Dasselbe hat ganz einfach eine Muschelform, deren Mundstück die enge Furche des untersten Laufes des Röderbaches darstellt. In diesen Kanal glaubt Reuleaux den Sitz der Tonentstehung verlegen zu müssen, ohne sich übrigens, wie er selbst einräumt, von deren Wesen eine zufriedenstellende Rechenschaft geben zu können. Am wahrscheinlichsten dünkt es ihm noch, dass bei einer ganz bestimmten Richtung der Wind mit grosser Energie in die Enge hineingepresst werde, und dass dort eine Luftstauung eintrete; diese wieder soll zu „Explosionen“ führen, „aus denen die eigentümlichen, selbsttönend werdenden Luftgebilde hervor-

---

[1]) Jeder derartige Erklärungsversuch, wie er ja nicht ferne liegt und auch schon aufgestellt wurde (Günther, Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im XIX. Jahrhundert, Berlin 1901, S. 555), wird hinfällig, wenn man die sanfte Profilierung des in Rede stehenden Gebirges kennt. Irgendwelche scharf hervortretende Unstetigkeiten fehlen den die Thäler begrenzenden Flächen, und es kommt auch angesichts der stark entwickelten Forstkultur der anstehende Fels nur selten dem Wanderer zu gesichte.

gehen.“ Hier nun stehen wir vor einem physikalischen Rätsel, und dass dem so, wird auch von Reuleaux bereitwillig zugestanden. Ebenso vermag er sich keine rechte Vorstellung zu machen von der Art des Fortschreitens der im Engpasse gebildeten Schwingungen;[1]) „von wandernden Tönen oder tönenden Bahnen in der Luft lehrt die Physik absolut nichts.“ Und nur solche könnten sich mit seinen eigenen Beobachtungen vereinbaren lassen. Reuleaux denkt an „selbsttönende Luftgebilde“ oder „tönende Körper“, die sich fortbewegen; kurz gesagt, an rotierende Luftwirbel von zylindrischer Gestalt, in deren Inneren, wie bei Tromben, die atmosphärische Verdünnung weit fortgeschritten sei. Carus Sterne weist, um diesen Bewegungsmodus verständlich zu machen, auf die bekannten Wirbelringe von Tait[2]) hin. So wahr es ist, dass diesen Rauchwirbeln die Eigenschaft der Erhaltung ihres Zusammenhanges während ihres Fortschreitens durch die Luft zukommt, ebensowenig ist davon bekannt, dass solche Wirbelbewegungen ins Tönen geraten können. Es würde das auch Allem widersprechen, was wir von Tonerregung wissen.

Ganz allgemein betrachtet, stellen uns die Wahrnehmungen im „singenden Thale“ vor zwei ganz verschiedene Fragen: Wo sind die Töne entstanden, und wie pflanzen sie sich fort? Was den zweiten Punkt angeht, so glauben wir an keine neue, unbekannte Gesetze der Naturlehre zu Hilfe nehmende Bewegungsform appellieren zu müssen, sondern es wurden eben die auswärts gebildeten Töne durch die herrschende Luftströmung in das Thal hineingetragen, und dass, nachdem

---

[1]) Reuleaux, Das singende Thal etc., S. 16 ff.

[2]) Tabakrauchversuche, die mit denjenigen von Tait die allergrösste Aehnlichkeit haben, wenn auch der Zweck, den der Experimentator im Auge hatte, ein ganz verschiedener war, hat wohl zuerst Sondhauss angegeben (Ueber die Form von aus runden Oeffnungen tretenden Luftströmungen, Ann. d. Phys. u. Chem., 85. Band (1852), S. 58 ff.). Die Wirbelnatur der niedrigen Rauchzylinder, welche sich beim Erschüttern des mit Rauch gefüllten Kästchens aus einem in dessen Vorderwand angebrachten Loche losringen, musste natürlich damals noch unberücksichtigt bleiben.

die bewegte Luft den Durchpass zurückgelegt hatte, eine fächerförmige Ausbreitung der Tonwellen und jenes Wogen der Töne stattfand, welches wir von den Orgeln kennen, und welches sich einfach durch die unvermeidlichen Schwebungen erklärt, hat ebenfalls nichts Verwunderliches an sich.

Dass von Reuleaux die Tonbildung in die Engstelle des Röderbachthales verlegt wird, haben wir soeben erfahren. Die näheren Umstände des Vorganges entziehen sich aber ganz unserer Kenntnisnahme, denn wie durch Luftstauung eine jähe Gleichgewichtsänderung, vergleichbar einer Explosion, herbeigeführt werden soll, ist nicht wohl abzusehen. Handelte es sich um eine Klamm, um einen Cañon von beträchtlicher Länge, so könnte man möglicherweise noch eher begreifen, dass die stark zusammengepresste Luft mit einer Detonation den Ausgang verliesse; erstlich aber wäre ein solcher Knall noch lange kein musikalischer Ton, und zum zweiten ist die Thalmündung, wenn auch vergleichsweise enge, doch sehr weit entfernt, eine schmale Spalte zu sein, wie man sie aus dem Hochgebirge kennt. Es bliebe nur wieder übrig, seine Zuflucht zu jener Klasse von Reibungstönen zu nehmen, welche von Savart[1]) und Sondhauss[2]) der Untersuchung unterstellt worden sind. Die Experimente des Letztgenannten würde Reuleaux wohl als eine Stütze für seine Anschauungen verwendet haben, wenn sie ihm nicht bei seinem sonst so fleissigen Durchforschen der einschlägigen Litteratur zufällig entgangen wären. Strömt die Luft durch die Oeffnung eines dickwandigen Gefässes aus, so kommen nach Sondhauss[3]) schöne und kräftige Töne von bestimmter Höhe zum Vorschein, indem die passierende Luft in longitudinale Oszillationen versetzt wird; je allseitiger die Reibung, umso kräftiger der Ton. Man könnte aus diesen Versuchen schliessen, dass distinkte Luftzylinder

[1]) Savart, Von den Vibrationsphaenomenen beim Ausfliessen von Flüssigkeiten durch kurze Ansatzröhren, ebenda, 90. Band (1853), S. 389 ff.

[2]) Sondhauss, Ueber die beim Ausströmen der Luft entstehenden Töne, ebenda, 91. Band (1854), S. 126 ff.

[3]) A. a. O., S. 233 ff.

vom Querschnitte der Oeffnung, sich abwechselnd verlängernd und verkürzend, sich vorwärts bewegten und für einen Beobachter, der sich nicht allzu weit von ihrer Fortschreitungsrichtung entfernt befände, den Eindruck hervorrufen könnten. den wir aus Reuleaux' lebensvoller Schilderung kennen.

Was aber im sorgfältig vorbereiteten Laboratoriumsversuche zutrifft, braucht darum noch nicht für die freie Natur zu gelten. Wir wiederholen vielmehr: Die Beschaffenheit der Gegend gestattet es nicht, die wandernden Töne mit denjenigen zu identifizieren, die zustandekommen, wenn Luft aus einer allseitig geschlossenen Oeffnung unter namhaftem Drucke austritt. Und was von durchschlagender Bedeutung ist: Hätte man es mit Sondhaussschen Reibungstönen zu thun, so müsste, so oft der Wind hinlänglich lebhaft aus der charakteristischen Weltgegend bliese, das Thal ins „Singen" geraten. So verhält es sich aber nicht; denn so wenig daran gezweifelt werden darf, dass unter besonders günstigen Umständen die Töne vernehmbar werden, ebensowenig lässt sich daran etwas ändern, dass nur äusserst selten jemand so glücklich ist, den Moment ihres Lautwerdens zu erhaschen. All das scheint uns den Schluss aufzunötigen, dass die geheimnisvollen Töne nicht erst im Thale selbst entstehen, sondern ausserhalb desselben gebildet worden sind und erst durch den Wind thalaufwärts fortgetragen werden.

Weitaus am nächsten läge es nun zweifellos, das Läuten von Kirchenglocken als die natürlichste und verständlichste Tonquelle anzusprechen. Pfarrdörfer gibt es in der Runde verschiedene; Thalfang, Lückenburg, namentlich aber Malborn könnten in betracht kommen. Zwar liegen diese Ortschaften zum teile reichlich weit von der kritischen Stelle entfernt, allein man weiss, dass sich die Töne oft in Entfernungen fortpflanzen, an die man vonvornherein kaum zu glauben geneigt wäre.[1])

---

[1]) Unter Hinweis auf die Arbeiten von Stokes (On the Effect of Wind on the Intensity of Sound, British Association of Dublin, 1857)

Zwei Gegengründe zwingen uns indessen, auf diese Deutung der Erscheinung zu verzichten. Die Kirchen des Hochwaldes entbehren nämlich einerseits, wie wir von Reuleaux erfahren, der eigentlichen Glocken, indem sie sich mit Glöckchen, denen der Dampfschiffe vergleichbar, behelfen, und andererseits sind die fraglichen Töne auch bei nacht, und überhaupt zu Zeiten wahrgenommen worden, in denen Glocken ganz sicher nicht geläutet wurden. Demgemäss ist es kaum mehr erlaubt, die Erscheinung mit irgendwelchem Eingreifen des Menschen in Zusammenhang zu bringen.

Wohl aber hindert nichts, den Sitz der Tonbildung in den Wasserlauf zu verlegen, der, aus dem Röderbachthale kommend, der Vereinigung mit einer grösseren Wasserader zustrebt.[1] Selbstredend liegt auch hier nur eine Hypothese vor,

---

und O. Reynolds (Refraction of Sound, Philosophical Transactions, 1876, I, S. 315 ff.) hat Reis (Ungewöhnlich weite Hörbarkeit von Tönen, erklärt durch Windbrechung, Humboldt, 2. Jahrgang, S. 53 ff.) gewisse Erfahrungen, die er selbst in dieser Hinsicht gemacht hatte, zu erklären gesucht.

[1]) Die nachfolgenden Betrachtungen entstammen einer Reise, welche der Verf. im März dieses Jahres nach Thronecken unternahm, um sich an Ort und Stelle über die Verhältnisse zu unterrichten. Dieser Zweck wurde allerdings nur unvollkommen erreicht. Reuleaux ist der Meinung, dass man die meiste Aussicht zu einer positiven Beobachtung habe, wenn man das Thal an einem kühlen Tage einer der beiden Uebergangsjahreszeiten, und bei ausgesprochenem Südwest, besuche. Diese beiden Vorbedingungen waren erfüllt; leider aber brachte besagter Wind, nachdem ein paar heitere Tage vorangegangen waren, ein furchtbares, jeden gründlichen Lokalaugenschein verhinderndes Schneegestöber von fast achtundvierzigstündiger Dauer. Man musste also noch sehr zufrieden sein, in einer der kurzen Pausen wenigstens einen allgemeinen Einblick in die Terraingestaltung gewonnen zu haben. Nebenher musste das überaus lebhafte und sehr weit hörbare, auch durch den heftigsten Sturm nicht zu übertönende Brausen der Mühlenwehre auf den Gedanken bringen, ob nicht hier vielleicht der Ursprung der Tonbildung zu suchen sei. Unter den Landesbewohnern gibt es, wie einschaltend bemerkt sei, zwei Parteien. Aufgeklärte Skeptiker, die auch in Dörfern nicht zu fehlen pflegen, stellen die Existenz eines „singenden" Thales überhaupt in abrede und wollen höchstens eigenartige Echos als vor-

die aber wenigstens als „Arbeitshypothese" brauchbar ist und dazu dienen kann, eine anscheinend ganz isoliert dastehende Erscheinung in Beziehung zu anderen Vorkommnissen zu setzen. Ehe wir näher auf dieselbe eingehen, wollen wir zuvor uns mit den von Wasserfällen erzeugten Tönen beschäftigen.[1]) Dem bereits erwähnten Quellentone, der dem allgemeineren Begriffe der Reibungstöne unterzuordnen ist, steht der genetisch einigermassen verschiedene Wasserfallton zur Seite.

Als Objekt physikalischer Erörterung hat denselben zuerst der Däne Oersted, der bekannte Entdecker des Elektromagnetismus, in sein Recht eingesetzt.[2]) Er hebt ausdrücklich hervor, dass man den leisen Laut, den der Strahl eines Springbrunnens von sich gebe, von dem störenden Plätschern scharf sondern müsse. Ein geübtes Ohr vermöge aber diesen Eigenton wohl herauszufinden, und wenn man dann eine auf diesen Ton abgestimmte Stimmgabel in der Nähe zum Schwingen bringe, so werde der Strahl sensitiv, d. h. er verliere, falls nur der erregte Ton eine genügende Intensität besitze, seinen Zusammenhang; ein erheblicher Teil des vorher zusammenhängenden, klaren Wasserstrahles löse sich in Staubnebel auf, zum Beweise, dass die Schwingungen, die nun in ihrer Amplitude entsprechend vergrössert wurden, schon vorher im Strahle enthalten gewesen seien. Angeregt von Oersted, sprach dann Pohl den Satz aus:[3]) Die von einem fallenden Wasser-

---

handen gelten lassen, wogegen wieder Andere die Thatsache zugeben und solche Töne auch wohl selbst gehört zu haben versichern.

[1]) In seinem Bestreben, alle irgend interessanten akustischen Gegenstände sich zu eigen zu machen, hatte Reuleaux der mehrfach zitierten Notizensammlung auch viele litterarische Daten über Wasserfalltöne einverleibt, ohne jedoch dem Gedanken Raum zu geben, ob diese letzteren nicht auch zu dem Probleme, mit dem er sich so angelegentlich befasste, in Kausalbeziehung stehen möchten.

[2]) Oersteds Gesammelte Schriften, deutsch von Kannegiesser, 1. Band (Der Geist in der Natur), Leipzig 1850, S. 39 ff. Der betreffende Essay führt die besondere Ueberschrift: „Der Springbrunnen."

[3]) Pohl, Akustische Briefe für Musiker und Musikfreunde, 1. Bändchen, Leipzig 1853, S. 83 ff.

strahle ausgelösten Laute sind zusammengesetzt aus einer Menge von musikalischen Einzeltönen. Wie dieselben zustande kommen, liess sich ziemlich gleichzeitig ergründen, indem Magnus,[1]) v. Feilitzsch[2]) und vor allem Tyndall[3]) die Durchsetzung eines Flüssigkeitsstrahles mit Luftblasen, welcher schon Venturi[4]) und Buff[5]) Beachtung geschenkt hatten, nach allen Seiten experimentell erforschten. Tyndall hat[6]) die Lehre von den sensitiven Strahlen auch zuerst systematisch abgehandelt. Die Luftbläschen, welche die tropfbare Flüssigkeit mit sich fortreisst, platzen unausgesetzt an verschiedenen Stellen des Strahles, am meisten natürlich in der Umgebung seines Auftreffens auf ein entgegenstehendes Hindernis, und diese winzigen Explosionsgeräusche summieren sich zu wirklichen Tönen.

Diesen gegenüber war man lange gleichgiltig geblieben. Es ist das unbestrittene Verdienst zweier zu gemeinsamer Arbeit verbundener Brüder, des Geologen A. Heim und des Musikers E. Heim, auch diesen im engeren Sinne akustischen Teil der Lehre von den Wasserfalltönen sorgfältig studiert zu haben.[7])

[1]) Magnus, Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten, Ann. d. Phys. u. Chem., 80. Band (1851), S. 1 ff.

[2]) v. Feilitzsch, Ueber den Ausfluss der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand, ebenda, 63. Band (1844), S. 1 ff.

[3]) Tyndall, Phenomena of Water Jet, Philosoph. Magazine, (4) 1. Band (1851), S. 176 ff.

[4]) Venturi, Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides, Paris 1797 (Bulletin de la Société Philomatique). Gegen Venturis Ansicht, dass das strömende Wasser adhärierende Luft mit sich fortreisse, ist Magnus wohl zu schroff aufgetreten.

[5]) Buff, Einige Bemerkungen über die Erscheinung der Auflösung des gewöhnlichen Strahles in Tropfen, Ann. d. Phys. u. Chem., 27. Band (1832), S. 162 ff. Die im trüben Teile des Strahles enthaltenen Tropfen werden durch elektrisches Licht sichtbar gemacht.

[6]) Tyndall, Der Schall, deutsch von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869, S. 292 ff.

[7]) A. Heim, Töne der Wasserfälle, Dinglers Polytechnisches Journal, 219. Band, S. 344 ff.; E. Heim, Töne der Wasserfälle, Verhandl. d. Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, 1874, S. 209 ff.

Die Anzahl der eigentlichen Kaskaden und kräftig rauschenden Gebirgsbäche, die phonetisch geprüft wurden, war gross, und durchweg stellte sich eine nahezu vollkommene Uebereinstimmung des Prüfungsbefundes heraus. Am deutlichsten ist der C Dur-Dreiklang, begleitet von einem tiefen, brummenden F. Dieser letztere Ton erscheint desto stärker ausgebildet, je grösser die fallende Wassermasse ist; fällt das Wasser hoch herab, so kann man F selbst noch hinter Bergen und Wäldern aus dem dumpfen Getöse heraushören. „Wenn man", so äussert sich E. Heim, „am Ufer eines rauschenden Wassers ein Lied in anderer Tonart als in C Dur zu singen versucht, dann entstehen sehr hässliche Dissonanzen mit dem Wasser." Die vier Töne C, E, G, F, von denen E sich am wenigsten bemerklich macht, wiederholen sich, zum öfteren in verschiedenen Oktaven, bei jedem energischeren Wassergebrause. Aus Privatmitteilungen von Prof. Pechuel-Loesche geht hervor, dass drei bekannte Wasserfälle, der Niagara-Fall, der Yosemite-Fall in Kalifornien und der Regenbogen-Fall auf der Insel Hawaii tiefe Töne, wie von einer Riesenorgel, ertönen lassen, wenn man nur seinen Standpunkt in hinreichender Entfernung gewählt hat, um den wuchtigen Dreiklang nicht durch das Plätschern und Tosen gestört zu erhalten. Auch die bekannte Kalema-Brandung an der Küste von Nieder-Guinea bringt (Pechuel-Loesche, Die Loango-Expedition, 3. Band, I, Leipzig 1882, S. 20) zur Nachtzeit, wenn andere Naturstimmen schweigen, regelrecht rhythmische Klänge hervor.

Wie nun sollen diese Wassertöne das Reuleaux'sche Phänomen zuwege bringen? Im Röderbachthale selber sind Wasserfälle nicht vorhanden; wohl aber liegen an der kurzen Laufstrecke des Baches zwischen seinem Austritte aus der mehrgenannten Engstelle und seiner Einmündung bei Thronecken drei Mühlen in angenähert gerader Linie. Die Wehre, über welche das Wasser zu stürzen gezwungen ist, bewirken ein lebhaftes Brausen, das, wie erwähnt, auch dem entfernter Stehenden auffällt. Und die Linie der Mühlen ist gegen Südwesten gerichtet, so dass der aus dieser Weltgegend kommende

Wind die drei Fälle, die an und für sich zwar nur klein sind, in ihrer Vereinigung aber doch einen ganz stattlichen Effekt ergeben, folgeweise zu überstreichen hat. So kann er sehr wohl die Töne, deren Entstehungsort in seiner Richtung liegt, unter besonders günstig gelagerten Umständen mit sich fortführen und in das sich vor ihm öffnende Thal hineintragen. Reuleaux liess einen Jäger, der ein Waldhorn bei sich hatte, unmittelbar nach der beschriebenen Episode Töne blasen, und da zeigte sich, dass das kleine C des Jagdhornes sich vollständig mit dem rätselhaften Tone in der Luft deckte. Dieses C aber gehört, wie wir sahen, gerade zu den typischen Wasserfalltönen.

Kann diese Erklärung, welche erwähntermassen zunächst aus einem Besuche des Schauplatzes hervorgegangen ist, den Anforderungen einer abschliessenden Theorie genügen? Dies zu behaupten, sind wir weit entfernt. Gleichwohl lässt sich zu ihren Gunsten wenigstens das anführen, dass sie sich ausschliesslich auf feststehende Thatsachen stützt und den Erfahrungen grossenteils entspricht. Vorzugsweise darauf sei einiger Nachdruck gelegt, dass, wenn die bewegte Luft als Trägerin der vom Wasser erzeugten Töne aufgefasst wird, die grosse Seltenheit, mit der das Phaenomen offenbar auftritt, nahe genug gelegt wird. Die geringste Ungleichförmigkeit der Tonbildung in den drei Ursprungsstätten muss eine kumulative Wirkung hintanhalten, und auch die Windrichtung braucht sich nur ein wenig zu ändern, um jede Wirkung illusorisch zu machen. Wenn gefragt werden wollte, weshalb denn nicht auch das dumpf dröhnende F gehört ward, so liesse sich erwidern, dass dieser Begleitton ja wesentlich an hohen Wasserstürzen haftet, von denen hier nicht die Sprache ist. Ueberhaupt aber steht uns ja noch keine eigentlich akustische Analyse der im Thale gehörten Klänge zur Verfügung; der einzige unter allen Denen, die etwas von der Erscheinung aus eigener Erfahrung wussten, und die zugleich die erforderliche fachwissenschaftliche Bildung besassen, war Reuleaux selbst, und er that, was in seinen Kräften stand,

indem er durch einen Hornruf den vernommenen Ton fixierte. Dieser war der intensivste; die übrigen Töne des Akkordes können mutmasslich den ersteren begleitet haben, ohne dass sie sich dem Gehöre gleich stark aufdrängten. Die Möglichkeit, dass beim Durchgehen des zum Tönen gebrachten Windes durch den unteren Engpass eine gewisse Selektion der Töne stattgehabt habe, so dass von den der bewegten Luft übermittelten Schwingungszuständen nur noch ein einziger Energie genug besessen hätte, um das Ohr zu affizieren, soll übrigens nicht geleugnet werden. Ein ungeübtes Gehörorgan mag in solchem Falle vielleicht eine viel weniger musikalische Einwirkung erfahren; der Forstmeister Lange zum mindesten, dessen wir oben als eines klassischen Zeugen gedachten, entsinnt sich nur eines heftigen, ihm unerklärlichen Gepolters in dunkler Nacht, welches seinen Begleiter einmal derart erschreckte, dass er sich nicht an den Rendezvousplatz zu kommen getraute. Wenn es sich so verhält, wie es unsere Darstellung wahrscheinlich zu machen sucht, so ist auch leicht zu verstehen, dass der Weg, den die wandernden Töne zurücklegen, nicht immer die gleiche Länge zu haben braucht. Ist doch die schon aus früheren Versuchen von Regnault und Mach folgende Annahme, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles auch von dessen Stärke abhängt, neuerdings völlig bestätigt worden.[1]) Der Wasserreichtum des Baches bedingt die Mächtigkeit der Töne, und je nachdem diese eine grössere oder geringere ist, wird auch die Zeit eine verschieden

---

[1]) Ueber diese ältere Phase der die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Intensität nachweisenden Untersuchungen gibt Auskunft Rosenberger (Die Geschichte der Physik in Grundzügen, 3. Teil, Braunschweig 1887—1900, S. 752 ff.). Neuere Bewahrheitungen des Erfahrungssatzes, dass sich Wellen von grosser Amplitude rascher als Wellen von kleiner Amplitude fortpflanzen, hat man von Jacques (Velocity of very laid Sounds, Silliman's Journal, 1879, S. 116 ff.) und von Frechon (Sur la vitesse des sons, La Nature, 1883, S. 286 ff.). Die Intensität des Schalles variiert jedoch, wenn die Tonquelle ihren Ort wechselt, wie Segnitz (Ueber den Einfluss der Bewegung auf die Intensität des Schalles, Ann. d. Phys. u. Chem., 85. Band (1852), S. 384 ff.) gefunden hat.

grosse sein, nach deren Ablauf erstere die Thalmündung erreichen. Hiedurch wird aber dann auch wieder die Hörbarkeit der Töne im Bereiche der Thalweitung beeinflusst.

Wie schon bemerkt, wäre es vermessen, zu glauben, mit dieser Zurückführung der Erscheinung auf bekannte Vorgänge sei nun das Rätsel endgiltig und in allen seinen Teilen gelöst. Davon sind wir noch weit entfernt; zumal die Rolle, welche der gewiss nicht gleichgiltigen Enge des Thalausganges zuzuweisen ist, bedarf noch sehr der Aufklärung. Sicher steht für uns nur das Eine, dass die beiden Phaenomene von Triberg und von Thronecken einen einheitlichen Charakter an sich tragen, und dass beide in innigem Zusammenhange mit den diese Thäler durcheilenden Gewässern stehen.

Keinenfalls dürfen wir daran denken, dieselben aus der gleichen Ursache herzuleiten, welche dem dritten der drei oben auseinandergehaltenen Erscheinungskomplexe zu grunde liegt, wie dies wohl versucht wurde. Dieser ist wieder eine Sache für sich allein.

γ) Singende Felsen. Dafür, dass Felsen musikalische Töne aus ihrem Inneren hervorgehen lassen, liegen unseres Wissens blos zwei Beispiele vor, und zwar sind die beiden Orte, von denen dies mitgeteilt wird, einander nahe benachbart, indem sie sich an den Ufern des Orinoko in Südamerika befinden.[1]) Wir verdanken unsere Kenntnis dieser merkwürdigen Oertlichkeiten A. v. Humboldt und dem französischen Reisenden Roulin. Pechuel-Loesches afrikanische Erfahrungen mögen auch bei dieser Gelegenheit besprochen werden. Ein weiterer, von Ch. Darwin mitgeteilter Fall dürfte nur sehr bedingt dieser Gruppe einzureihen sein.

---

[1]) Die ziemlich häufig, so auch in der Humboldt'schen Reisebeschreibung, mit den Felsentönen verglichenen singenden Geräusche, welche man in älterer Zeit an der Memnonsäule zu Theben und auch an einem Tempel des nahe gelegenen Karnak um die Zeit des Sonnenaufganges gehört haben wollte, bleiben hier ausser betracht. Menschliche Artefakte lassen sich nicht mit dem an Naturerscheinungen anzulegenden Massstabe messen. Vgl. Lepsius, Briefe aus Aegypten, Berlin 1852.

Die Wahrnehmungen v. Humboldts[1]) mögen hier nach der von ihm selbst anerkannten Uebersetzung wiedergegeben werden, weil eine Paraphrase die Deutlichkeit nicht zu vermehren geeignet wäre. „Der Granitfels, auf dem wir lagerten, ist einer von denen, auf welchen Reisende zu Zeiten gegen Sonnenaufgang unterirdische Töne, wie Orgelklang, vernommen haben. Die Missionare nennen dergleichen Steine laxas de musica. ‚Es ist Hexenwerk (cosa de bruxas)', sagte unser junger Steuermann, der kastilianisch sprach. Wir selbst haben diese geheimnisvollen Töne niemals gehört, weder in Carichana, noch am oberen Orinoko; aber nach den Aussagen glaubwürdiger Zeugen lässt sich die Erscheinung wohl nicht in Zweifel ziehen, und sie scheint auf einem gewissen Zustande der Luft zu beruhen. Die Felsbänke sind voll feiner, sehr tiefer Spalten und erhitzten sich bei tage auf 48 bis 50 Grad. Ich fand oft ihre Temperatur bei nacht an der Oberfläche 39°, während die der umgebenden Luft 28° betrug. Es leuchtet alsbald ein, dass der Temperaturunterschied zwischen der unterirdischen und der äusseren Luft sein Maximum um Sonnenaufgang erreicht, welcher Zeitpunkt sich zugleich vom Maximum der Wärme am vorhergehenden Tage am weitesten entfernt. Sollten nun die Orgeltöne, die man hört, wenn man, das Ohr dicht am Gesteine, auf dem Fels schläft, nicht von einem Luftstrome herrühren, der aus den Spalten dringt? Hilft nicht der Umstand, dass die Luft an die elastischen Glimmerplättchen stösst, welche in den Spalten hervorstehen, die Töne modifizieren?" Dieses letzterwähnte Moment möchten wir nicht sehr hoch einschätzen; darin aber ist dem grossen, hier auf einem noch recht wenig bebauten Felde sich ergehenden Naturforscher unbedingt zuzugeben, dass die durch die Klüfte des Granits streichende Luft es ist, die sich akustisch bethätigt. Es fragt sich nur, wie wir uns die Modalitäten dieser Bethätigung vorzustellen haben.

---

[1]) A. v. Humboldt, Rélation historique, 6. Band, Paris 1824, S. 377; Gesammelte Werke (neue Cotta'sche Ausgabe ohne Jahrzahl), 3. Band, S. 91 ff.

Roulin erzählt,[1]) ein gleichfalls granitischer Felsblock, von seinen Begleitern „el castillo“ genannt, habe durch seine eigentümliche Schichtung, d. h. durch die bekannte paraklastische Zerklüftung des Urgesteines, die Augen der Reisenden auf sich gelenkt. Der Klotz erwies sich nicht als massiv, sondern als „sanduhrartig“ ausgehöhlt. Durch zufällige Berührung ins Schwanken geraten, sandte er tiefe, sonore Töne aus;[2]) absichtlich erteilte Stösse dagegen brachten zwar gleichfalls Tonerscheinungen zuwege, aber dieselben waren weitaus schwächer. Auch Roulin thut des spanischen Wortes „laxas de musica“ Erwähnung und bemerkt, dass „laxa“ eine Steinplatte bedeute. Musikalische Platten sind es also, welche am Orinoko zu finden sind.

Die bekannten Absonderungserscheinungen an plutonischen Felsarten bewirken, dass auch eine mächtige Gesteinsmasse in ein Aggregat parallelepipedischer Bestandteile verwandelt wird; beim Fortschreiten des Verwitterungsprozesses fällt der Fels in ein Blockmeer auseinander. Dass die so entstehenden Spalten kleinen Luftmengen den Durchzug gestatten, versteht sich ganz von selbst, und damit ist auch gesagt, dass zur Bildung von Reibungstönen mannigfache Gelegenheit geboten ist. Wie dieselben jedoch zu tiefen, klangvollen Orgeltönen werden können, bedürfte noch einer Erklärung, und eine solche möchte wohl schwer zu erbringen sein. Da fühlt man sich denn aufgefordert, eine Erscheinung zur Aushilfe heranzuziehen, für deren Eintreten alle Voraussetzungen gegeben sind. Die einzelnen sich wechselseitig überlagernden Platten können sich unmöglich ihrer ganzen Flächenausdehnung nach berühren;

---

[1]) Roulin, Note sur certains blocs granitiques de l'Orénoque, et sur la cause des bruits qu'on a entendus au lever du soleil, Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques (de Férussac), 11. Band (1829), S. 52 ff.

[2]) „Dans un de ces bonds je frappais un mamelon arrondi de la base, qui, à ma grande surprise, rendit un son plein, prolongé, tout-à-fait analogue à celui qu'on produit en frappant des doigts réunis la caisse d'un piano, dont le couvercle est levé.“

die wirkliche Berührung wird in der Regel auf einige wenige Punkte beschränkt sein. Sobald dann die Temperierung der beiden einander gegenüber stehenden Grenzflächen einen gewissen Grad überschritten hat, beginnt jene alternierende Bewegung, welche bei dem in der Experimentalphysik wohl bekannten Trevelyan-Instrumente oder Wackler Töne erzeugt.[1]) Ursprünglich war man in dem Wahne befangen, zur Hervorbringung dieser Töne seien ausschliesslich Metallplatten geeignet; Tyndall dagegen hat[2]) die Nichtigkeit dieser Beschränkung dargethan und z. B. Steinsalz als einen sehr leicht in Schwingungen geratenden Stoff aufgezeigt. Es wäre auch a priori nicht abzusehen, aus welchem Grunde eine Steinplatte nicht dieselben Dienste sollte leisten können. Nur insofern werden Töne dieser Art bei Materialien von anderer petrographischer Zusammensetzung minder leicht hervorzubringen sein, weil gerade der Granit durch seine Tendenz zur Zerklüftung sozusagen der Tonbildung vorarbeitet. Je labiler der Gleichgewichtszustand ist, in dem sich eine Gesteinsmasse befindet, so dass dieselbe leicht in eine oszillatorische Bewegung gerät, umso mehr ist, wie dies Roulins Erfahrung augenfällig zeigt, die Gelegenheit zur Hervorbringung der Trevelyan-Töne gegeben. Nicht völlig identisch, aber doch nahe verwandt sind die Felsentöne, die man nach Pechuel-Loesche (Zur Kenntnis des Herero-Landes, Ausland, 1886, S. 822 ff., S. 852, S. 890) in den Felseinöden Deutsch-Südwestafrikas vernehmen kann. Es ist eine Art Musik, wiewohl keine sehr harmonische; wie man sie etwa durch Blasen auf einem Kamme hervorbringt. Durch Abschuppung, Desquamation (Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, S. 204) haben sich dünne Gesteinsschalen losgelöst, die aber doch noch an einzelnen Punkten

[1]) Die Anfangsstadien unserer Einsicht in die wahre Natur des Wacklers, dessen Eigenschaften man anfänglich nicht in ihrer thatsächlichen Einfachheit erkannte, kennzeichnet Rosenberger (a. a. O., S. 271 ff.).

[2]) Tyndall, On the Vibration and Tones produced by the Contact of Bodies having different Temperatures, Philos. Magaz., (4) 8. Band (1854), S. 252 ff.

mit dem Mutterblocke zusammenhängen, und wenn nun der Wind diese Platten vibrieren lässt, dringen merkwürdige Töne in das Ohr des erstaunten Reisenden. Reine Reibungstöne erscheinen dagegen in einem anderen Falle. Die durch Erosion oft unglaublich zerklüfteten Lateritgebilde Westafrikas (Pechuel-Loesche, Loango-Expedition, 3. Band, I, S. 39; Kongoland, Jena 1887, S. 333) geben dem durch sie hindurchstreichenden Winde Gelegenheit, die mannigfaltigsten Klangerscheinungen, sogar heftigen Lärm, zu erzeugen, so dass die Neger des Glaubens leben, ein unterirdisch verborgenes Riesentier verrate auf solche Weise seine Anwesenheit. Die Zerrissenheit des in Obelisken, Pyramiden, Türme mit eingestreuten Mulden und Zinken aufgelösten, mürben Gesteines begünstigt in seltenem Masse die akustischen Wirkungen der Luftreibung.

Der dröhnende Berg der chilenischen Kordilleren, von welchem Ch. Darwin, der diesen „Bramidor“ (Brüller) nicht selbst gesehen hat, auf Hörensagen hin berichtet,[1]) gehört, worauf wir gleich anfangs hinwiesen, aller Wahrscheinlichkeit nach nicht in diese Kategorie. Ganz klar geht ja aus den wenigen Worten nicht hervor, ob der rollende Sand, der nach Angabe der Chilenen dortselbst beobachtet wird, die Ursache der Tonbildung oder nur eine zufällige Begleiterscheinung ist. Lediglich um der Vollständigkeit willen musste aber auch dieser „singende“ Berg berücksichtigt werden.

III. Abrupte Knalle.

Der Ton im Gegensatze zum blossen Geräusche bildete das charakteristische Erkennungszeichen für diejenigen akustisch-geographischen Erscheinungen, die in unserer zweiten Abteilung abgehandelt wurden, wogegen der ersten gewisse, ihrer Ent-

[1]) Ch. Darwins Reise-Tagebuch, herausgegeben von A. Kirchhoff, Halle a. d. S. 1893, S. 380. Der im Thale von Copiapó gelegene Berg gehört anscheinend weit mehr dem von früher (S. 26 ff.) bekannten Typus Djebel Nakus als demjenigen der Laxas de Musica an, zu dem man ihn hat stellen wollen.

stehung nach bekannte Geräusche zugewiesen waren, die sich unter günstigen Umständen und unter Mitwirkung von Resonanz zu Tönen ausbilden konnten. Von diesen letzteren wird nunmehr gänzlich abgesehen. Einziges Objekt der Betrachtung sind jene dumpfen, meist kurz dauernden Knalle, welche vielfach für fernen Geschützdonner gehalten werden und in einzelnen Fällen wohl auch diesen Ursprung haben, die aber viel zu häufig vorkommen und auch eine viel zu grosse geographische Verbreitung haben, als dass man dieselben so leicht einer einzigen, stets ausreichenden Erklärungsweise zu subsumieren vermöchte. Schon die ungemein grosse Abwechslung in der Benennung dieser Lufterschütterungen spricht dafür, dass wirklich ein recht vielgestaltiges Phaenomen der Aufhellung wartet. Bezüglich der Nomenklatur kann man sich zunächst an den schon eingangs als wichtige Quelle der Belehrung angeführten Aufsatz von L. Weber[1]) und an die kürzere Skizze von Sieger[2]) halten. Die niederdeutsche Bezeichnung Mistpoeffer, die darauf hindeutet, dass die Detonationen zumeist bei nebligem Wetter (mist englisch und holländisch = Nebel) gehört werden, hat auch in unsere wissenschaftliche Sprache Eingang gefunden; die beste Uebertragung in das Hochdeutsche würde also Nebelknalle sein. Auch als Nebelrülpse und Luftpuffe werden dieselben gelegentlich bezeichnet. Die Flamänder verlegen den Sitz der Gleichgewichtstörung, die sich in ihrem Lande besonders häufig bemerklich macht, auf das Meer und sprechen von „Zeepoeffers,“ französisch „Rots de mer.“ Wieder in anderen Ländern ist vom Seeschiessen die Rede, und in der Schweiz gibt es eine Menge Lokalausdrücke, über welche die sehr fleissig gearbeitete, diesem Teile einer „akustischen Folklore“ umsichtig Rechnung tragende Studie des Grafen

---

[1]) Leonh. Weber, Ueber die sogenannten Mistpoeffers, Schriften d. Naturwissensch. Ver. f. Schleswig-Holstein, 11. Band, S. 66 ff. Vgl. oben S. 19.

[2]) Sieger, Seeschiessen, Wasserschüsse, Nebelrülpse, Luftpuffe, Globus, 71. Band, S. 333 ff.

Zeppelin[1]) Auskunft erteilt. So kennt man im Kanton Freiburg ein Murtener Schiessen; im Kanton Luzern, wo sich das gleichnamige Dorf befindet, ein Rothenburger Schiessen. Neuerdings endlich sind wir mit den bengalischen Barisal Guns („Kanonen von Barisal") und, durch Cancani,[2]) mit der Marina Mittelitaliens bekannt gemacht worden, die sich besonders in der Provinz Umbrien hören lässt. So weit aber auch die Orte, von denen uns einschlägige Nachrichten zugingen, aus einander entfernt liegen — und durch die dankenswerten Zusammenstellungen von van den Broeck[3]) und Penck[4]) ist unsere Kenntnis in dieser Hinsicht noch beträchtlich vermehrt worden —, so steht doch soviel fest, dass allenthalben die Art und Weise, wie sich die Knallgeräusche dem Hörer vernehmlich machen,[5]) eine wesentlich übereinstimmende ist. Damit soll jedoch nicht entfernt gesagt sein, dass nun auch rückwärts von gleichen Wirkungen auf eine konstante, unveränderliche Ursache geschlossen werden darf.

Ob man mit van den Broeck und Lancaster die Kenntnis der Nebelknalle bereits auf den englischen Philosophen und

---

[1]) Graf E. Zeppelin, Zum sogenannten „Seeschiessen", Schriften d. Ver. f. Gesch. d. Boden-Sees u. seiner Umgebung, 25. Heft, Lindau i. B. 1896, S. 30 ff.

[2]) Cancani, Barisal Guns, Mistpoeffers, Marina, Bollettino della Società Sismologica Italiana, 3. Band (1897), S. 222 ff.

[3]) van den Broeck, Un phénomène mystérieux de la physique du globe, Ciel et Terre, 1895, S. 447 ff.; 1896, S. 110 ff. Von der Abhandlung ist auch, unter gleichem Titel, eine separate Buchausgabe (Brüssel 1896) erschienen.

[4]) Penck, Ein mysteriöses Phaenomen der Geophysik, Meteorolog. Zeitschr., 14. Band (1897), S. 143 ff.; 16. Band (1899), S. 227 ff. Nach van den Broeck gearbeitet, aber eine Menge neuer Thatsachen beibringend. — Andere deutsche Bearbeitungen der Monographie des belgischen Gelehrten sind die folgenden: Samter, Ein akustisches Phaenomen, Himmel und Erde, 9. Band (1897), S. 380 ff.; Mistpoeffers, Ann. d. Hydrographie u. marit. Meteorologie, 25. Jahrgang (1897), S. 160 ff.

[5]) Einzelne Berichterstatter haben van den Broeck versichert, dass mit dem Gehöreindrucke eine merkbare Erschütterung des ganzen Körpers hand in hand gegangen sei; das scheint jedoch eine seltene Ausnahme zu sein.

Naturforscher Lord Francis of Verulam zurückführen darf, lassen wir dahingestellt.[1]) Die Volksmeteorologie legte sich, den von unseren Gewährsmännern gegebenen Proben gemäss, dumpfe Laute in der Luft verschieden zurecht; in Frankreich sollten sie gutes Wetter, in England, wie der Dichter Parnell[2]) verkündet, sollten sie Regen anzeigen. Auf einen festeren Boden gelangen wir erst im XVIII. Jahrhundert, und zwar war es der später berühmt gewordene Geologe O. Fraas, der vor fünfzig Jahren die Naturforscher aufforderte,[3]) sich mit einer bisher wenig beachteten Erscheinung zu beschäftigen, die in einem speziellen Falle auch der bekannte Alpinist Hugi[4]) bemerkt und in seinem gewohnten, etwas phantastischen Stile zu erklären versucht hatte.[5]) Fraas teilt mit, dass im Oktober

---

[1]) Bacons oft äusserst konfuse Ansichten über den Schall (Sylva Sylvarum or a Natural Historie, ed. Rawley, London 1631, Century II und III) lassen selten erkennen, ob seine Behauptungen einen thatsächlichen Befund zur Grundlage haben. Einigermassen könnte noch von geschichtlicher Bedeutung sein ein Passus in der Aufzählung der verschiedenen Witterungsvorzeichen. Dort heisst es nämlich (Historia naturalis et experimentalis de ventis, Leiden 1638, S. 150): „Sonitus a montibus nemorumque murmur increbrescens, atque fragor etiam nonnullus (sic!) in campestribus, ventos portendit. Coeli quoque murmur prodigiosum, absque tonitru, ad ventos maxime spectat." Dieser „donnerlose, murmelnde Laut," der kein Donner ist, kann vielleicht als Mistpoeffer gelten.

[2]) Thom. Parnell, Poetical Works, ed. Pope, London s. a. (Nach van den Broeck).

[3]) O. Fraas, Detonationen in den höheren Luftschichten, Jahreshefte d. Ver. f. vaterländ. Naturkunde in Württemberg, 6. Jahrgang (1850), S. 127 ff.

[4]) Hugi, Naturhistorische Alpenreise, Solothurn 1830, S. 58 ff. Die Wahrnehmungen des um die Gletscherkunde verdienten, gewagten Spekulationen aber im Geiste der noch teilweise herrschenden Naturphilosophie über Gebühr hingegebenen Mannes bezogen sich auf das vereiste Rotthal in der Jungfraugruppe, dem der Volksmund ohnehin allerlei Abenteuerliches nachsagt (vgl. v. Berlepsch, Die Alpen, in Natur- und Lebensbildern dargestellt, Jena 1885, S. 152 ff.).

[5]) Er war geneigt, einen ohne optische Begleiterscheinungen sich vollziehenden, langsamen Ausgleich der beiden entgegengesetzten Elek-

und November 1847 Landleute in der Gegend von Balingen (südwestl. Württemberg) entfernten Donner bei heiterem Himmel gehört und mit dem damals gerade entbrannten Sonderbundskriege in der Schweiz in Verbindung gebracht hatten, was sich aber bald schon der Zeit halber als unstichhaltig herausstellte.[1]) Bald darauf, zu Anfang des Jahres 1848, hörte Fraas selbst die fernen Donnerlaute im tiefsten Frieden. Schöne Frühlings- und Herbsttage schienen ihm das Phaenomen besonders zu begünstigen, während Witterungsumschlag wirkungslos verblieb. Alle zwei bis fünf Minuten liess sich, wenn man auf freier Höhe stand, ein dumpfer Schlag vernehmen, dessen Richtung kaum angebbar war. Es ist ein eigenartiges Zusammentreffen, dass, wie wir vom Grafen Zeppelin erfahren, im gleichen Jahre 1850, welches die Notiz von Fraas brachte, auch der bekannte Erforscher der deutschen Heldensage, Baron Lassberg in Meersburg am Boden-See, seine schon längere Zeit gemachten Beobachtungen einer Anzahl befreundeter Gelehrten aus Schwaben vorlegte, ohne dass allerdings zunächst weitere Kreise hievon erfuhren.

Nachdem wir so eine kurze Geschichte der Studien über Nebelknalle gegeben haben, tritt als nächste Anforderung die an uns heran, die nachgewiesene geographische Verbreitung der Luftgeräusche näher kennen zu lernen. Die Fragebogen, welche van den Broeck in sehr zweckmässiger Anordnung verschickte, und der Sprechsaal, den die Redaktion der englischen „Nature“ in dieser Zeitschrift für einschlägige Mitteilungen einrichtete, haben es bewirkt, dass ein recht stattliches Material zusammenkam. Zunächst ist Flandern und überhaupt das flache Belgien, bis hinein in die Provinz Luxemburg, als ein Schauplatz der Mistpoeffers zu nennen. Aus dem

---

trizitäten in der Atmosphäre, also eine Art Donner, zur Erklärungsbasis zu nehmen.

[1]) Vom Grafen Zeppelin wird auch berichtet, dass die an Kanonenschüsse erinnernden Nebelknalle das im Kanton Aargau kantonnierende eidgenössische Heer in Verwirrung gebracht habe, bis dann Eingeborene über den Sachverhalt aufklärten.

nördlichen Deutschland und aus Skandinavien fehlen genauere Berichte;[1]) dagegen mangelt es an solchen gar nicht aus Südwestdeutschland und Oesterreich. Penck, der sich (s. o.) namentlich auf die Erfahrungen von A. E. Forster beruft, führt das Illergebiet, die obere Donau, das Wettersteingebirge, das Gebiet des Boden-Sees im weitesten Umfange, Mähren, wo es einen „Donnerberg" geben soll, die Senke von Laibach mit ihrem „Grimberg" und Dalmatien als Oertlichkeiten an, in deren Bereiche sich gelegentlich die dumpfen Knallaute vernehmen lassen. In Grossbritannien gilt Perthsire, in Italien erwähntermassen Umbrien als das Land der Nebelschüsse. Auch in Amerika sind dieselben keineswegs unerhört; unter denen, welche van den Broecks Anfragen beantworteten, befand sich auch der Oberstleutnant Donneux, der den Staat Colorado, sowie Mexiko und Zentralamerika überhaupt als Heimstätten unserer Erscheinung namhaft macht, und C. Sapper, zweifellos der beste Kenner der Geographie von Guatemala, bezeugt bei Penck, dass in diesem Staate jedermann mit solchem fernen Donner bekannt sei. Endlich verlangen, wie gesagt, die nach dem im Gangesdelta gelegenen Orte Barisal zubenannten „Kanonenschläge" besondere Beachtung; dieselben erstrecken sich über ein weites Areal und werden sogar noch in Assam gehört. Korrespondenznachrichten aus verschiedenen Teilen der niederländischen Besitzungen in Hinterindien hat der Utrechter Geologe Wichmann eingeholt und in der „Natuurkundig Tijdskrift van Nederlandsch-Indie" (1890—1893) zur

---

[1]) Allerdings gehören zu den mancherlei Rätseln, welche der grosse Wettern-See in Schweden der physikalischen Geographie zu raten aufgibt, auch gewisse dort auftretende Schallerscheinungen. Allein aus Siegers sorgfältiger Darstellung (Seeschwankungen und Strandverschiebungen in Skandinavien, Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde zu Berlin, 28. Band, S. 73 ff.) geht anscheinend hervor, dass die dortigen Schallgeräusche auf das engste mit Vorgängen, welche sich innerhalb des Seebeckens selbst vollziehen, zusammenhängen, so dass also wohl eine äusserliche Aehnlichkeit, nicht aber eine innere Verwandtschaft mit den Luftknallen bestehen würde.

Kenntnis gebracht. Aus Südamerika sind nur vereinzelte Meldungen, und zwar von seiten der deutschen Reisenden Meyen[1]) und v. Bibra,[2]) zu uns gedrungen. Der erstgenannte huldigte der Meinung, dass das von ihm angeblich gesehene, in Wirklichkeit aber wohl in das Reich der optischen Täuschungen zu verweisende „Nachleuchten erloschener Krater“ gewöhnlich von einem fernen Dröhnen begleitet sei. Der ruhige v. Bibra glaubt zwar die Lichterscheinung ebenfalls wahrgenommen zu haben, kann sich aber des dumpfen Donners, den sein Vorgänger gehört haben wollte, mit Bestimmtheit nicht entsinnen. Aus Afrika endlich stammt nur eine vereinzelte Mitteilung über unerklärliche Lufterschütterungen am Kongo. Von Professor Pechuel-Loesche wird uns allerdings mitgeteilt, dass er die bewussten Knalle, die ihm auch in den irischen Mooren und in den „Plains“ Nordamerikas aufgefallen waren, sehr schön am „Bulambembo-Point“ oberhalb der Kongomündung vernommen habe. Dieses Negerwort würde sich auch am besten mit „Echo“ verdeutschen lassen.

Der ziemlich zahlreichen positiven Nachrichten aus der Schweiz — Seeschüsse, Rotthaler Schiessen, Rothenburger Schiessen, Murtener Schiessen — war bereits im unmittelbaren Zusammenhange mit der geschichtlichen Entwicklung unseres Wissens von diesen Dingen zu gedenken. Auch Dalmatien wird (s. o.) unter den in betracht kommenden Ländern gelegentlich genannt. Wir behalten uns jedoch vor, am Schlusse dieses Abschnittes den dalmatinischen Vorkommnissen eine besondere Erörterung zu teil werden zu lassen, deren Resultat, wie wir glauben, darin besteht, dass jene ihrem ganzen Wesen nach von den Nebelknallen ganz und gar abweichen.

Man sieht, dass ein erheblicher Teil der Erdoberfläche als Ort der uns interessierenden Erscheinung in betracht zu kommen hat. Gerade aber der Umstand, dass ausgedehnte Areale, ja

---

1) **Meyen**, Reise um die Erde in den Jahren 1830, 1831 und 1832, 1. Band, Berlin 1835, S. 349 ff.

2) v. Bibra, Die Algodon-Bay in Bolivien, Wien 1852, S. 30.

sogar ganze Kontinente nichts verlauten lassen, spricht dafür, dass eine gemeinschaftliche Ursache, mit deren Aufdeckung das Problem endgiltig gelöst wäre, nicht vorhanden ist. Die grossen Schwierigkeiten liegen eben darin, dass eine wahre Unzahl von Hypothesen sich zusammengefunden hat, um deren Sammlung sich besonders van den Broeck sehr verdient machte.

Wir setzen, weil ein Gegenbeweis sich zur Zeit höchstens im Einzelfalle führen lässt, voraus, dass alle diese als Luftknalle bezeichneten Detonationen wenigstens äusserlich, wenn auch nicht ihrem eigentlichen Wesen nach, einen einheitlichen Charakter besitzen.[1]) Damit ist erwähntermassen noch keinerlei Gewähr für einheitliche Herkunft gegeben. Wie wenig auf Hypothesen, zu deren Begründung zufällige Wahrnehmungen eben nicht ausreichen, zu geben ist, bezeugt eine Uebersicht über die, welche bisher schon aufgestellt worden sind. Hallez und Moulan appellieren an die Gezeiten des Meeres, und zwar denkt sich der eine von beiden, dass das ansteigende Wasser in Höhlungen des Ufers hineingepresst werde, während der andere annimmt, die in den Uferböschungen befindliche Luft erleide eine Zusammendrückung und mache sich gewaltsam Bahn. Das blosse Brandungsgeräusche wollen De Brandner und der Italiener Agamemnone für die dumpfen Luftschläge verantwortlich machen.[2]) De Meuse hält dafür, dass vom Wasser

[1]) Sichergestellt ist dies ganz und gar nicht. So werden wir von Goodwin-Austen (The Barisal Guns and similar Sounds, Nature, 53. Band (1895), S. 247 ff.) belehrt, dass die Wasserschüsse, welche G. B. Scott im Indischen Ozean konstatierte, in ihrem abrupten Klange sich von den rasselnden, polternden Geräuschen von Barisal doch ganz erheblich unterschieden.

[2]) Für a priori verwerflich möchten wir diese Anschauung nicht halten. Prof. Wiechert hat in einem Vortrage, den er auf der internationalen Erdbebenkonferenz zu Strassburg i. E. hielt, bemerkt, dass bei genauem Studium der mikroseismischen Bodenbewegungen mancher von der nächsten Meeresküste ziemlich weit entfernter Stationen die Möglichkeit sich ergebe, eine Beeinflussung der Indikatoren durch die in regelmässigen, sich rasch wiederholenden Stössen sich bethätigende Aktion der Brandungswogen zuzulassen.

absorbierte Luft sich ersterem wieder entringe, und auch an Sanderuptionen auf dem Meeresboden hat man gedacht. Elektrische Entladungen innerhalb der Erdkruste ziehen Donneux und v. Pitteur-Hiegarts zur Erklärung heran. Begreiflicher ist die Vermutung, dass unvermeidliche Erdrutschungen sich auf grosse Entfernungen hin akustisch bethätigen könnten; zumal auch für die Barisal Guns liesse sich diese Annahme verwerten, gegen die allerdings von Schur eingewendet wird,[1]) die grosse Hörbarkeitssphäre wolle nicht recht zu einem rein örtlichen Ereignis passen. Ja sogar die Töne des Trommelfisches (Drum Fish), so meinen die Amerikaner Kain und Cleveland Abbe,[2]) möchten gelegentlich mit den Mistpoeffers, deren Ursprung freilich auch ein anderer sein könne, verwechselt worden sein.

Hielten sich diese meist nur kurz hingeworfenen Andeutungen an die feste Erde und ihre Wasserbedeckung, so fehlt es doch auch nicht an Deutungsversuchen atmosphärologischer Natur. Hugis Hinweis auf elektrische Ausgleichserscheinungen findet bei van den Broeck eine der Erkenntnis der Gegenwart besser angepasste Wiederbelebung. Während ferner Jonckheere sich damit begnügt, eine plötzliche Störung des längere Zeit herrschend gewesenen labilen Gleichgewichtes der Luftschichten als Grund anzusprechen, wollen Cobbaert und van Overloop den Hergang schärfer praezisieren, indem sie der Einwirkung der Sonnenstrahlen auf Nebelmassen die Fähigkeit zuschreiben, Töne zu erzeugen. Wie aber geschähe dies? Die Meteorologie kennt kein Analogon; die Physik gibt keinen Anhaltspunkt, der Töne oder auch blos diffuse Lufterschütterungen dieser Art verständlich zu machen im-

---

[1]) H. S. Schur, Barisal Guns, Nature, 61. Band (1899), S. 60.

[2]) U. S. Monthly Weather Review, 1898. Uebrigens hält Cleveland Abbe es auch nicht für unwahrscheinlich, dass das Wasser uns mitunter die mit Seebeben verbundenen seismischen Geräusche zuträgt; „genuine earthquakes occuring at the bottom of the neighbouring ocean“ vermöchten auch derartige Knalle auszulösen.

stande wäre. Tiefer eindringend, sucht sich Lieckfeldt[1]) eine Vorstellung von dem Akte des Verdampfens der Wasserkügelchen zu machen, welche in der Luft schweben und, solange ihr Durchmesser eine gewisse Grösse nicht überschreitet, in ihrer Gesamtheit als Nebel oder Wolken erscheinen. Die nachstehende These soll den Schlüssel des Geheimnisses enthalten: „Bei der Verdunstung der Nebelbläschen[2]) tritt, ebenso wie beim Sieden festgestellt ist, unter gewissen günstigen Umständen die Erscheinung des Siedeverzuges ein — höchst wahrscheinlich auch umgekehrt beim Beginn der Nebelbildung eine Hintanhaltung des Niederschlagens.“ Wenn, so wird argumentiert, die kleinen Wassertropfen eine Temperatur angenommen haben, bei der sie längst schon ganz aufgelöst sein sollten, so tritt ein Moment ein, der mit jähem Explosionsrucke die Ueberführung in den gasförmigen Aggregatzustand herbeiführt. Nun ist zuvörderst zu bemerken, dass der Vergleich mit der als Siedeverzug angeführten Erscheinung nicht recht stimmt; letztere beruht ja darauf, dass der Flüssigkeitstropfen, dem Leidenfrost'schen Versuche entsprechend, in den sogenannten sphaeroidalen Zustand übergeht, der dann allerdings ein plötzliches Ende erreicht. Sollte es ein Analogon dieses Zustandes geben, wenn nicht vom abrupten Sieden, sondern lediglich vom langsamen Verdampfen die Rede ist? So achtbar das Streben auch ist, ein Motiv für explosive Vorgänge in der Luft bei deren gewöhnlicher Zusammensetzung nachzuweisen, so müssen wir doch an der Berechtigung eines derartigen Verallgemeinerns physikalischer Wahrheiten unsere Zweifel äussern. Und vor allem: Könnte ein solches Aufkochen der Wasserkörperchen ein beschränktes, regionales Vorkommnis bleiben, müsste man nicht überall

---

1) Lieckfeldt, Versuch zur Erklärung der Mistpoeffers, Seeschiessen u. s. w., Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorologie, 25. Jahrgang (1897), S. 308 ff.

2) Dass die kleinsten Bestandteile einer Wolke nicht, wie Clausius wollte, hohle Bläschen, sondern massive Wasserkörperchen sind, wird heute allgemein zugestanden.

auf der Erde dann und wann ähnliche Folgen einer verzögerten Verdunstung erwarten? Die freie Atmosphäre kann kaum der Ort sein, der den Luftknallen, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, zum Leben verhilft.

L. Weber, dem in der Hauptsache auch Sieger beipflichtet, glaubt dreierlei Möglichkeiten des Entstehens der Nebelschüsse auseinanderhalten zu sollen. Bewirken anormale Leitungs-, Resonanz- oder Brechungsverhältnisse eine ungewöhnliche Verbreitung gewisser, wie immer entstandener Detonationen? Gibt es natürliche Anlässe der Lufterschütterung, die sich unserem Gehörorgane in der angegebenen Weise bemerklich machen? Kann ein Mistpoeffer vielleicht als Kombinationston aufgefasst werden, wie er sich z. B. im tönenden Echo ausspricht? Letzteres dürfte unbedingt zuzugeben sein; Oppels und v. Fischers Reflexionstöne (s. o.), sowie ein von L. Weber selbst angegebenes, einfaches Experiment[1]) liefern die unzweideutigen Belege dafür. Dass die erste und zweite Weber'sche Frage zusammengehören, liegt ebenfalls am Tage. Wenn wir also davon abstand nehmen, dass doch wohl gar mancher scheinbar geheimnisvolle Knall auf menschliche Initiative hindeutet,[2]) so müssen wir die Fragestellung noch etwas

---

[1]) L. Weber, Mitteilung über einen die Mistpoeffers betreffenden Versuch. Schr. d. Naturw. Ver. f. Schleswig-Holstein, 11. Band, 2. Heft.

[2]) Dass es denkbar sei, ferner Kanonendonner sei hin und wieder doch auch die Ursache des bewussten Krachens, ist wiederholt bemerkt worden; so von Jottrand, Hallez, De Skryvere, De Pauw, van Ertborn. Penck und der Verf. (Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 43) nehmen für die Fläche, auf der die bayerischen Artillerieschiessübungen (Lechfeld) gehört werden, einen bedeutenden Teil der schwäbisch-bayerischen Hochebene in anspruch. Mit Eifer hat sich der Frage angenommen der britische Erdbebenforscher Davison (The Distance to which the Firing of Heavy Guns is heard, Nature, 62. Band (1900), S. 377 ff.). Seine Erfahrungen stützen sich auf die Schiessversuche der englischen und französischen Marineartillerie zu Spithead (1897) und Cherbourg (1900). Die weiteste Entfernung, bis zu welcher sich in diesen beiden Fällen der Schall fortgepflanzt hatte, betrug 136 Miles (rund 207 km). Aber

bestimmter fassen, indem wir die folgende Form wählen: Gehören die unter so verschiedenen Namen bekannten Gehörerscheinungen der Atmo-, Hydro- oder Lithosphäre der Erde an? Wenn wir über dieses Grundpostulat Klarheit erhalten, so sind wir auch der Lösung der Aufgabe, die Entstehungsursache zu ermitteln, um ein gutes Stück näher gekommen.

Welche Umwandlungen in der Luft oder im Wasser vor sich gehen könnten, um bei heiterem Himmel und bei ruhiger See Schallphaenomene von immerhin nicht ganz unbeträchtlicher Intensität auszulösen, das entzieht sich so völlig unserer Kenntnis, dass wir ein gutes Recht haben, auf die Herbeiziehung von Hypothesen, die nur ad hoc ersonnen worden sind und nur sehr locker im Boden der Wissenschaft wurzeln, Verzicht zu leisten. Man kann nicht sagen, eine unserem Kausalbedürfnis wirklich genügende Herleitung der Mistpoeffers aus bekannten Gesetzen der Lehre von den tropfbaren und elastischen Flüssigkeiten sei einfürallemal unmöglich; wohl aber darf man behaupten, dass vorläufig auf eine in diesem Sinne gehaltene Erklärung keine grosse Hoffnung zu setzen ist. Dann jedoch besteht eine um so entschiedenere Pflicht, alle denkbaren Fälle, die sich für eine Rückführung unserer Knall-

---

auch sonst weiss die Kriegsgeschichte von grossen Distanzen zu berichten, sogar von 200 Miles (rund 305 km). Bei so weitem Abstande von der Schallquelle kann das Ohr nichts als nur einen ganz unbestimmten Eindruck empfangen. Pechuel-Loesche warnt, auf reichliche eigene Erfahrung gestützt, davor, den dröhnenden Schlag entfernten Geschützfeuers mit dem eigentlichen Mistpoeffers zu verwechseln. Am 4. Juni 1901 z. B. vernahm dieser Geograph in seinem Wohnorte Erlangen am Morgen charakteristische Luftknalle, aber durch sofort an Ort und Stelle eingezogene Erkundigungen ergab sich, dass gerade um diese Zeit die bayerische Feldartillerie auf dem um mehr denn 80 km von Erlangen entfernten Schiessplatze von Hammelburg (Unterfranken) Gefechtsübungen abgehalten hatte. Auch Minensprengungen können als Mistpoeffer wirken, und zwar umso eher, als ja die Explosion gar nicht an der freien Luft stattfindet. Forel hat (Graf Zeppelin, a. a. O., S. 45 ff.) dumpfe Töne, die er vernahm, so lange nicht zu deuten gewusst, bis er erfuhr, dass in den Steinbrüchen von Meillerie mit Sprengpulver gearbeitet wurde.

erscheinungen auf endogene, dem Bereiche der Erdrinde — oder auch allenfalls des Erdinneren — angehörige Prozesse zu eignen scheinen, in ernste Erwägung zu ziehen. Und damit ist denn auch in neuester Zeit ein viel versprechender Anfang gemacht worden.

Die Herstellung einer Verbindung zwischen Nebelknallen und Erdbebengeräuschen liegt nahe genug. Die letzteren bilden in den seismologischen Schriften ein stehendes Kapitel, so dass es hier bei wenigen Verweisungen sein Bewenden haben kann. Hoernes hat die darauf bezüglichen Nachrichten vereinigt und besprochen;[1]) es erhellt, dass die beiden Gruppen von Erscheinungen nicht notwendig zusammengehören, dass es Erdstösse ohne Detonationen und unterirdische Geräusche ohne begleitende Erderschütterung gibt, dass aber ein wahrscheinlicher Zusammenhang immerhin anzunehmen ist. So nennt auch Boussingault[2]) zwar den dem Stosse folgenden Schall eine „Erscheinung für sich“, aber doch eine solche, deren Eintreten ohne die vorhergehende mechanische Auslösungsursache nicht zu erwarten wäre.[3]) Die akustische Analyse der seismischen Begleitphänomene lässt noch zu wünschen übrig, und es sind dieselben offenbar auch in vielen Einzelfällen so überaus vielgestaltig, dass die Beschreibung nur schwer die richtigen Worte findet.[4]) Dumpfes Rollen und Brausen

---

[1]) R. Hoernes, Erdbebenkunde, Leipzig 1893, S. 74 ff. Vgl. auch v. Seebach, Das mitteldeutsche Erdbeben vom 6. März 1872; ein Beitrag zur Lehre vom Erdinneren, Leipzig 1873, S. 110 ff.

[2]) Boussingault, Sur les détonations constatées pendant les tremblements de terre, Compt. rend. de l'acad. franç., 93. Band (1881), S. 105 ff.

[3]) Verbreitet haben sich hierüber auch zwei englische Gelehrte in einer Erdbeben-Monographie (Meldola-White, East Anglian Earthquake of 1884, London 1885, S. 55 ff.).

[4]) Auf den Santorin-Inseln, wo natürlich die Erdbeben das rein vulkanische Gepräge tragen, hatte Jul. Schmidt Gelegenheit, sich mit dem unterirdischen Dröhnen vertraut zu machen. Er unterscheidet: „Brausen, Heulen, Orgelton, Pfeifen, Rollen, Donner, Lärm, Gurgeln, Brüllen“ (Vulkanstudien bei Santorin, Gaea, 18. Jahrgang (1882), S. 645).

scheint die Regel zu sein; mitunter wird aber auch nur ein einziger, heftiger Knall verzeichnet.[1]) Die sorgfältigsten neueren Untersuchungen hierüber haben uns Milne[2]) und Davison[3]) geliefert, und zumal die Vergleichungen, welche der zweitgenannte hinsichtlich des Verhältnisses der Verbreitung von Schall und mechanischer Wirkung angestellt hat, dürften sehr geeignet sein, auch auf die dunkle Sache, die uns beschäftigt, einiges Licht zu werfen. Vor allem wird dargethan,[4]) dass Hörraum und Beschädigungsraum sich durchaus nicht zu decken brauchen, dass es Gegenden gibt, innerhalb deren das Erdbeben starke Zerstörungen ausübt, ohne das Gehörorgan zu beeinflussen. Ueber diejenigen subterranen Geräusche, welche sich ab und zu in furchtbarer Heftigkeit vernehmen lassen, ohne dass auch nur eine stärkere Erzitterung des Bodens parallel ginge, waren schon früher Nachforschungen angestellt worden.[5]) Es liegt mithin nahe genug, zu vermuten, dass die

---

[1]) Ein recht charakteristisches Vorkommnis dieser Art führt v. Radics an (Historische Erdbebennotizen aus Krain und den Nachbarländern, Erdbebenwarte, 1. Jahrgang, S. 17).

[2]) J. Milne, Note on the Sound Phenomena of the Earthquakes, Transact. of the Japan Seismological Society, 12. Band, S. 53 ff.

[3]) Davison, On tne Nature and Origine of Earthquake-Sounds, Geolog. Mag., (3) 9. Band (1892), S. 208 ff.

[4]) Meldola-Davison, Curious Aerial or Subterranean Sounds, Nature, 53. Band (1895), S. 4. „In great earthquakes, the Sound Area is confined to the neighbourhood of the epicentre; in moderate and slight shoks the Sound Area and disturbed area approximately coincide, or the Sound-Area may even overlap the disturbed area. In the limiting case, the disturbed area vanishes, and the vibrations are perceptible only as sound."

[5]) Detaillierte Mitteilungen über unterirdisches Rollen sind uns durch A. v. Humboldt im ersten Bande des „Kosmos" (Neue Ausgabe der Werke, 1. Band, S. 148 ff.), durch Perrey (Mémoire sur les tremblements de terre ressentis en France, en Belgique et en Hollande depuis le 4me siècle jusqu'à 1843, Brüssel 1845) und durch Daubrée (Les régions invisibles de la terre, Paris 1888, S. 121 ff.) zugekommen. Ersterer schildert als den ausgezeichnetsten Fall dieser besonders unheimlichen Erscheinung die „bramidos y truenos subterraneos" in der mexikanischen Stadt Guanoxuato, die mehrere Wochen lang anhielten, ohne dass sich

Luftknalle intrakrustalen Ursprunges sind, dass sie gewissermassen als Signale für embryonale, nicht zu energischerer Ausbildung gelangte Erdbeben zu gelten haben. Ganz mit Recht erinnert Penck (a. a. O.) daran, dass der nächst Belgien meist beteiligte Bezirk, Nordschweiz und Bodensee-Territorium, zu jenen jung-geologischen Gebieten zählen, die noch keineswegs zur vollständigen tektonischen Ruhe gekommen sind.

In diesem Sinne haben sich von van den Broecks Gewährsmännern Flamache und Delvaux ausgesprochen; auch La Touche wendet diese Erklärung speziell auf die Barisal Guns an. Zwar ist, wie der gleichfalls der geodynamischen Auffassung zugeneigte Darwin anführt,[1] auch daran gedacht worden, dass das magmatische Erdinnere an die umgebende starre Hülle anschlage, allein mit den sich stetig mehr die Bahn brechenden modernen Vorstellungen[2] von der inneren Beschaffenheit der Erde lässt sich dieser Rückfall in die Ideenkreise von Perrey und Falb nicht mehr vereinbaren. Wohl aber steht, mag man nun über die Gebirgsbildung welche Meinung immer hegen, die Thatsache fest, dass der Erdball einer fortschreitenden Volumverminderung durch Wärmeabgabe und Erkaltung ausgesetzt ist. Ist dem so, dann müssen tektonische Veränderungen eintreten, die zwar ungemein glatt und geräuschlos verlaufen, die andererseits auch entsetzliche Verheerungen anrichten können, während

---

die Erde im übrigen hätte in ihrer Ruhe stören lassen. Des grollenden Donners unter den Füssen gedenkt auch v. Bibra (Ueber Chile, Sitzungsberichte d. Akad. zu Wien, Math.-Naturw. Kl., 10. Band (1853), S. 717 ff.).

[1] G. H. Darwin, „Barisal Guns“ and „Mistpoeffers“, Nature, 52. Band (1895), S. 650.

[2] Die Ueberzeugung, dass die Erde alle möglichen Aggregatzustände der Materie, und zwar in lückenloser Aufeinanderfolge, in sich schliesst, hat sich neuerdings, wie die von den verschiedensten Ausgangspunkten ausgehenden Veröffentlichungen von Penck, Reyer, Woldřich, Svante Arrhenius u. a. beweisen, ein hohes Mass von Anerkennung erworben, und es wird kaum mehr statthaft sein, zwischen zwei intratellurischen Aggregatzuständen — starrer Kruste und feurigflüssigem Magma — eine distinkte Grenzfläche vorauszusetzen.

vielleicht noch häufiger nur leise Bodenschwankungen und unbestimmte Lufterschütterungen davon Kunde geben, dass sich für einige Zeit ein neuer Gleichgewichtszustand im Gezimmer der Erde herausgebildet hat. Es wäre eine zu enge Fassung, wollte man mit Meldola und Davison (s. o.) die Luftknalle als Konsequenzen des nie ganz rastenden Faltungsprozesses in der Erdrinde definieren; ausser den durch Lateralschub bewirkten intrakrustalen Umsetzungen gibt es doch auch noch andere, und kleine Verwerfungen mögen sich sogar noch häufiger als Fältelungen ereignen. Issels Bearbeitung des umbrischen Erdbebens vom 18. Dezember 1897 wirft für diese Annahme ebenfalls ihr Gewicht in die Wagschale,[1]) und nicht minder wollen die Wahrnehmungen, welche Delprat[2]) aus Java bekanntgegeben hat, in diesem Geiste interpretiert sein. Beim Graben eines Tunnels wird der Gleichgewichtszustand eines kleinen Teiles der Erdrinde, eben des in angriff genommenen Gebirges, künstlich verändert, und die Reaktion des Felsgesteines wird in Bewegungen der festen Stoffe und durch deren Uebertragung in Luftbewegungen umgesetzt.

Neben den tektonischen Einwirkungen dürfen wir aber auch die explosiven[3]) nicht ausser acht lassen, welche von Schlagwettern („grisou") in unterirdischen Hohlräumen herrühren und natürlich nicht nur an die von Menschen angelegten Bergwerke gebunden sind, wenn sie gleich nur durch ihr Auftreten in solchen zu unserer unmittelbaren Kenntnis

---

[1]) Barisal Guns, Nature, 61. Band (1899), S. 60.

[2]) Delprat, Remarkable Sounds, ebenda, 53. Band (1896), S. 510. Beim Bau eines Tunnels hatten sich dumpfe Töne vernehmen lassen, als ob sie aus dem Inneren des durchbohrten Berges kämen.

[3]) Jene explosiven Aktionen, die Gerland als Ursache mancher vermeintlichen Dislokationsbeben postuliert, sind hier nicht gemeint. Wir betrachten vielmehr für unsere Zwecke, im Einverständnis mit Gerland selbst (Die moderne seismische Forschung, Verhandl. des siebenten Internat. Geographenkongresses, 2. Teil, London-Berlin-Paris 1901, S. 152), die Erdbeben unter dem Gesichtspunkte der Einheitlichkeit, die sich, ganz unbeschadet der tiefer liegenden Entstehungsursache im Einzelfalle, in den akustischen Folgen zweifellos annehmen lässt.

gelangen. Hier war es wieder van den Broeck, der unseren Wissensstand übersichtlich zusammengefasst und für die Entstehung der Luftknalle eine neue Quelle eröffnet hat.[1]) Die Erforschung eines Naturereignisses, welches Menschenleben und Menschenwohlstand in so empfindlicher Weise schädigt, hat die k. belgische Akademie, die in einem an Kohlengruben reichen Lande auch dazu berufen war, veranlasst, eine „Section spéciale permanente d'études du grisou" ins Leben zu rufen, und diese hat auch schon der für uns wichtigen Frage manchen Vorschub geleistet. Die wertvollen Untersuchungen von Guibal, Forel, Laur, Chesneau u. a. über den Zusammenhang zwischen schlagenden Wettern und Luftdruckschwankungen[2]) berühren

---

[1]) van den Broeck, La météorologie endogène et le grisou, Lille 1898. Von weiteren einschlägigen Veröffentlichungen des um unser Problem sehr verdienten Belgiers, deren Inhalt wesentlich der Sammlung von Beweismitteln für die Hauptthese gewidmet ist, nennen wir die nachstehenden: Les mistpoeffers ou détonations mystérieuses de la Mer du Nord et des régions terrestres et maritimes circonvoisines, Brüssel 1896; Les manifestations grisouteuses et leur prévision, dans ses rapports avec la météorologie endogène et avec la météorologie atmosphérique, Lüttich 1898; Les prévisions grisouteuses, recherches préliminaires faites à l'ocasion des „avertissements" de M. Francis Laur, Brüssel 1899; La question des mistpoeffers, ebenda 1899; Question à l'ordre du jour: grisou et mistpoeffers, Lüttich 1901. Ferner gehören noch hierher als reichliche Materialiensammlung: Procès-verbaux des séances tenues en 1898 par la section permanente etc., Brüssel 1898. Einen teilweise abweichenden Standpunkt nimmt ein E. Harzé (Du grisou, Brüssel 1898).

[2]) Das aus den romanischen Ländern, die ja auch die meist betroffenen sind, stammende Material ist ausgiebig verarbeitet worden. Dagegen erfährt man nichts davon, dass auch die deutsche Fachlitteratur schwerwiegende Beiträge zur Beurteilung der Beziehungen darbietet, die zwischen exogener und endogener Meteorologie obwalten, wenn wir für den Augenblick die uns sonst wenig zusagende Nomenklatur De Rossis (Meteorologia endogena, Mailand 1879—1882) uns aneignen; es werden dadurch, wie noch mehr durch das auf dem gleichen Boden fussende Werk von Canu-Gérigny (Précis de météorologie endogène, Paris 1894) gar zu viele heterogene Gegenstände vermengt. Die Arbeiten von Hilt, J. Mayer, v. Friesenhof, besonders von E. Suess kommen so wenig zur Geltung, wie diejenigen der Engländer Harries und Latham. Vgl.

uns an dieser Stelle nicht näher; wir halten einfach daran fest, dass auch Minenkatastrophen selbst kleineren Umfanges Schallerscheinungen nach sich ziehen, die noch in grösserer Entfernung als vages Geräusch gehört werden. Die Bedingungen haben Guibal[1]) und van den Broeck näher zu bestimmen gesucht; der letztere namentlich auch in seiner Polemik[2]) gegen Harzé, welcher an der Realität der Mistpoeffers einige Zweifel verlautbart hatte. Demgemäss können wir jetzt die sogenannten Nebelknalle, die mit dem Nebel gar nichts und mit der Atmosphäre nur insofern zu thun haben, als diese die Fortleitung der ihr erteilten Impulse besorgt,[3]) in zwei Gruppen sondern.

Es gibt diffuse Knalle und Schuss-ähnliche Detonationen, die ausschliesslich geotektonischer Herkunft sind; es gibt auch andere, welche sich auf explosive Vorgänge in unterirdischen, von ausströmenden Gasen erfüllten Hohlräumen zurückführen lassen. Der Umstand, dass das Wasser, dass die Luft in ihrer rasch wech-

---

Günther, Der Einfluss von Luftdruckschwankungen auf die flüssigen und gasförmigen Bestandteile der Erdoberfläche, (Gerlands) Beiträge zur Geophysik, 2. Band (1895), S. 71 ff.

[1]) Guibal, Les explosions de grisou dans les huillières, Mons 1889.

[2]) van den Broeck, Reponse aux observations de M. E. Harzé faites au sujet du projet de programme d'études du grisou, Bull. de la Soc. Belge de Géologie, de Paléontologie et de l'Hydrologie, 2. août 1888.

[3]) A. a. O., S. 8. „Ces bruits naturels consistent vraisamblablement en la transformation en ondes sonores de vibrations d'origine terrestre ...“ Die Frage, inwieweit die akustischen Begleiterscheinungen der intrakrustalen Umwälzungen in ihrer Verbreitung besonderen Regeln unterliegen, bedarf noch, wie wir gleich nachher, im Anschlusse an die Arbeiten von Knett sehen werden, besonderer Erörterung. Eine wertvolle Vorarbeit hiefür lieferte Rudzki (Ueber die scheinbare Geschwindigkeit der Verbreitung der Erdbeben, Beitr. z. Geophysik, 3. Band (1898), S. 519 ff.). Interessante Perspektiven für die Beurteilung des Zusammenhanges gewährt eine von Hecker (Ergebnisse der Messung von Bodenbewegungen, ebenda, 4. Band, S. 104) mitgeteilte Beobachtung von Omori, der damals in Potsdam weilte. Es heisst dort nämlich: „Beim Eintreffen der Schallwelle verstärkte sich die Bewegung momentan.“

selnden Zusammensetzung, dass endlich die verschiedenen Gesteins- und Erdarten, aus welchen sich die oberen Erdschichten zusammensetzen, die namhaftesten Verschiedenheiten in der Fähigkeit, den Schall fortzuleiten, aufweisen, bedingt es, dass im einen Falle die Erschütterung sich rascher, im anderen minder rasch fortpflanzt, dass die Klänge, je nach den Umständen, aus der Luft, aus dem Wasser, aus den Eingeweiden der Erde zu kommen scheinen. Verlegt man den Ort, an dem die den Schall erzeugenden Kräfte thätig sind, unter die Erdoberfläche, so sind alle die Verschiedenheiten aufgeklärt, welche sich in der Beschreibung der Empfindungen der einzelnen Beobachter vorfinden.

Die moderne Ausbildung der seismischen Apparate und Registrierungsmethoden setzt uns, was auch schon van den Broeck und sein Mitarbeiter E. Lagrange hervorheben, wahrscheinlich in den Stand, die vorstehend dargelegte Deutung der Nebelknalle empirisch zu prüfen. Dessen dürfen wir uns ja wohl versichert halten, dass die letzteren für gewöhnlich, Ausnahmen abgerechnet, von Erschütterungen des Bodens, die auch der gleichgiltige Beobachter zu verspüren befähigt wäre, nicht begleitet oder gefolgt sind. Dagegen wird man es nicht für unwahrscheinlich halten dürfen, dass zu jedem thatsächlich endogenen Geräusche eine etwas ausgesprochene mikroseismische Gleichgewichtsstörung gehört. Dieselben würden sich, wenn man erst in ihrer Erkennung eine gewisse Uebung gewonnen hätte, sowohl von den gewöhnlichen Tremors, wie sie Milne studiert hat, wie auch von den periodischen Pulsationen, die uns v. Rebeur-Paschwitz kennen lehrte, wohl unterscheiden lassen.[1]) Wenn erst eine grössere Anzahl von Stationen mit exakt arbeitenden seismischen Wellenzeichnern, seien es nun Vertikalpendel nach Wiecherts oder Horizontalpendel nach Ehlerts Konstruktion, begründet sein

---

[1]) Wir verweisen wegen dieser Oszillationen des Erdbodens auf eine frühere Darstellung (Günther, Handbuch der Geophysik, 1. Band, Stuttgart 1897, S. 495 ff., S. 271 ff.).

wird, dürfte sich auch eine tiefere Einsicht in die Zusammenhänge zwischen Dem, was oben in der Luft und Dem, was unter der Erde vorgeht, mit Zuversicht erhoffen lassen.[1])

Durch unsere Zustimmung zu der schon zum öfteren, noch niemals aber in der hier versuchten Bestimmtheit formulierten Hypothese, dass man die Entstehungsstelle der Nebelknalle unter der Erde zu suchen habe,[2]) hoffen wir der

---

[1]) Sehr dankenswerte Mitteilungen einschlägiger Natur verdanken wir in neuester Zeit den „Mitteilungen der Erdbebenkommission der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien." In Betracht kommen besonders die nachfolgenden drei Berichte: Nr. IX, Woldřich, Bericht über die unterirdische Detonation von Melnik in Böhmen am 8. April 1898; Nr. XX, Knett, Ueber die Beziehungen zwischen Erdbeben und Detonationen; Nr. XXI, Bericht über das Detonationsphänomen im Duppauer Gebirge am 14. August 1899. Knett schlägt vor, den Erdbebenschwärmen auch Detonationsschwärme zur Seite zu stellen, zu denen er auch die Schallerscheinungen in der Nähe der venetianischen Stadt Feltre rechnet (Haidinger, Das Schallphänomen des Monte Tomatico bei Feltre, Jahrb. d. k. k. Geol. Reichsanstalt, 1853, S. 559 ff.). Vor allem wichtig ist Knetts gelungener Nachweis, dass der Sitz der akustischen Vorkommnisse wirklich die Erdkruste selbst ist, und dass Schall und Beben wesentlich die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen. Natürlich wirken die verschiedenen Einflüsse zusammen, und auch bei den unterirdischen Knallen von Duppau (bei Karlsbad) hatte man es mit einem „Mischphänomen von vorwiegend akustischer Erregung" zu thun. Knett hält für den Einzelfall die Wahl offen zwischen subterranen Einstürzen, die wir allerdings nur als Teilerscheinung von Dislokationen allgemeineren Charakters ansprechen möchten, und Druckausgleichen in Gasansammlungen (Explosionen); auch die Duppauer Bodenkrache könnten, da ringsum Säuerlinge der Erde entströmen, sehr wohl durch akute Gasentbindung veranlasst gewesen sein, wie denn nach Laube (Die geologischen Verhältnisse des Mineralwassergebietes von Giesshübel-Sauerbrunn, ebenda 1898) die vertikalen Ausweitungen („Schlöte") der durch Auswitterung entstandenen „Zwerglöcher" mit dem Ausbruche hochgespannter Gase in nahem Zusammenhange stehen dürften.

[2]) Eine scharfe Scheidung zwischen seismischen und vulkanischen Prozessen erschien überflüssig. Die letzteren bethätigen sich nach De Rossi auch mikrophonisch gerade wie Erdbebengeräusche (Eine interessante Anwendung des Mikrophons auf vulkanische Erscheinungen, Ausland, 1879, S. 179).

unsere Betrachtung leitenden hodegetischen Regel, dass es unzulässig sei, alle irgend verwandten Naturerscheinungen auf das Prokrustesbett einer allumfassenden Erklärung spannen zu wollen, nicht untreu geworden zu sein. Ohne allen Zweifel gibt es, vom Zuthun der Menschen wiederum abgesehen, natürliche Vorkommnisse genug, welche die uns bekannten akustischen Nachwirkungen einzuleiten vermögen. Lawinenstürze, Uferrutschungen, Bergschlipfe[1]) gehören hierher; überhaupt alle die morphologischen Umwälzungen, welche wir mit Penck[2]) als Massentransporte bezeichnen. Des ferneren sind Brandungsgeräusche als Ursachen gewiss nicht ausgeschlossen, und die Donnerlaute, welche an trüben Tagen gar nicht selten an das Ohr des Polarfahrers schlagen, gehen nach Pechuel-Loesche von der Bewegung der Eisflarden (s. o. S. 17) aus, die man durch den Nebel oft besonders deutlich hört (Günther, Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 41). Allein sehr gross werden wir uns das Wirkungsbereich derartiger Geschehnisse nicht vorzustellen haben, und die relative Allgemeingiltigkeit der oben gegebenen Erklärung wird durch jene nicht berührt. Wohl aber haben wir vorhin schon das sogenannte Phaenomen von Meleda als ein solches für eine Sonderuntersuchung aufgespart, welches seine eigentümlichen Kennzeichen bekunde und sich nicht ohneweiters den Mistpoeffers und Wasserschüssen einordnen lasse. Hiefür sind wir jetzt den Beweis anzutreten verpflichtet.

---

[1]) Wir besitzen von dem grauenvollen Bergrutsche von Goldau, einem der grössten, die sich in geschichtlichen Zeiten zugetragen, eine zeitgenössische, mit anerkennenswerter Objektivität geschriebene Monographie (Zay, Goldau und seine Gegend, wie sie war und was sie geworden, Zürich 1807). Aus ihr müssen wir folgern, dass zwar an Ort und Stelle die Steinlawine mit entsetzlichem Geprassel niederging, dass man aber schon in dem nur zwei Gehstunden entfernten Flecken Schwyz (a. a. O., S. 251) weder ein weitgreifendes Zittern des Bodens, noch auch mehr als „einen dumpfen Donnerton" bemerkte. Und auf andere schweizerische Kantone erstreckte sich nicht einmal diese minimale Wirkung.

[2]) Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 244 ff.

Meleda ist eine dalmatinische Küsteninsel, etwas nordwestlich von Ragusa gelegen. Hier erregten im März 1820 dumpf tosende Geräusche, die sowohl auf dem Lande wie auch auf der umgebenden See gehört wurden, eine kleine Panik unter den Einwohnern, und noch mehrere Jahre lang machte sich das Poltern, fernem Donner ähnlich, bemerkbar. Italienische und einheimische Gelehrte, Breislak,[1]) Configliacchi,[2]) Stulli[3]) widmeten der viel Aufsehen machenden Erscheinung besondere Abhandlungen, und die österreichische Regierung sandte in Riepl und Partsch Experte nach dem Eilande. Der von dem letzteren, einem geachteten Mineralogen und Meteoritenforscher, erstattete Bericht[4]) lief darauf hinaus,

---

[1]) Breislak, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, Mem. dell' Imp. Reg. Istituto del Regno Lombardo-Veneto, vol. IV, adunanza del 24 aprile 1823.

[2]) Configliacchi, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, ebenda. Vol. IV, adunanza del 7 agosto 1823. An dieser Stelle nur Anzeige des gehaltenen Vortrages. Zugänglich sind heutzutage am meisten die Auszüge, welche von Breislaks, Bossis und Configliacchis Berichten auch in des letzteren Zeitschrift übergegangen sind (P. Configliacchi-G. Brugnatelli, Giornale di Fisica, Chimica, Storia Naturale, Medicina ed Arti, (2) 6. Band, S. 417 ff.). Die Arbeit dieses Physikers lässt erkennen, dass es doch häufig sich wohl empfiehlt, in geologischen Fragen auch das physikalische Element zur Geltung zu bringen. Er denkt sich die Felsinsel von mehreren Kanälen und Höhlen durchzogen, zu denen das Wasser des Meeres von unten her Zutritt habe. Steigt dasselbe an, so muss es die in den sonst leeren Räumen befindliche Luft zusammenpressen, und dieser bleibt nur übrig, sich irgendwie einen gewaltsamen Ausweg zu bahnen. Dass ein solcher nicht ohne Krachen und Erzittern des Felsgerüstes der Insel erfolgen kann, wird sich, falls man die Praemisse zugibt, nicht in abrede ziehen lassen. Configliacchis Note ist dem Anscheine nach ausserhalb ihres engeren Vaterlandes nur wenig bekannt geworden. Wir wüssten, ausser bei Partsch und Hoernes, nur noch eine einzige Zitierung derselben namhaft zu machen, nämlich in einem Aufsatze von Schroetter (Springbrunnen und unterirdischer Donner durch das Meer veranlasst, Steierm. Zeitschr., (2) 2. Jahrgang, S. 164 ff.).

[3]) Stulli, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, Ragusa 1823.

[4]) P. Partsch, Bericht über das Detonations-Phänomen auf der Insel Meleda bei Ragusa, Wien 1826.

dass — so würde man sich heute ausdrücken — Erdbebenschwärme die Schuld an diesen, von eigentlich seismischen Störungen nur ausnahmsweise begleiteten Detonationen trügen. Auch Hoernes ist[1]) auf das jedenfalls eigenartige Schallphaenomen näher eingegangen. Er analysiert die protokollarischen Feststellungen, die Partsch gemacht hat, näher, und wenn man das liest, so kann man sich allerdings nicht darüber wundern, dass viele Autoren die „kurz abgebrochenen", für gewöhnlich nicht rollenden Knalle einfach den Mistpoeffers angliederten. So erwähnt Partsch,[2]) dass in der Nacht vom 2. zum 3. November 1823 über hundert „einzelne Schüsse", wie aus einer Batterie groben Geschützes, gehört wurden, immer in Zeitabständen von je fünf Minuten. Der Kreis, in dessen Innerem die ihre Intensität nach aussen rasch verlierenden Knalle vernehmbar waren, hatte keinen grossen Durchmesser, und nennenswerte Beschädigungen von Gebäuden waren einzig in der — offenbar epizentralen — Ortschaft Babinopoglje nachzuweisen. Dass eine Erderschütterung mit im Spiele war, lag klar zu tage, und es fragt sich nur, wie wir uns, mit Rücksicht auf die konkreten Ortsverhältnisse, die seismischen Vorgänge zurechtzulegen haben.

Partsch, ganz im Banne der „heroischen" Geologie[3]) eines v. Buch und v. Humboldt stehend, geht von dem Grundsatze aus, dass Vulkane und Erdbeben nur verschiedene Aeusserungen ein und derselben Zustandsänderung im tieferen Erdinneren seien, und weist auch Breislaks Einsturzhypothese zurück, die, worin wir Hoernes Recht geben müssen,[4]) denn doch einen weit plausibleren Eindruck macht. Unseres Erachtens freilich kommt der Wahrheit am nächsten die „pneumatische" Theorie von Configliacchi, welcher seine Paduaner Kollegen Renier, Dal Negro, Melandri und Santini, sowie

[1]) Hoernes, a. a. O., S. 292 ff.
[2]) Partsch, a. a. O., S. 89 ff.
[3]) v. Zittel, Geschichte der Geologie und Palaeontologie bis Ende des neunzehnten Jahrhunderts, München-Leipzig 1899, S. 85 ff.
[4]) Hoernes, a. a. O., S. 74, S. 302 ff.

der Mailänder Astronom Cesaris und der dortige Physiker Bossi[1]) ihre Zustimmung gaben.[2]) Dieselbe hat eben den Vorzug, dass sie allein auf die Landesnatur Rücksicht nimmt. Meleda ist, wie die Gesamtheit der dem kroatischen Küstenlande und Dalmatien vorgelagerten Inseln, Karstland und nimmt somit an allen den Eigenschaften teil, welche für diese Gebirgsart als typisch anerkannt werden müssen.[3]) Für dem Meere benachbartes Karstgebirge ist nun aber auch die Thatsache charakteristisch, dass seine Gewässer vielfach mit dem Wasser der offenen See in Verbindung stehen, und die Existenz solcher unbezweifelter Kanalsysteme schliesst

---

[1]) Bossi, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, Mailand 1824.

[2]) Ohne von diesen Vorläufern Kunde zu besitzen, hatte der Verf. schon vor zwölf Jahren die Schallerscheinungen von Meleda als Bestandteil eines ganz anders gearteten Erscheinungskomplexes angesprochen (Geophysikalische Betrachtungen über das Stauungsphaenomen und über Naturfontänen, Natur und Offenbarung, 35. Band (1889), S. 11 ff.). Von den damals dargelegten Anschauungen abzugehen, lag kein Grund vor.

[3]) Speziell dafür, dass das Meer anstauend auf den Wasserstand von Binnenseen des Karstgebietes wirken kann, dienen als Belege der Čepič-See in Istrien und der Rothensteiner-See im Küstenlande (vgl. Kraus, Sumpf- und Seenbildungen mit besonderer Berücksichtigung der Karsterscheinungen und insbesondere der Katavothrenseen, Mitteil. d. Geogr. Gesellsch. zu Wien, 1893, S. 373 ff.). Wie die unsichtbaren Abzugsröhren oder Katavothren die ganze geographische Denkart der antiken Kulturwelt beeinflusst haben, ist trefflich auseinandergesetzt worden von C. Neumann und J. Partsch (Physikalische Geographie von Griechenland, mit besonderer Berücksichtigung des Altertums, Breslau 1885, S. 255 ff.), sowie von Kretschmer, Die physische Erdkunde im christlichen Mittelalter, Wien-Olmütz 1889, S. 82 ff.). Hierher gehören auch die berühmten Meermühlen von Argostoli (Günther, Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 804 ff.). Die Natur der dalmatinischen Inseln wird behandelt von H. Noë (Dalmatien und seine Inselwelt, Wien 1870, S. 53 ff.) und von K. Hassert (Montenegro, Ergänzungsheft Nr. 115 zu Petermanns Geogr. Mitteil., S. 45 ff.). Der Verf. forderte Dr. F. Fischer in Innsbruck auf, generell „Meer und Binnengewässer in Wechselwirkung“ darzustellen, und diese Studie wird sicher noch im Laufe dieses Jahres in den „Abhandlungen“ der k. k. Geographischen Gesellschaft zu Wien publiziert werden.

auch schon den Beweis dafür in sich, dass das Meer leicht unterirdisch mit den vom Namen Karst nun einmal unzertrennlichen Hohlräumen des Inneren kommunizieren kann. Sowie dies zugegeben wird, muss auch jede gegen die Küste gerichtete Bewegung ein stossweise erfolgendes Eindringen des Meerwassers in die Klüfte und Adern des anstehenden Gesteines zur Folge haben, und zwar wird sich dieses Aufsteigen, wie am fraglichen Orte des näheren erörtert ward, dem Prinzipe des hydraulischen Widders anpassen.[1]) Eine Umschau in der erdkundlichen Litteratur führt uns eine ganze Anzahl ähnlicher und auch gleichartig bedingter Erscheinungen zu. Der Anprall des Wassers muss für sich allein schon, ohne dass auch nur auf eine heftigere Luftkompression im Sinne Configliacchis bezuggenommen zu werden brauchte, ein dauerndes Dröhnen in kurzen Pausen hervorrufen, und gelegentlich, wenn dieser Anprall ein besonders lebhafter ist, kann es recht wohl auch soweit kommen, dass der Fels zu zittern anfängt, dass ein regelrechtes Erdbeben mit den blossen Detonationen abwechselt. Also gerade der Punkt, der bei jeder anderen Auffassung Schwierigkeiten bereitet, wird jetzt einer einfachen Erklärung zugänglich, dass nämlich die akustischen Erschei-

---

[1]) Einschlägige Nachweisungen lassen sich knüpfen an die Bufaderos oder Strandspringbrunnen der Kanarischen Inseln (Calderon, Études de géologie physique, Bull. de la Soc. Géol. de France, (3) 15. Band, S. 38 ff.); ferner an ein ausgezeichnetes Beispiel intermittierenden Strahlauswurfes, das man auf der Insel Malta beobachtete (Wanderung durch Sizilien und die Levante, 1. Band, Berlin 1834, S. 406; Ann. d. Phys. u. Chem., 33. Band, S. 349 ff.), indem hier das von Stürmen gepeitschte Meer durch ein absichtlich hergestelltes Bohrloch bis zu einer Höhe von 60 Fuss emporspritzte. Pechuel-Loesche hat Bufaderos, die ihm den Eindruck förmlicher Brandungs-Geysirs erweckten, auch an der Küste von Madeira, sowie an derjenigen verschiedener Inseln der Azoren-Gruppe gesehen; andere zur Bildung von Springstrahlen disponierte Oertlichkeiten sind ihm zufolge die Sandwich-Inseln, die Ostspitze von Kuba und, falls die Kalema energisch genug ist, auch die Küste von Kinsembo (Portugiesisch-Westafrika). Und die Ausbrüche des gestauten, in regelmässigen Pausen in die Höhe geschleuderten Wassers sind stets von heftigem „Gurgeln und Donnern" begleitet.

nungen als das Primäre, die mechanisch-seismischen dagegen als das Sekundäre zu betrachten sind.

Eher möchte man sich, statt dass man diese naturgemässe Theorie verwerfen sollte, über das verhältnismässig seltene Auftreten dieser Wechselbeziehungen zwischen Meer und Festland wundern. Wir sind allerdings der Meinung, dass sie doch bei genauerem Zusehen häufiger aufgedeckt werden können, und dass die Schallphaenomene, die sich in den gegen das Meer hin offenen Nischen und Höhlen manifestieren, eine analoge Ursache haben. Zumal von der bekannten Fingalshöhle auf der Insel Stafa, der ja schon mancher Besucher und Beschreiber mysteriöse Töne zugeschrieben hat, wird sich dies vermuten lassen. An die Stelle der Karstzerklüftung ist hier diejenige getreten, welche den charakteristischen Absonderungsformen des Basaltes entspricht. Und es ist mehr denn wahrscheinlich, dass, wenn erst alle gelegentlich gemachten, aber ungedruckt gebliebenen Beobachtungen verwandten Gepräges das bereits vorhandene Material vermehrt haben würden,[1]) die Detonationen, welche zum Typus von Meleda zu rechnen sind, nicht minder in zahlreichen Fällen als solche zu erkennen wären. —

Unsere Uebersicht über die akustisch-geographischen Vorkommnisse hat hiemit ihren Abschluss erreicht. Als einen nicht unerheblichen Nutzen derselben sind wir vornämlich anzusehen geneigt, dass der bislang auf diesem Gebiete bestehenden Anarchie ein Ende bereitet und eine jede unter den sehr vielen Einzelerscheinungen an den Platz gestellt worden ist, der ihr auf Grund kritischer Prüfung der von ihr han-

---

[1]) Eine solche Wahrnehmung stellten Prof. Rothpletz und Prof. Oberhummer zur Prüfung, die, an einer in den Kochel-See steil abfallenden Felswand hingehend, sonderbar säuselnde Töne vernahmen, für deren Provenienz sich nirgends ein Anhaltspunkt finden lassen wollte. Dass alternierendes Ein- und Ausströmen des mit zerklüftetem Kalkfels sich berührenden Wassers Töne hervorbringen kann, ist gewiss, und ein lokaler Augenschein würde vielleicht darüber vergewissern, ob diese Auffassung des Sachverhaltes stichhaltig ist oder nicht.

delnden Angaben zukommt. Denn die Verwirrung, welche herrschte, war eine fast unglaubliche; Erscheinungen der verschiedensten Art wurden wahllos durcheinandergeworfen; solche dagegen, die wirklich zusammengehörten, mussten sich eine Trennung gefallen lassen. Belege für diese Unordnung sind wiederholt beigebracht worden und könnten noch beliebig vermehrt werden.[1] Einerlei, ob unsere Bestrebungen, jedes akustische Naturphaenomen mit den einfachsten Mitteln zu erklären, vom Glücke begleitet waren oder mit der Zeit als unzureichend sich herausstellen — jedenfalls wird jeder künftige Bearbeiter dieser Probleme sich in den Stand gesetzt sehen, von einer gesicherten, erfahrungsmässigen Grundlage ausgehen und sich über die Zusammengehörigkeit oder Nicht-Zusammengehörigkeit der einzelnen Fragen ohne Mühe ein sicheres Urteil bilden zu können.

---

[1] Insbesondere müssen die Töne des sinaitischen Glockenberges herhalten, wenn irgendwelche spontane Naturklänge dem Verständnis zugänglich gemacht werden sollen. Sogar als Seitenstück der Mistpoeffers hat man sie verwerten wollen (Fry, Barisal Guns, Nature, 54. Band (1896), S. 8). Indessen hat wenigstens in diesem Falle der Irrtum eine unverzügliche Richtigstellung erfahren (B. W. S., Barisal Guns, ebenda, 54. Band, S. 102).

Ueber kosmische Staubmassen und das Zodiacallicht.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 6. Juli.)

Die Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen habe ich in zwei Abhandlungen[1]) entwickelt. Veranlasst wurden diese Untersuchungen durch den Wunsch, über die Verhältnisse, welche der Saturnring darbietet, in's Einzelne gehende Aufschlüsse zu erhalten. Hiezu waren ziemlich weitgehende Entwicklungen nöthig, die ich besonders in II in solcher Allgemeinheit durchgeführt habe, dass in der Hauptsache die betreffenden Probleme als gelöst betrachtet werden können.

Unter staubförmigen kosmischen Massen oder kosmischen Staubwolken hat man Aggregate von Massen zu verstehen, deren gegenseitige Entfernungen im Vergleich zu ihren Dimensionen gross sind. Dabei wird man in den meisten Fällen die Theorie nur unter der Voraussetzung zu entwickeln haben, dass das genannte Verhältnis sehr gross ist, da es sich um ganz genaue Formeln nicht handeln kann. Nichts hindert indessen, dass man, ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie, einen Schritt weiter geht. Ganz genaue Formeln, die also auch auf Ansammlungen dicht gedrängter Theilchen anwendbar sind, aufzustellen, dürfte indessen bedeutende Schwierigkeiten darbieten. Solche weitergeführte Entwicklungen verlangt die

---

[1]) I. Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturnringes. Abhdl. der bayer. Akademie der W. Bd. XVI. München 1887. II. Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen etc. Ebenda, Bd. XVIII. München 1893.

Astronomie zunächst nicht, denn die bisher bekannt gewordenen kosmischen Staubwolken enthalten nur sehr dünn vertheilte Materie.

Die Theorie erfordert nicht die Annahme kugelförmiger Gestalt der einzelnen die Staubwolke zusammensetzenden Theilchen, man darf aber diese Annahme machen, ohne die Allgemeinheit zu gefährden. Bei der obigen Definition der Staubwolken, umfassen diese sehr verschiedene kosmische Gebilde z. B. den Saturnring und das Zodiacallicht, aber auch, gewissermaassen als Specialfälle, selbstleuchtende oder theilweise selbstleuchtende Massen, wie die Sternhaufen, wahrscheinlich auch die sogenannten Spiralnebel und schliesslich gehört der ganze sichtbare Fixsterncomplex dazu. Einige Anwendungen auf den letzteren habe ich gelegentlich einer anderen Untersuchung gemacht.[1])

In der vorliegenden Arbeit möchte ich mir erlauben, einige Punkte der früheren Entwicklungen in Betreff der Beleuchtung an sich dunkler Staubwolken näher auszuführen und einige Bemerkungen über das Zodiacallicht hinzuzufügen.

1.

Wir denken uns die Staubwolke — den obigen Bemerkungen gemäss — aus n gleichen Kugeln vom Radius ϱ bestehend und die Lichtquelle sowie den Beobachter in so grosser Entfernung von ihr, dass die Veränderlichkeit dieser Entfernung von Kugel zu Kugel nicht in Frage kommt. Dann wird, wenn zunächst von der gegenseitigen Beschattung und Verdeckung der einzelnen Kugeln abgesehen wird, die Gesammtlichtmenge, welche diese n Kugeln dem Beobachter zusenden,

$$Q = \Gamma' \cdot n \varrho^2$$

wo Γ' eine Constante ist. Ist M die Gesammtmasse dieser n Kugeln, so wird

[1]) Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1896.

$$Q = \Gamma \cdot \frac{M}{\varrho} = \gamma \sqrt[3]{M^2 n}, \tag{1}$$

wo γ und Γ weder von M noch von n und ϱ abhängen. Belegt man, woran festgehalten werden soll, stets denselben Raum mit Kugeln, so wird die mittlere Flächenhelligkeit der Staubwolke ebenfalls durch (1) dargestellt, wenn nur γ eine andere Constante, wie früher, bedeutet. Zertheilt man demnach dieselbe Masse M in eine Anzahl Kugeln, so wird die Lichtmenge der entstehenden Staubwolke mit $\frac{1}{\varrho}$ oder $\sqrt[3]{n}$ wachsen, d. h. je kleiner die einzelnen Kugeln sind, desto heller wird unter sonst gleichen Umständen die Staubwolke sein. Die sehr hellen sogenannten leuchtenden Nachtwolken stellen u. A. solche Ansammlungen sehr kleiner Theilchen dar, wofür ja auch ihr sehr langes Verweilen in so überaus grossen Höhen spricht.

Von selbst ist klar, dass die Formel (1) nur innerhalb gewisser Grenzen gelten kann, denn sonst könnte Q über alle Grenzen hinaus wachsen. Der Grund, weshalb das nicht geschieht, ist leicht zu finden. Je kleiner ϱ bei festgehaltenem M wird, desto mehr treten die gegenseitigen Beschattungen und Bedeckungen der einzelnen Kugeln in Wirksamkeit und so kommt es, dass Q über einen gewissen endlichen Betrag nicht hinauswachsen kann.

Sehr leicht zu übersehen sind die Verhältnisse bei einer zweidimensionalen Vertheilung der Kugeln. Wir nehmen z. B. an, die Mittelpunkte der Kugeln liegen innerhalb eines begrenzten ebenen Flächenstückes F. Dann wird Q zunächst bei der Verkleinerung von ϱ wachsen. Bei fortgesetzter Verkleinerung der Kugeln werden diese aber schliesslich das Ebenenstück F so dicht besetzen, dass sie sich gegenseitig berühren und eine weitere Verkleinerung von ϱ kann demnach nicht erfolgen.

Nennt man für diesen Grenzfall σ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, in dessen Spitzen je 3 sich berührende Kugeln stehen, so ist

$$\sigma = 2\,\varrho \sin 60^0 = \varrho\sqrt{3}$$

und je grösser n ist, desto genauer wird die Formel sein

$$2\,n\,\varrho\,\sigma = F.$$

Nennt man noch P das Gesammtvolumen aller Kugeln und δ die Massendichtigkeit einer jeden, so ist

$$P = \tfrac{4}{3}\,n\,\varrho^3\,\pi = \frac{M}{\delta}.$$

Der kleinste zulässige Werth von ϱ ergiebt sich hieraus:

$$\varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2\,\pi}\cdot\frac{P}{F} = \frac{3\sqrt{3}}{2\,\pi}\,\frac{M}{F\cdot\delta}$$

und der Maximalwerth vom n ist demnach:

$$n = \frac{2\,\pi^2}{27\sqrt{3}}\cdot\frac{F^3}{P^2}.$$

Nennt man weiter den Maximalwerth von $Q : Q_0$ und den Werth von Q für ein bestimmtes gegebenes $n = n_0 : Q_{n_0}$, setzt man der besseren Uebersicht wegen $F = a^2$ und $V = a^3$, so wird:

$$\frac{Q_0}{Q_{n_0}} = \left(\frac{2\,\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.751\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$V : P = \varDelta$ ist umso grösser, je dünner die Massenvertheilung ist. Q_0 wächst also mit $\varDelta^{\frac{2}{3}}$ und kann für grosse $\varDelta$ bedeutend werden. Die Durchsichtigkeit einer solchen Staubschicht nimmt, wie von selbst klar ist, mit der Verkleinerung von ϱ, also der Vergrösserung von n ab.

Ganz ähnliches gilt nun auch für dreidimensionale Staubwolken. Die Entwicklungen in I und II geben hierüber nach jeder Richtung Auskunft. Infolge der gegenseitigen Beschattungen und Verdeckungen der einzelnen Theilchen ergiebt sich auch hier ein Maximalwerth für die Flächenhelligkeit einer Staubwolke, dem man sich durch fortgesetzte Zerstückelung der gegebenen Gesammtmasse nähert. Es tritt aber noch ein

anderer Umstand hinzu. Nennt man die Lichtquelle „Sonne“ und den Winkel an der Kugel im Dreieck Sonne-Kugel-Beobachter, also den Phasenwinkel, α, so wird die Helligkeit einer Staubwolke von α abhängig sein und im Allgemeinen mit Verkleinerung von α zunehmen. Die näheren Umstände dieser Zunahme hängen von dem elementaren Beleuchtungsgesetz für zerstreut reflectirende Substanzen ab und sind deshalb nicht voraussetzungslos angebbar. Die gewöhnlich angewandten photometrischen Elementargesetze für glatte Oberflächen geben für kleine Variationen von α und besonders in der Nähe des Werthes $\alpha = 0$ nur sehr kleine Variationen der Helligkeit. Trotzdem können hier sehr beträchtliche Helligkeitszunahmen stattfinden, die bei nahezu undurchsichtigen Staubwolken ihre Helligkeit auf das Doppelte erhöhen, wenn man von sehr kleinen α zu dem Werthe $\alpha = 0$ übergeht. Dieses Resultat ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass für $\alpha = 0$ die beschatteten Theile der Staubwolke zugleich die verdeckten sind und schon bei geringfügiger Vergrösserung von α die beschatteten Theilchen sichtbar werden und somit die mittlere Helligkeit der Staubwolke abschwächen müssen. Die quantitative Verfolgung dieses Phänomenes ist in I und II geschehen. Dasselbe spielt in der Theorie der Beleuchtung des Saturnringes eine besonders wichtige Rolle und ist hier als sehr auffällig durch die Beobachtung constatirt. Bei sehr durchsichtigen Staubwolken ist es dagegen von untergeordneter Bedeutung. Hier soll davon gänzlich abgesehen werden, wodurch eine grosse Vereinfachung in der Betrachtung eintritt.

Bei den folgenden einfachen Rechnungen sollen die in I und II getroffenen Festsetzungen beibehalten werden. Es seien also Δ und Δ_1 die Entfernung einer Kugel vom Beobachter bezw. von der Sonne, deren Radius R sei. Dann ist die Lichtmenge $Q(\alpha)$, welche eine Kugel vom Radius ϱ beim Phasenwinkel α dem Beobachter zusendet:

$$Q(\alpha) = J \cdot \mu \cdot \frac{R^2}{\Delta^2} \frac{\varrho^2}{\Delta_1^2} f(\alpha).$$

Hierbei ist μ die Albedo nach der von mir eingeführten Definition[1]) und ferner:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i \, d\, i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\,(\cos i, \cos \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\, \varepsilon$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2P} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\, \vartheta \int_{\alpha}^{\pi} \varphi\,(\sin \vartheta \sin (\omega - \alpha), \; \sin \vartheta \sin \omega) \, d\, \omega$$

wobei φ das elementare Beleuchtungsgesetz bedeutet. Bei der bekannten Unsicherheit darüber, welchen Ausdruck man für φ am besten anzuwenden hat, empfiehlt es sich mehrere möglichst einfache bezw. mehr oder weniger erprobte Annahmen zu machen. Die neuere Photometrie hat besonders auf drei solche Annahmen hingewiesen, nämlich:

$$1) \quad \varphi = \cos i \cos \varepsilon, \quad 2) \quad \varphi = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}, \quad 3) \quad \varphi = \cos i$$

wo i und ε Incidenz- und Emanationswinkel bedeuten. Die drei Annahmen sind als das Lambert'sche Gesetz, das Absorptionsgesetz und das Gesetz von Euler bekannt. Für diese 3 Annahmen ist der Reihe nach $P = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und 1, wodurch wird:

$$1) \quad f_1(\alpha) = \tfrac{2}{3} \, [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha]$$

$$2) \quad f_2(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \operatorname{lognat} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{4} \alpha \right]$$

$$3) \quad f_3(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass $L = J \pi \cdot \left(\frac{R}{\varDelta_1}\right)^2$ die Lichtmenge ist, welche ein senkrecht der Sonnenstrahlung ausgesetztes Flächenelement $= 1$ in der Entfernung $\varDelta_1$ erhält. Für genügend grosse $\varDelta_1$, für solche nämlich, für welche $4 \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \sin^2 \sigma$ gesetzt werden darf, — σ ist der scheinbare

---

[1]) I art. 5.

Sonnenradius — ist $\pi\left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2$ der scheinbare Flächeninhalt der Sonnenscheibe, von der betr. Kugel aus gesehen, und J ist demnach die scheinbare Flächenhelligkeit der Sonne, also völlig unabhängig von Δ_1. Bezeichnet J_M die mittlere scheinbare Flächenhelligkeit der Mondscheibe und ist σ_M ihr Radius, so kann man setzen[1]):

$$J \cdot \sigma^2 = J_M \sigma_M^2 \cdot 569500.$$

Betrachten wir nun nur — der Einfachheit wegen — eine homogene Staubwolke vom Rauminhalt R_1. Die Zahl aller in R_1 enthaltenen Kugeln sei N. Dann ist die scheinbare Flächenhelligkeit H in einer von einem Punkte ausserhalb der Wolke gezogenen Richtung, welche die Wolke in zwei Punkten 1 und 2 schneidet, wo die Strecke $\overline{12} = X$ ist, gegeben durch:

$$H = \Gamma \frac{\varrho^2 N}{R_1} \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\Delta_1^2} \cdot f(a)\, d\,h. \tag{1}$$

h und h_1 sind die innerhalb der Staubwolke gelegenen Stücke der Geraden, welche von dem betrachteten Punkt in $\overline{12}$ zum Beobachter bezw. zur Sonne gezogen werden. Ferner ist gesetzt worden:

$$\lambda = \frac{N \varrho^2 \pi}{R_1}, \quad \Gamma = J \cdot \mu\, R^2. \tag{2}$$

Ist, wie früher, P der Raum, den alle Kugeln zusammen einnehmen, so wird:

$$\lambda = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{R_1} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{S}{\varrho}; \quad S = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{R_1}.$$

S ist das Maass für die Dichtigkeit der Massenvertheilung. Jetzt kann man H auch schreiben:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \lambda \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\Delta_1^2} f(a)\, d\,h. \tag{3}$$

Wenn der Beobachter und die Sonne soweit von der Staub-

---

1) Müller, Photometrie der Gestirne S. 315.

wolke entfernt sind, dass ihre Dimension dieser Entfernung gegenüber sehr klein ist, hat man:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \frac{f(a)}{\Delta_1^2} \cdot \Phi(\lambda); \quad \Phi(\lambda) = \lambda \int_0^X e^{-\lambda(h+h_1)} \cdot dh.$$

Einer beliebig weit fortgesetzten Zerstückelung der Masse, durch Verkleinerung von ϱ, steht hier nichts im Wege. Aber für $\varrho = 0$ nähert sich H einem endlichen Grenzwerthe, da $\Phi(\lambda)$ für $\lambda = \infty$ endlich bleibt.

Für $\lambda = \infty$ wird aber die Staubwolke unendlich wenig durchsichtig. Zu dem Integrale $\Phi(\lambda)$ können dann nur Schichten einen Betrag liefern, für welche h und h_1 unendlich klein sind. Zieht man an der Stelle der Oberfläche der Staubwolke, auf welche sich die scheinbare Helligkeit H bezieht, die Tangentialebene und nennt man i und ε den Incidenz- bezw. Emanationswinkel der von der Sonne empfangenen bezw. dem Beobachter zugesandten Strahlen, so wird, von etwaigen singulären Punkten der Oberfläche abgesehen:

$$h_1 = \frac{h \cos \varepsilon}{\cos i}$$

und es wird demnach für $\lambda = \infty$:

$$\Phi(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i}} dh = \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

d. h. die Staubwolke reflectirt das Licht wie ein fester glatter Körper, dessen Oberfläche das Absorptionsgesetz (2) befolgt und dessen Albedo vom Phasenwinkel abhängt. Daraus ergiebt sich z. B. die Lichtmenge einer kugelförmigen Staubwolke vom Radius S_1:

$$Q(a) = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \frac{S_1^2}{\Delta^2} \cdot \frac{f(a)}{\Delta_1^2} \cdot f_2(a),$$

wo $f_2(a)$ der obige Ausdruck (S. 270) ist und $f(a)$ das Elementargesetz ausdrückt, welchem die einzelnen Kugeln folgen.

Für zwischen 0 und ∞ gelegene Werthe von λ ist die Ausrechnung des Integrales im Allgemeinen recht verwickelt, wie das Beispiel einer kugelförmigen Staubwolke zeigt, das ich

in II (S. 12 ff.) behandelt habe. Um ein möglichst einfaches Beispiel zu betrachten, soll eine von zwei parallelen Ebenen, im Abstand X, begrenzte Staubschicht vorliegen und es befinde sich sowohl die Sonne als auch der Beobachter auf derselben Seite der Schicht. Bezeichnet wieder i und ε Incidenz- und Emanationswinkel und x die Tiefe des betrachteten Volumelementes unter der oberen Grenzebene, so ist:

$$h_1 = \frac{x}{\cos i}; \quad h = \frac{x}{\cos \varepsilon}.$$

Die Integration ist dann sofort ausführbar und man hat:

$$\Phi(\lambda) = \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}\left(1 - e^{-\lambda X \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}}\right).$$

Bezeichnet man also:

$$\nu = S \cdot X \cdot \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon},$$

so wird:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi \Delta_1^2} f(\alpha) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \Psi; \quad \Psi = 1 - e^{-\frac{\nu}{\varrho}}. \tag{4}$$

Ψ nimmt mit abnehmendem ϱ fortwährend zu und erreicht für $\varrho = 0$ sein absolutes Maximum. Sobald $i > 90^0$ gelten die Formeln nicht mehr. Ohne auf diesen leicht zu erledigenden Fall näher einzugehen, sei nur hervorgehoben, dass dann jedenfalls für $\lambda = 0$ und für $\lambda = \infty$ $H = 0$ sein muss — im letzteren Fall liegt eine von hinten beleuchtete undurchsichtige Schicht vor — so dass also das Maximum der Helligkeit für einen dazwischenliegenden Werth von λ stattfinden muss.

Ich betrachte nun den Fall, wo die Sonne innerhalb der Staubwolke, der Beobachter dagegen in sehr grosser Entfernung ausserhalb liegt. Die Formel (3) gilt dann, wenn nur $h_1 = \Delta_1$ gesetzt wird. Da hier $f(\alpha)$ innerhalb des Integrales steht, ist eine weitere Entwicklung der Formel von der Wahl des elementaren Beleuchtungsgesetzes abhängig.

Fällt man von der Sonne eine Senkrechte s auf die vom Beobachter zum betrachteten Volumelement gezogene Gerade

und ist m der Abstand des Fusspunktes dieser Senkrechten von der Eintrittsstelle der genannten Geraden in die Staubwolke, so hat man:

$$h = m + s \operatorname{cotg} a; \quad h + \Delta' = m + s \operatorname{cotg} \frac{a}{2}$$

und es ergiebt sich aus (3):

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\lambda}{s} \cdot e^{-\lambda m} \int_{a_1}^{a_0} e^{-\lambda s \operatorname{cotg} \frac{1}{2} a} \cdot f(a)\, d\, a,$$

wo a_0 und a_1 die Werthe von a für die Eintritt- und Austrittsstelle bedeuten. Setzt man noch:

$$\nu = \lambda s; \quad \Psi_\nu(a) = \nu \int_0^a e^{-\nu \operatorname{tg} \frac{a}{2}} f(\pi - a)\, d\, a,$$

so wird:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi s^2} e^{+\nu \operatorname{cotg} a_0} \{\Psi_\nu(\pi - a_1) - \Psi_\nu(\pi - a_0)\}. \qquad (5)$$

Die Integrale Ψ sind in jedem Falle leicht numerisch auszuwerthen. Ich habe beispielsweise eine kleine Tafel für das Lambert'sche Gesetz berechnet. Hier ist:

$$f(\pi - a) = \tfrac{8}{3} [\sin a - a \cos a].$$

Die am Schlusse mitgetheilte Tafel ist nicht nach dem Argumente ν, sondern nach $\nu_1 = 0.43429\, \nu$ geordnet und giebt eine genügende Uebersicht über den Verlauf der Function Ψ zwischen $\nu_1 = 0$ und $\nu_1 = 1$. Es sollen nun einige numerische Nachweise zu den vorstehenden Formeln gegeben werden.

Da die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond — von der Erde aus gesehen — nicht wesentlich verschieden sind, so hat man:

$$\Gamma = \mu \cdot J_M \cdot R^2 \cdot 569500.$$

Betrachtet man zuerst eine Scheibe von Staubmaterie, die von ausserhalb beleuchtet wird, so ist nach (4) das Maximum ihrer Helligkeit:

$$H_{\max} = \frac{\Gamma}{\pi \Delta_1^2} f(a) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

oder:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2 \cdot 569500 \cdot f(a) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}.$$

Drückt man Δ_1 in Einheiten der Entfernung Sonne-Erde aus, so wird:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} = 12.3 \times \mu \cdot \frac{f(a)}{\pi} \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{\Delta_1^2}.$$

$\frac{f(a)}{\pi}$ ist für $a = 0$ für die drei oben betrachteten Beleuchtungsgesetze der Reihe nach $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und für $a = 90^0$ grösser als $\frac{1}{3}$. Da für $i = \varepsilon$, $\frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} = \frac{1}{2}$ ist, so kommt man leicht auf Maximalhelligkeiten:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} > 2 \cdot \frac{\mu}{\Delta_1^2},$$

was für $\Delta_1 = 1000$ (etwa 30 Neptunsweiten):

$$H_{\max} = J_M \cdot 2.10^{-6} \mu$$

ergiebt. Eine solche Flächenhelligkeit würde also z. B. eine Staubwolke haben können, die eine Parallaxe von 0."01 besitzt und von einem Sterne von der Grösse 10.4 beleuchtet wird, der in einer Entfernung von 10" sich von ihr befindet. Für schon recht dunklen Oberflächen entsprechende Albedowerthe wird man so, in dem angenommenen Falle, auf Flächenhelligkeiten

$$H = J_M \cdot \gamma \cdot 10^{-7}$$

geführt, wo γ einige Einheiten ausmacht. Diese Zahl vergrössert sich im quadratischen Verhältnis mit der Annäherung des Sternes an die Staubwolke.

Liegt der Stern innerhalb der Staubwolke, so ist nach (5):

$$\frac{H}{J_M} = \mu \times 3.93 \cdot \frac{e^{\nu \operatorname{cotg} a_0}}{s^2} \{\Psi_\nu (\pi - a_1) - \Psi_\nu (\pi - a_0)\}.$$

Nimmt man z. B. α_1 ganz beiläufig in der Nähe von Null, $\alpha_0 = 130^0$, $\nu_1 = 0.2$, so ergiebt sich mit Hülfe der Tabelle

$$H = \mu\, J_M \cdot \frac{0.94}{s^2}.$$

Ist π'' die jährliche Parallaxe der Staubwolke in Secunden, s'' der in Secunden ausgedrückte Abstand des Sternes, von derselben Leuchtkraft wie die Sonne, von dem betrachteten Theile der Staubwolke, so ist

$$s'' = \pi'' \sqrt{\frac{0.94\,\mu}{H} \cdot J_M}.$$

Setzt man z. B. $\frac{H}{J_M} = \lambda \cdot 10^{-7}$; $\pi'' = 0''.01$; $\mu = \frac{1}{4}$ (entsprechend einer Albedo, die zwischen der des Mercur und Mars liegt), so ist ungefähr:

$$s'' = 15'' \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Auch in diesem Falle macht es keine Schwierigkeiten in der Entfernung von mehreren Secunden von einem schwächeren Sterne Flächenhelligkeiten der Staubwolke zu erhalten, die vom Range 10^{-7} der mittleren Flächenhelligkeit der Vollmondscheibe sind. Es ist dabei nicht ausser Betracht zu lassen, dass sehr wahrscheinlicher Weise die meisten Sterne eine viel bedeutendere Leuchtkraft als die Sonne besitzen. Man kann demnach die berechneten Werthe auch für beträchtlich kleinere Parallaxen als 0''.01 gelten lassen. In beiden Fällen sieht man also dann Nebelmassen in der Nähe von Sternen. Es fragt sich nun aber, ob Nebelmassen von der angenommenen Flächenhelligkeit überhaupt bemerkbare Objecte sind.

Die Bestimmung der Flächenhelligkeit von ausgedehnten lichtschwachen Gebilden am Himmel ist bisher nur in wenigen Einzelfällen und auch hier nur mit geringer Zuverlässigkeit durchgeführt worden.

Namentlich ist man nur sehr selten über relative Helligkeitsschätzungen von Gebilden unter sich hinausgekommen und

Beziehungen auf bestimmte, also gewissermaassen absolute Einheiten sind fast gar nicht vorhanden. Als eine solche Einheit empfiehlt sich die oben benutzte, nämlich die mittlere Flächenhelligkeit der Vollmondscheibe oder diese Helligkeit mit einer negativen ganzen Potenz von 10 multipliciert. Behält man die erstere als Einheit bei, so werden die reciproken Flächenhelligkeiten, die ich mit A bezeichnen will, selbst der hellsten Nebelflecke und noch mehr minder heller Objecte, wie der Milchstrasse, allerdings durch grosse Zahlen dargestellt, was indessen wohl kaum bedenklich sein dürfte.

Es mag nun das Wenige, was in dieser Beziehung bekannt ist, hier erwähnt werden. Es ist sehr zu bedauern, dass man kaum über sehr vage und unsichere Angaben hinaus gelangen kann, denn die obigen Bemerkungen dürften, abgesehen von andern Fragen, darauf hinweisen, dass mit besser begründeten Feststellungen von solchen Flächenhelligkeiten ein recht erhebliches Interesse verbunden ist.

Der Himmelsgrund ist durch die Sonne oder durch den Vollmond nicht gleichmässig erhellt, vielmehr hängt, wie selbstverständlich, die Flächenhelligkeit der einzelnen Theile des Himmels von ihrer Lage zum erleuchtenden Gestirn und von der Höhe des letzteren über dem Horizont ab. Einen genaueren Nachweis hierüber hat Herr Wild[1]) gegeben. Danach ist z. B. im Azimuthe 90° von der Sonne entfernt das Verhältnis der Flächenhelligkeit der Sonnenscheibe zur Flächenhelligkeit des Himmelsgrundes $\gamma \cdot 10^6$, wo γ eine nicht sehr von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet. Ungefähr dieselbe Zahl würde hieraus für die in den obigen Einheiten ausgedrückte reciproke Helligkeit des Himmelsgrundes bei Vollmond folgen, da Vollmond und Sonne nahe von gleicher scheinbarer Grösse sind.

Statt dessen führt aber Olbers[2]) — wohl eine der frühesten Angaben in diesem Gebiete — für die Zahl A 10^5 an. Da indessen diese Angabe ohne nähere Begründung gemacht

---

[1]) Bulletin der Akademie in Petersburg. 1876 u. 1877.

[2]) Olbers Werke I. S. 139.

ist, dürfte wohl die erwähnte Wild'sche zuverlässiger sein. Bei Vollmond verschwindet nun aber für das freie Auge, die Milchstrasse überall, vielleicht mit Ausnahme der allerhellsten Partien. Hier ist die Helligkeit des Himmelsgrundes um die der Milchstrasse vermehrt. Bleibt diese Helligkeit unbemerkt, so muss der Quotient aus der genannten Vermehrung dividirt durch die Helligkeit des Himmelsgrundes $< \varepsilon$ sein, wo ε eine Zahl ist, die man wohl kleiner als etwa $\frac{1}{40}$ annehmen kann. Danach würde also für die Milchstrasse für A der Werth $\frac{1}{\varepsilon} \cdot 10^5$ bezw. $\frac{1}{\varepsilon} 10^6$ folgen, also werden voraussichtlich auch die hellen Partien der Milchstrasse ein A aufweisen, das vom Range 10^7 ist.

Die hellen, besonders einige kleine planetarische Nebel, scheinen eine viel grössere Helligkeit zu besitzen, doch lassen sich nur ganz unsichere Angaben in dieser Richtung machen. Die wenigen hierher gehörenden Angaben, deren Nachprüfung und Vermehrung dringend erwünscht wäre, hat Herr G. Müller in seiner Photometrie der Gestirne zusammengestellt.

Nach Herrn E. Pickering sendet der helle planetarische Nebel G. C. 4964 soviel Licht aus, wie ein Stern von der Grösse 8.6.[1]) Die Lichtmenge, welche der mittlere Vollmond der Erde zusendet, ist gleich derjenigen, welche ein Stern von der Grösse — 11.77 besitzen würde.[2]) Der genannte planetarische Nebel ist ungefähr kreisrund und hat nach einer von Herrn Villiger auf mein Ersuchen angestellten Messung einen Durchmesser von 21". Hiermit ergiebt sich A für diesen Nebel zu rund 18000. Ferner hat Herr Huggins[3]) die Flächenhelligkeit von 3 Nebeln bestimmt, hierbei als Einheit die Flächenhelligkeit einer auf einem nahen Dache aufgestellten Kerzenflamme genommen und hierfür gefunden:

---

[1]) Müller a. a. O. S. 420.

[2]) Müller a. a. O. S. 340.

[3]) Huggins, Philosoph. Transact. Vol. 156, part. I, S. 392 ff. und Müller S. 420.

		A
Nebel G. C. 4628	1 : 1508	618
Ringnebel. Leyer	: 6032	2472
Dumbbellnebel	: 19604	8032.

Ueber das Verhältnis der Helligkeit der benutzten Kerzenflamme zu der des Vollmondes irgendwie zuverlässige Angaben zu finden, ist mir nicht gelungen. Nimmt man die für eine gewöhnliche Normalkerze geltenden Zahlen an, nämlich:[1]) Flächenhelligkeit der Sonne zu der der Flamme 220420 : 1, Lichtmenge der Sonne zu der des Vollmondes 569500, Sonnen- bezw. Monddurchmesser 1919.″5 bezw. 1865.″7, so ergeben sich die bereits angeführten Zahlen *A* für die 3 Nebel. Diese Zahlen sind nun aber so auffallend klein, dass man sie als verfehlt ansehen muss. Es ist nicht gerade wahrscheinlich, dass dies in der allerdings ganz unsicheren Reduction begründet ist. Was die relative Helligkeit der 3 Nebel betrifft, so scheint dieselbe, wie gleich erwähnt werden soll, ziemlich zutreffend bestimmt worden zu sein.

Die genauere Bestimmung der relativen Flächenhelligkeiten nebeliger Objecte, bereitet bekanntlich praktische Schwierigkeiten, die noch nicht überwunden sind. Aber man kann doch mit verhältnismässig einfachen Hülfsmitteln zu einer rohen zahlenmässigen Abschätzung gelangen. Will man dann die Zahlen *A* gewinnen, so wird man gegenwärtig noch am besten den Werth von *A* für den von Herrn Pickering bestimmten Nebel G. C. 4964 zu Grunde legen, da dieser Werth verhältnismässig nicht so grossen Unsicherheiten ausgesetzt zu sein scheint. Die Abschätzung der relativen Flächenhelligkeit anderer Nebel im Vergleich zu dem genannten, kann in der zunächst geforderten Annäherung mit Hülfe eines Keilphotometers erfolgen. Die Bedenken gegen eine solche Anwendung des Keilphotometers sollen dabei, weil allgemein bekannt, ganz unerörtert bleiben und es soll nur erwähnt werden, dass solche Vergleichungen nur auf die hellsten Theile ausgedehnter Ob-

---

[1]) Müller a. a. O. S. 312.

jecte sich beziehen können.[1]) Ich habe nun Herrn Villiger ersucht, mit dem schönen Töpfer'schen Keilphotometer, welches mit dem $10^1/_2$ zölligen Refractor der Münchener Sternwarte in Verbindung gebracht werden kann, einige passend ausgewählte Nebelobjecte zu vergleichen, was auch im December 1900 und Mai 1901 geschehen ist. Auf die Details dieser Messungen soll hier nicht eingegangen werden. Ich führe nur die resultierenden Mittelwerthe von A an, wobei für den Nebel G. C. 4964 der obige Werth $A = 18000$ angenommen wurde.

G. C. 4628	$A =$ 13900
Ringnebel in der Leyer	61800
Dumbbellnebel	133000
G. C. 4964	18000
G. C. 6826	32100
Andromedanebel	16100
Sternhaufen im Hercules Messier 13	45700

Die mit $A = 13900$ für G. C. 4628 berechneten, oben erwähnten, Messungen von Herrn Huggins ergeben für:

Ringnebel	$A =$ 55700
Dumbbellnebel	181000

was immerhin in passabler Uebereinstimmung mit den Bestimmungen des Münchener Keilphotometers steht.

Zu Gunsten der oben angeführten Zahlen dürfte der für den Sternhaufen im Hercules gefundene Werth von A sprechen. Nach dem von Herrn Scheiner gegebenen Catalog ergiebt sich, dass in dem innersten und dichtesten Theil des Sternhaufens (30 Bogensecunden im Quadrat) im Mittel 0.1067 Sterne von der Grösse 12.7 auf dem Areale einer Quadratsecunde stehen. Hieraus ergiebt sich A zu 22000. Bei der Unsicherheit, die immerhin der Grössenschätzung anhaftet, dürfte die Uebereinstimmung der beiderlei Zahlen befriedigend sein, immer voraus-

[1]) Um ein homogenes Gesichtsfeld zu erzielen wird man zwei gleiche Keile oder Stücke von solchen, deren Spitzen entgegengesetzt liegen, anwenden. Das eine Keilstück wird man am besten fest mit dem Oculare verbinden.

gesetzt, dass man nur die Grössenordnung von A zu bestimmen versucht.

Endlich kann man auf Grund meiner „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne,“ [1]) die mittlere Flächenhelligkeit nicht zu kleiner Theile der Milchstrasse bestimmen. Das ist freilich gegenwärtig nicht ohne Hypothesen möglich, wie ich a. a. O. S. 47 ff. gezeigt habe, aber einiges Interesse dürften doch dergleichen Rechnungen haben.

Bezeichnet λ eine Grösse, die für die Milchstrasse im Mittel 0.25 ist, h_m die Lichtmenge eines Sternes von der Grösse m, n die Sterngrösse, unter welcher die hellsten Sterne an der Grenze des Sternsystems erscheinen, A_m die Anzahl aller Sterne auf einem bestimmten Areale des Himmels, z. B. auf einem Quadratgrad, von den hellsten herab bis zu denen von der Grösse m, dann ist:

$$A_m = A_n \cdot \frac{5-\lambda-(3-\lambda)\dfrac{h_m}{h_n}}{2} \quad \text{wenn } m > n$$

und

$$A_m = A_n \cdot \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \qquad m < n$$

Ferner hat man $h_m = h_n\,\gamma^{m-n}$, wo $\log\gamma = -0.4$. Damit ergiebt sich, wenn $\gamma' = \log\text{nat}\,\gamma$ ist, für $m > n$:

$$h_m\,d\,A_m = -\frac{3-\lambda}{2}\cdot A_n\,h_n\,\gamma'\cdot\gamma^{2(m-n)}\cdot d\,m$$

und die Lichtmenge aller Sterne zusammen von der Grösse n bis zu den schwächsten wird:

$$-\frac{3-\lambda}{4}\,A_n\,h_n\,\gamma'\int_0^\infty \gamma^x\,d\,x = \frac{3-\lambda}{4}\,A_n\,h_n\,.$$

Ebenso findet sich für $m < n$:

$$h_m\,d\,A_m = -\frac{3-\lambda}{2}\,A_n\,h_n\,\gamma'\cdot\gamma^{\frac{m-n}{2}(\lambda-1)}\cdot d\,m$$

und die Lichtmenge aller Sterne zusammen von den hellsten, für welche offenbar genähert $m - n = -\infty$ gesetzt werden darf:

---

[1]) Abhandlungen der Akademie d. W. zu München. Bd. XIX. 1898.

$$\frac{3-\lambda}{1-\lambda} \cdot A_n h_n \gamma' \cdot \int_{-\infty}^{0} \gamma^x \, dx = A_n h_n \cdot \frac{3-\lambda}{1-\lambda}.$$

Als Gesammtlichtmenge Q ergiebt sich also:

$$Q = A_n h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{4(1-\lambda)}.$$

Was man auch, wenn unter m eine Zahl $> n$ verstanden wird, schreiben kann:

$$Q = A_m h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{2(1-\lambda)\left[(5-\lambda)-(3-\lambda)\frac{h_m}{h_n}\right]}.$$

Für den typischen Verlauf der Milchstrasse wurde $\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt, wodurch wird:

$$Q = A_m h_n \cdot \frac{11}{6\left[1 - \frac{11}{19} \cdot \frac{h_m}{h_n}\right]}.$$

Nimmt man für m die Grösse der schwächsten W. Herschelschen Sterne und schliesst man sich den weiteren Annahmen, die ich a. a. O. gemacht habe, an, so erhält man für die 4 folgenden verschiedenen Annahmen von m die daneben stehenden Werthe von n:

1)	$m = 13.5$	$n = 13.22$
2)	14.0	12.95
3)	14.5	12.86
4)	15.0	12.81

Für diese 4 Annahmen hat die Grösse:

$$S = \frac{h_n}{h_{12}} \cdot \frac{11}{6\left[1 - \frac{11}{19} \frac{h_m}{h_n}\right]}$$

der Reihe nach die Werthe: 1.08, 0.98, 0.95 und 0.94. Man kann demnach bei Ueberschlagsrechnungen, um die es sich hier handelt, $S = 1$ setzen und es ergiebt sich so:

$$Q = A_m h_{12}.$$

Die Lichtmenge eines Quadratgrades von der Flächenhelligkeit des Vollmondes wäre — 13.46 Grössenklassen. Für A ergiebt sich hieraus:

$$\log A = + 10.184 - \log A_m; \quad A = 1.5 \times 10^{10} \cdot \frac{1}{A_m}.$$

A_m ist hier also die Anzahl Herschel'scher Sterne auf dem Quadratgrad. In der typischen Vertheilung ist in der Milchstrasse A_m etwa $= 2000$ und

$$A = 7\tfrac{1}{2} \times 10^6.$$

Für sehr helle Stellen der Milchstrasse mag A auf eine Million oder noch auf weniger herabsinken.

Nach den vorstehenden Erwägungen ist also kaum zu bezweifeln, dass kosmischer Staub in der Nähe leuchtender Massen sich als auf nicht unbeträchtliche Strecken ausgebreitete schwach leuchtende Nebelmaterie darstellen kann. Sind die einzelnen Staubtheilchen überaus klein, vom Range der Wellenlänge des Lichtes, so werden bekanntlich die kurzwelligen Strahlen in stärkerem Maasse reflectirt als die langwelligen und die Staubwolke wird sich dann leichter auf der photographischen Platte zeigen als dem Auge direct bemerkbar machen.

Es scheint nicht unwahrscheinlich, dass gewisse Theile der Spiralnebel, auf solche erleuchtete Staubwolken zurückzuführen sind. Unsere Sonne ist, worauf das Zodiacallicht hindeutet, von einer dünnen Staubwolke umgeben, welche über die Erdbahn hinausreicht. Sie wird den nächsten Fixsternen deshalb als ein nebliger Stern erscheinen. Die Nebelhülle ist freilich wenig ausgedehnt, hat aber, wie leicht zu sehen, für ausserhalb des Sonnensystems gelegene Beobachter durchaus noch merkliche Helligkeit, insoweit sie natürlich nicht durch den in ihrer Nähe stehenden Stern überstrahlt wird.

2.

Wie schon erwähnt wurde, zähle ich zu den staubförmigen kosmischen Massen das Zodiacallicht. Unter den mancherlei Hypothesen, welche zur Erklärung dieses Phänomenes aufge-

stellt worden sind, scheint mir die einfachste folgende zu sein: Der Raum des Sonnensystemes in der Nähe der Sonne bis zu Gegenden, welche die Erdbahn jedenfalls noch umschliessen, ist ausgefüllt mit Theilchen kosmischen Staubes, welche das Sonnenlicht zurückwerfen. Diese Staubwolke wird sich um eine Ebene, in welcher die Axe des Zodiacallichtes liegt, gruppiren, so dass sie in einer auf die Ebene senkrechten Richtung eine relativ geringe Ausdehnung besitzt. In der genannten Ebene selbst wird sie, da das Zodiacallicht ständige Unterschiede im Aussehen, die von der Jahreszeit abhängen, nicht zu zeigen scheint, nach allen Richtungen gleich ausgebreitet sein. In der Hauptsache wird also diese Staubwolke die Form einer Rotationsscheibe aufweisen, deren Mitte in der Sonne liegt und die über die Erdbahn hinausreicht. Die Dichtigkeit der Massenvertheilung wird wahrscheinlich von der Sonne nach Aussen zu abnehmen und es wäre möglich, dass sich die staubförmige Materie bei zu grossen Entfernungen von der Sonne nachweisen liesse, aber in viel grösserer Sonnenentfernung, als die der Erde, wird sie jedenfalls überaus dünn und ihr Einfluss also sehr gering sein müssen.

Ob die Axe des Zodiacallichtes wirklich in der Ekliptik liegt und also die Rotationsaxe der Scheibe senkrecht darauf steht, bleibt dahingestellt. Früher hat man daran nicht gezweifelt, neuerdings aber haben zuverlässige Beobachter dies gethan. So hat Herr Marchand[1]) und ganz neuerdings Herr M. Wolf[2]) gefunden, dass die Axe des Zodiacallichtes eher in der Ebene des Sonnenaequators als in der Ekliptik liegend anzunehmen sei.

Die oben erwähnte Ansicht über das Zodiacallicht drängt sich von selbst auf, wenn man sich erinnert, dass auch sonst verschiedene astronomische Erfahrungen auf die Anwesenheit kosmischen Staubes, namentlich in der Umgebung der Sonne

[1]) Compt. Rend. Band CXXI, S. 1134. 1895.

[2]) Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiacallichts und den Gegenschein. Sitzb. d. Münchener Akademie d. W. 1900. S. 197—207.

unzweideutig hinweisen. Vor 9 Jahren[1]) habe ich mich ausdrücklich zu dieser Ansicht bekannt, die auch von anderer Seite, so von dem um die Erforschung des Zodiacallichtes hochverdienten A. Searle verfochten worden ist und eine nähere Begründung in Aussicht gestellt. Dass eine solche bisher nicht erfolgt ist, lag einmal darin, dass 1 Jahr später Herr Searle[2]) die Sachlage eingehend beleuchtet hat und ferner darin, dass zuverlässige photometrische Angaben über die Helligkeitsvertheilung im Zodiacallicht nicht zu beschaffen waren und meine eigenen dahin gerichteten Versuche einen Erfolg nicht hatten.

Eine Aenderung dieser Sachlage ist zwar bisher nicht eingetreten, aber es ist durch die neuesten Arbeiten von M. Wolf die Aussicht eröffnet worden eine solche erwarten zu können. Herrn Wolf ist es in der That gelungen, eine photographische Methode zu finden, welche die Helligkeitsvertheilung im Zodiacallichte zu erforschen erlaubt und diese scheint mir demnach einen höchst bedeutungsvollen Fortschritt auf diesem Gebiete anzubahnen. Man darf also hoffen in nicht zu ferner Zeit die erforderlichen photometrischen Daten zu erhalten, welche über die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit der einzelnen Ansichten über das Wesen des Zodiacallichts im Grossen und Ganzen zu entscheiden gestatten werden.

In dieser Richtung lässt sich freilich, wie ich glaube, schon jetzt manches sagen und die Ausarbeitung der verschiedenen Theorien im Einzelnen dürfte zur Ausscheidung der einen oder andern von diesen, als unzulässig, führen. Eine solche mehr ins Détail gehende Beleuchtung hat einer meiner Schüler unternommen. Ohne dieser vorgreifen zu wollen, möchte ich mir hier nur einige ganz kurze allgemeine Bemerkungen erlauben mit Zugrundelegung der oben erörterten Ansicht über das Wesen des Zodiacallichtes. Veranlasst werde ich hierzu durch zweierlei Umstände:

---

[1]) Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. München 1892.

[2]) Researches on the Zodiacal Light. Annales of the Harvard College Observatory. Vol. XIX, II, 1893.

Erstens ist in verschiedenen Publicationen, zum Theil von populärer Tendenz, mein Name mit Ansichten über das Zodiacallicht in Verbindung gebracht worden, die ich niemals gehabt und noch weniger ausgesprochen habe. Dann aber sind auch Einwände gegen die oben erwähnte Ansicht vorgebracht worden, die ich bereits a. a. O. widerlegt habe, ohne freilich diese Widerlegung durch mathematische Formeln unterstützt zu haben. Das letztere möchte ich in allgemeinen Umrissen nunmehr nachholen.

Die Theorie der Beleuchtung von Staubwolken tritt hier in der einfachsten Form auf, denn die gegenseitige Beschattung und Verdeckung der einzelnen Theilchen kann kaum einen bemerkbaren Einfluss ausüben, weil die Masse des Zodiacallichtes jedenfalls ausserordentlich dünn verstreut ist, wie der hohe Grad von Durchsichtigkeit dieses Gebildes beweist. Es wäre möglich, dass hierüber genauere Auskunft durch systematisch ausgeführte photometrische Fixsternbeobachtungen zu erlangen wäre, denn wenn eine merkbare Schwächung der das Zodiacallicht durchquerenden Lichtstrahlen stattfindet, müssten Sterne, die in der Nähe der Axe des Zodiacallichtes stehen, Helligkeiten zeigen, die von der Elongation von der Sonne abhängen. Die Schwierigkeit einer solchen Untersuchung liegt in dem Umstande, dass man die Sterne bis zu beträchtlicher Annäherung an die Sonne verfolgen müsste und somit die Extinction durch die Erdatmosphäre einen bedeutenden Einfluss erhielte. Man würde deshalb wohl ein positives Resultat nur dann erhalten, wenn das Zodiacallicht das Sternlicht um einen nicht zu kleinen Procentsatz schwächen würde. Indessen wäre auch ein negatives Resultat offenbar von wissenschaftlichem Interesse.

Nach dem oben Gesagten werden wir anzunehmen haben, dass die Anzahl der in der Raumeinheit enthaltenen, das Zodiacallicht verursachenden kugelförmigen Körper $\frac{N}{R_1}$ (s. oben) eine Function des Ortes ist. Es soll jetzt mit σ der Radius einer der kleinen Kugeln, mit ϱ und r die Entfernung eines Volumelementes von der Sonne bezw. von der Erde, schliesslich mit

a die Entfernung Erde-Sonne bezeichnet werden. Die Flächenhelligkeit h eines kleinen Theiles des Himmels, wo das Zodiacallicht sichtbar ist, wird man ganz analog dem Früheren erhalten:

$$d h = \Phi \cdot f(a)\, d r.$$

Hierin hat Φ die Bedeutung:

$$\Phi = \tfrac{3}{4} J \mu \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\delta}{\sigma}; \quad \delta = \tfrac{4}{3} \pi \sigma^3 \frac{N}{R_1},$$

wo also J, μ, R und $f(a)$ die frühere Bedeutung haben und δ als die Dichtigkeit der Massenvertheilung anzusehen ist. Es soll nun hier nur die Lichtvertheilung in der Axe des Zodiacallichtes untersucht werden. Dann wird die Sonne im Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius P liegen, welcher die staubförmige Masse begrenzt. Innerhalb desselben Kreises soll die Erde in der Entfernung a vom Centrum liegen und ferner soll ϑ der Winkel zwischen den Richtungen Erde-Volumelement und Erde-Sonne sein. Die erstere Richtung soll den Kreis in der Entfernung r_1 von der Erde treffen. Wegen der oben erörterten Annahme, dass nämlich die Helligkeit des Zodiacallichtes keine Abhängigkeit von der Jahreszeit zu haben scheint, wird Φ nur als Function von ϱ anzunehmen sein. So ergiebt sich also für die Flächenhelligkeit h in der Elongation ϑ von der Sonne der Ausdruck:

$$h = \int_0^{r_1} \Phi(\varrho) \cdot f(a) \cdot d r. \tag{1}$$

Hierin kann man nach Belieben r, ϱ oder a als Integrationsvariable einführen und jede dieser Formen bietet gewisse Vortheile dar. Dabei sind die Formeln zu benutzen:

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2 a r \cos\vartheta$$

$$\sin a = \frac{a \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2 a r \cos\vartheta}}$$

$$r_1 = a \cos\vartheta + \sqrt{P^2 - a^2 \sin^2\vartheta}$$

Führt man ϱ als Integrationsvariable in (1) ein, so hat man:

$$d\varrho = \frac{r - a\cos\vartheta}{\varrho} \cdot dr = \cos a \cdot dr$$

und zerlegt man das Integral in (1) für: $\vartheta \cdot \leqq 90^0$ in:

$$\int_0^{r_1} = \int_0^{a\cos\vartheta} + \int_{a\cos\vartheta}^{2a\cos\vartheta} + \int_{2a\cos\vartheta}^{r^1}$$

so ergiebt sich, wenn noch $f(a) + f(\pi - a) = \varphi(a)$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} h &= \int_{a\cos\vartheta}^{a} \frac{\Phi(\varrho)}{\cos a}\,\varphi(a)\,d\varrho + \int_a^P \Phi(\varrho)\cdot\frac{f(a)}{\cos a}\,d\varrho \quad \ldots \quad \vartheta < 90^0 \\ h &= \int_a^P \Phi(\varrho)\cdot\frac{f(a)}{\cos a}\,d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vartheta > 90^0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hier ist a zu bestimmen durch:

$$\cos a = +\frac{1}{\varrho}\sqrt{\varrho^2 - a^2\sin^2\vartheta}.$$

Führt man schliesslich a als Integrationsvariable ein:

$$dr = -a\sin\vartheta\cdot\frac{da}{\sin^2 a},$$

so hat man:

$$h = a\sin\vartheta\int_{a_0}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(a)}{\sin^2 a}\cdot da, \tag{3}$$

wo $\varrho = \dfrac{a\sin\vartheta}{\sin a}$ und a_0 gegeben ist durch $\sin a_0 = \dfrac{a\sin\vartheta}{P}$ und zwar als spitzer Winkel anzunehmen ist. Man kann übrigens, wenn man will, (3) auch in 2 Formeln zerspalten:

$$\left.\begin{aligned} h &= a\sin\vartheta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{\varphi(a)\,da}{\sin^2 a} + a\sin\vartheta\int_{a_0}^{\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(a)\,da}{\sin^2 a} \ldots \vartheta < 90^0 \\ h &= a\sin\vartheta\int_{a_0}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(a)\,da}{\sin^2 a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vartheta > 90^0 \end{aligned}\right\} \quad (3^a)$$

Aus (2) ersieht man sofort, dass der Verlauf der Helligkeit des Zodiacallichtes von $\vartheta = 90^0$ bis 180^0, also bis zur

Stelle des Gegenscheines, wesentlich von der Function $\frac{f(a)}{\cos a}$ abhängt, also vom elementaren Beleuchtungsgesetz. Für jedes ϱ nimmt hier nämlich a fortwährend ab mit zunehmendem ϑ. Wenn demnach $\frac{f(a)}{\cos a}$ mit zunehmendem a fortwährend wächst, so wird die Helligkeit des Zodiacallichtes immer abnehmen, wenn man von der Elongation 90° bis zur Elongation 180° fortschreitet. Thatsächlich zeigen manche Beleuchtungsgesetze diese Eigenschaft. So ist für das Lambert'sche und das Euler'sche Gesetz die genannte Function, abgesehen von constanten Factoren:

$$\operatorname{tg} a + \pi - a, \quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a}{\cos a}.$$

Wenn man also eine dieser Formeln zur Anwendung bringt, könnte der Gegenschein nicht ohne Weiteres erklärt werden. Aber durchaus nicht alle Beleuchtungsgesetze zeigen diese Eigenschaft. So ergiebt das Absorptionsgesetz $\frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}$ eine Function $\frac{f(a)}{\cos a}$, welche von $a = 0$ bis $a = 20°$ (ihr Logarithmus etwa um -0.007) abnimmt und man wird daraus schliessen, dass bei Zugrundelegung dieses Beleuchtungsgesetzes die Helligkeit des Zodiacallichtes bei $\vartheta = 180°$ etwas grösser sein muss, als in einer etwas kleineren Elongation. Diese Lichtzunahme ist an sich allerdings sehr gering. Es ist aber bekannt, dass die Helligkeit sehr rauher Körper in der Nähe der Opposition viel stärker zunimmt, als alle die gewöhnlich benutzten Beleuchtungsformeln ergeben. So ist diese Thatsache bei der photometrischen Beobachtung der kleinen Planeten besonders deutlich hervorgetreten, worauf u. A. auch Herr Searle sehr nachdrücklich hingewiesen hat. Man wird deshalb wohl behaupten dürfen, dass hier, zunächst wenigstens, ernstliche Schwierigkeiten für die obige Theorie des Zodiacallichtes nicht vorliegen. Zum mindesten müsste doch erst das Zeugnis von

photometrischen Beobachtungen in der Nähe des Gegenscheines abgewartet werden.

Was den Verlauf der Helligkeit für Elongationen $< 90^\circ$ betrifft, so wird hier die Beschaffenheit der Function Φ von grösstem Einflusse sein. Während für den Theil des Zodiacallichts zwischen 90° und 180° Elongation nur die Lichtreflexion an Theilchen zwischen $\varrho = a$ bis $\varrho = P$ in Frage kommt, treten für kleinere Elongationen immer neue Theilchen, die näher an der Sonne stehen, mit ins Spiel und daraus folgt eben, dass man h als Function von ϑ durch passende Wahl von Φ innerhalb eines weiteren Spielraumes wird darstellen können. Eine Einschränkung erleidet die Darstellung eines beliebigen Verlaufes von $h(\vartheta)$ schon dadurch, dass die Function Φ ihrer Bedeutung gemäss nur positive Werthe für alle ϱ haben darf. Bei der gegenwärtigen Unkenntnis des thatsächlichen Verlaufes von h kann zunächst nicht auf diesen Punkt eingegangen werden. Vorerst dürfte aber die Behauptung grundlos sein, die hier vertretene Ansicht über das Wesen des Zodiacallichtes könne nicht mit den beobachteten Thatsachen in Einklang gebracht werden.

Mit Sicherheit dürfte anzunehmen sein, dass die Helligkeit des Zodiacallichtes von kleinen Elongationen bis zu solchen von etwa 90° fortwährend abnimmt und dies kann durch passende Wahl von Φ erreicht werden. Durch Differentiation von (3) nach ϑ ergiebt sich nämlich leicht:

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta} = -a \sin\vartheta \left[\Phi(a)\frac{f(\pi-\vartheta)}{\sin^2\vartheta} + \frac{a}{P}\Phi(P)\frac{f(\alpha_0)}{\sin^2\alpha_0}\frac{\cos\vartheta}{\cos\alpha_0}\right]$$

$$+ a\cos\vartheta \int\limits_{\alpha_0}^{\pi-\vartheta} \frac{f(\alpha)}{\sin^2\alpha}\frac{d}{d\varrho}(\varrho\,\Phi)\cdot d\alpha.$$

Wenn demnach Φ stärker wie $\frac{1}{\varrho}$ mit wachsendem ϱ abnimmt, wird zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90^\circ$ sicher $\frac{dh}{d\vartheta}$ negativ sein, welches elementare Beleuchtungsgesetz auch zu Grunde

gelegt werden mag und man kann durch passende Wahl von $\Phi(\varrho)$ die Abnahme von h beliebig gross machen. Ganz in der Nähe von $\vartheta = 90^0$ wird übrigens unter allen Umständen $\frac{dh}{d\vartheta}$ negativ sein, da hier $\cos\vartheta$ sehr klein ist.

Bei einer Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung wird man also so zu verfahren haben. Man wird einen Ausdruck für $\Phi(\varrho)$ interpolatorisch anzusetzen haben, der soviele Parameter enthält, dass man durch deren Bestimmung einen genügenden Anschluss an die Beobachtungen zu erzielen hoffen darf. Dabei ist zu beachten, dass die Beschaffenheit der Function $\Phi(\varrho)$ zwischen $\varrho = 0$ bis $\varrho = a$ ganz gleichgültig für die Darstellung der Helligkeit des Zodiacallichtes bei Elongationen $> 90^0$ ist. Es soll hier, wie schon erwähnt, auf diese Angelegenheit nicht näher eingegangen werden, da so gut wie gar nichts sicheres über den quantitativen Verlauf der Helligkeit des Zodiacallichtes bekannt ist. Einige Schwierigkeit wird indessen immer die Wahl des elementaren Beleuchtungsgesetzes verursachen.

Tabelle: $\Psi_\nu(a)$ (Seite 274).

$a \mid \nu_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0^0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	[illegible]
5	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	[illegible]
10	0^{0}	0^{0}	0^{0}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	[illegible]
15	1^{1}	1^{1}	2^{2}	2^{1}	3^{2}	3^{2}	4^{3}	4^{3}	4^{3}	[illegible]
20	2^{1}	4^{3}	5^{3}	7^{5}	8^{5}	9^{6}	11^{7}	12^{8}	13^{9}	[illegible]
25	4^{2}	9^{5}	12^{7}	16^{9}	19^{11}	22^{13}	24^{13}	27^{15}	29^{16}	[illegible]
30	9^{5}	17^{8}	25^{13}	31^{15}	37^{18}	43^{21}	47^{23}	51^{24}	55^{26}	[illegible]
35	17^{8}	31^{14}	44^{19}	55^{24}	66^{29}	74^{31}	82^{35}	88^{37}	94^{39}	[illegible]
40	27^{10}	52^{21}	73^{27}	91^{36}	106^{40}	119^{45}	131^{49}	140^{52}	147^{53}	[illegible]
45	43^{16}	81^{29}	112^{39}	139^{48}	161^{55}	180^{61}	195^{64}	207^{67}	217^{70}	[illegible]
50	65^{22}	119^{38}	165^{53}	202^{63}	233^{72}	258^{78}	277^{82}	292^{85}	302^{85}	[illegible]
55	93^{28}	169^{50}	232^{67}	282^{80}	322^{89}	353^{95}	376^{99}	393^{101}	404^{102}	[illegible]
60	129^{36}	233^{64}	316^{84}	381^{99}	431^{109}	468^{115}	494^{118}	512^{119}	522^{118}	[illegible]
65	174^{45}	311^{78}	417^{101}	498^{117}	559^{128}	601^{133}	629^{135}	646^{134}	653^{131}	[illegible]
70	228^{54}	404^{93}	537^{120}	635^{137}	705^{146}	752^{151}	780^{151}	794^{148}	796^{143}	[illegible]
75	293^{65}	514^{110}	676^{139}	792^{157}	870^{165}	919^{167}	945^{165}	953^{159}	947^{151}	[illegible]
80	369^{76}	640^{126}	834^{158}	966^{174}	1052^{182}	1100^{181}	1121^{176}	1120^{167}	1103^{156}	[illegible]
85	457^{88}	784^{144}	1010^{176}	1158^{192}	1248^{196}	1292^{192}	1304^{183}	1291^{171}	1260^{157}	[illegible]
90	557^{100}	945^{161}	1203^{193}	1365^{207}	1455^{207}	1492^{200}	1491^{187}	1462^{171}	1414^{154}	[illegible]
95	670^{113}	1121^{176}	1412^{209}	1584^{219}	1670^{215}	1695^{203}	1676^{185}	1629^{167}	1562^{148}	[illegible]
100	795^{125}	1314^{193}	1633^{221}	1811^{227}	1889^{219}	1897^{202}	1857^{181}	1788^{159}	1700^{138}	[illegible]
105	932^{137}	1519^{205}	1865^{232}	2043^{232}	2106^{217}	2092^{195}	2029^{172}	1935^{147}	1824^{124}	[illegible]
110	1081^{149}	1736^{217}	2102^{237}	2274^{231}	2317^{211}	2278^{186}	2187^{158}	2067^{132}	1932^{108}	[illegible]
115	1239^{158}	1961^{225}	2342^{240}	2500^{226}	2517^{200}	2448^{170}	2327^{140}	2181^{114}	2023^{91}	[illegible]
120	1407^{168}	2191^{230}	2577^{235}	2716^{216}	2701^{184}	2599^{151}	2448^{121}	2275^{94}	2096^{73}	[illegible]
125	1583^{176}	2421^{230}	2805^{228}	2915^{199}	2865^{164}	2728^{129}	2547^{99}	2350^{75}	2151^{56}	[illegible]
130	1763^{180}	2647^{226}	3017^{212}	3092^{177}	3004^{139}	2833^{105}	2623^{76}	2405^{55}	2190^{39}	[illegible]
135	1945^{182}	2863^{216}	3209^{192}	3244^{152}	3117^{113}	2913^{80}	2679^{56}	2442^{37}	2215^{25}	2004
140	2126^{181}	3064^{201}	3375^{166}	3367^{123}	3201^{84}	2969^{56}	2715^{36}	2466^{24}	2229^{14}	2013
145	2302^{176}	3242^{178}	3510^{135}	3458^{91}	3260^{59}	3005^{36}	2736^{21}	2478^{12}	2237^{8}	2017
150	2466^{164}	3391^{149}	3612^{102}	3520^{62}	3295^{35}	3024^{19}	2747^{11}	2483^{5}	2240^{3}	2019
155	2613^{147}	3506^{115}	3680^{68}	3556^{36}	3312^{17}	3032^{8}	2751^{4}	2485^{2}	2240^{0}	2019
160	2736^{123}	3583^{77}	3717^{37}	3571^{15}	3319^{7}	3035^{3}	2752^{1}	2485^{0}	2240^{0}	2019
165	2826^{90}	3624^{41}	3731^{14}	3576^{5}	3320^{1}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019
170	2876^{50}	3637^{13}	3733^{2}	3576^{0}	3320^{0}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019
175	2890^{14}	3638^{1}	3733^{0}	3576^{0}	3320^{0}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019
180	2890^{0}	3638^{0}	3733^{0}	3576^{0}	3320^{0}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019

Der Druck des Lichts auf kleine Kugeln und die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife.

Von **Karl Schwarzschild.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

Die eigentümlichen Formen der Cometenschweife lassen sich erklären durch Annahme einer abstossenden Kraft, die von der Sonne auf die äusserst fein verteilte Schweifmaterie ausgeübt wird. Während früher diese Kraft nur ganz vage als elektrischen Ursprungs bezeichnet wurde, hat vor kurzem Herr Sv. Arrhenius[1]) darauf hingewiesen, dass solche abstossende Wirkungen dem Druck entspringen können, welchen nach der Maxwell'schen Theorie die Sonnenstrahlung auf jeden absorbierenden oder reflektierenden Körper ausübt. Ueber die Existenz des Maxwell'schen Drucks der Lichtstrahlen kann kein Zweifel sein, obwohl er experimentell mit hinreichender quantitativer Sicherheit noch nicht nachgewiesen wurde. Er muss bestehen, wofern die Grundauffassung Maxwell's richtig ist, dass in den Lichtschwingungen eben elektrische Kräfte oscillieren, Kräfte, welche die geladenen Jonenpaare der ponderabeln Massen angreifen. Zudem haben sich die Folgerungen, welche sich aus den Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie in Verbindung mit dem Maxwell'schen Druck ergaben, an der Erfahrung glänzend bestätigt. Es liegt daher in dem Druck der Lichtstrahlen eine causa realis, eine bei der Bildung der Cometenschweife, wie auch bei anderen Himmels-

[1]) Physikalische Zeitschrift. II. Jahrgang. Heft 6—7.

erscheinungen, zweifellos in irgend einem geringeren oder stärkeren Grade mitwirkende Ursache vor. Die Frage ist nur, ob dieser Druck quantitativ hinreichende Beträge erlangen kann, und das ist ein Punkt, in dem die Darlegungen von Arrhenius nicht ganz befriedigend sind.

Fällt eine ebene Welle normal auf eine vollkommen schwarze Platte, so erleidet letztere einen Druck, der nach Maxwell gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie E des Wellenzuges ist. Auf eine vollkommen schwarze Kugel vom Radius a, welche das Licht über eine Fläche von der Grösse πa^2 hin abfängt, wird daher ein Druck $\pi a^2 E$ wirken. Die auf dieselbe Kugel wirkende Schwerkraft hat den Betrag $\frac{4\pi}{3} g \cdot s \cdot a^3$, wo g die Schwerebeschleunigung, s das spezifische Gewicht des Kugelmateriales ist. Je kleiner der Kugelradius a, um so stärker wird daher der Druck im Verhältnis zur Schwerkraft. Unter Annahme der Solarkonstante 2.5 und des spezifischen Gewichtes s gleich 0.8 (Kohlenwasserstoff der Cometen) findet man mit Herrn Arrhenius, dass bei einem Kugeldurchmesser von 1.9 μ der Druck gleich der Schwerkraft wird. Sinkt der Kugeldurchmesser bis auf 0.1 μ herab, so übertrifft die abstossende Kraft der Sonnenstrahlung die Schwerkraft um das 18.5fache, und erreicht damit den Höchstbetrag, welcher zur Erklärung der gestrecktesten Cometenschweife erforderlich ist.[1])

In dieser Berechnung des Drucks liegt nun eine Ungenauigkeit. Der Druckwert $\pi a^2 E$ gilt nur, solange die Kugel das auffallende Licht gänzlich abfängt und in dem Raume hinter ihr völliger Schatten ist, solange man also die Beugungserscheinungen vernachlässigt. Das ist bei grossen Kugeln gestattet. Bei Kugeln aber, deren Durchmesser von der Grössenordnung der Wellenlängen des Lichts ist, — und gerade solche kommen nach den eben angeführten Zahlen für die Erklärung der Cometenschweife in Betracht — können

[1]) Vgl. Bredichin, Annales de l'Observatoire de Moscou. 1886.

durch die Beugung des Lichts die Verhältnisse sehr wesentlich geändert werden. Um ganz kleine Kugeln, deren Radius auch gegen die Wellenlänge sehr klein ist, schlägt die Lichtwoge herum, ohne in ihrem Verlaufe merklich gestört zu werden, und man kann sich hier durch einfache Ueberlegungen analog denen, auf welche Lord Rayleigh[1]) seine Theorie der blauen Farbe des Himmels gründet, überzeugen, dass mit fortdauernder Verringerung des Kugelradius der Druck des Lichts sogar wieder mehr und mehr unter die Schwerkraft herabsinken muss. Das Verhältnis des Lichtdrucks zur Schwerkraft wächst also nicht immerfort mit Verkleinerung des Kugelradius, sondern erreicht ein gewisses Maximum für Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge. Es ist erst noch zu untersuchen, ob das maximale mögliche Verhältnis von Lichtdruck zu Schwerkraft wirklich den Wert 18.5 erreicht, den man, wie erwähnt, zur Erklärung der gestrecktesten Cometenschweife braucht.

Ohne auf die schwer diskutabeln Fragen einzugehen, inwieweit eine Anschauung, welche die Cometenschweife aus lauter getrennten Tröpfchen im leeren Raum bestehen lässt, sich unseren sonstigen Kenntnissen von den Cometen anschliesst, will ich hier versuchen, nur über diesen einen quantitativen Punkt zu entscheiden. Irgendwo in der Welt muss es ja vorkommen, dass ein kleines Teilchen im leeren Raum dem Druck des Lichts ausgesetzt ist, und daher ist dem Resultate der Rechnung in jedem Falle die physikalische Anwendbarkeit gewiss, auch wenn sich aus andern Gründen etwa die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife nicht halten lassen sollte.

Bekanntlich ist der Begriff des vollkommen schwarzen Körpers mathematisch nicht exakt zu fassen und es erscheint auch physikalisch höchst zweifelhaft, ob ein Partikelchen irgend eines gewöhnlichen schwarzen Körpers von 0.1 μ bis 1 μ Durchmesser noch im geringsten Eigenschaften aufweist, nach denen man es als „schwarz“ bezeichnen könnte. Zur exakteren Be-

---

[1]) Philosoph. Magazine. 1871.

rechnung der Grösse des Lichtdrucks habe ich daher die kleine Kugel, die wir in den Strahlenzug eingeschaltet denken, nicht als vollkommen schwarz, sondern als vollkommen reflektierend vorausgesetzt. Es ist anzunehmen, dass für vollkommen reflektierendes Material der Lichtdruck besonders gross wird und man daher auf Grund dieser Annahme eben das Gewünschte, nämlich eine obere Grenze für den Lichtdruck, erhält.

Abgesehen von der Beziehung zur Theorie der Cometenschweife darf das Folgende vielleicht auch ein gewisses selbstständiges Interesse für sich in Anspruch nehmen. Bevor der Druck des Lichts auf eine Kugel berechnet werden konnte, musste eine exakte Theorie der Reflexion und Beugung des Lichts durch die Kugel gegeben werden. Es ist das ein Problem, dem schon Clebsch in Bd. 61 des Crelle'schen Journals eine umfangreiche Abhandlung gewidmet hat.[1]) Indessen hat Clebsch Grenzbedingungen benutzt, die wir heute nicht mehr als gültig anerkennen. Er nimmt an, dass im Aether neben den transversalen Wellen auch longitudinale auftreten können, verlangt, dass an der Oberfläche der vollkommen spiegelnden Kugel alle drei Componenten der elastischen Verschiebung verschwinden, und wird dann notgedrungen zu der Folgerung geführt, dass aus einfallenden Transversalwellen durch Reflexion an der Kugel Longitudinalwellen entstehen. Clebsch hat ausserdem in die Behandlung dieses speziellen Problems die Ableitung zahlreicher allgemeiner Sätze aus der Theorie der Kugel- und Cylinderfunktionen eingeschachtelt, die damals wohl noch weniger in den festen Wissensbestand übergegangen waren, und das belastet seine Darstellung, so wertvoll jene Ableitungen an und für sich sind. Daher wäre eine Neubehandlung des Problems schon von formalem Gesichtspunkt aus wünschenswert gewesen, wenn sie nicht durch die erwähnte Aenderung der Grenzbedingungen notwendig geworden wäre.

[1]) Hierauf bin ich erst nach Ausführung dieser Arbeit durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. A. Sommerfeld aufmerksam gemacht worden.

§ 1. Mathematische Formulierung des Beugungsproblems.

Das zunächst zu behandelnde Beugungsproblem ist dieses. Eine Kugel vom Radius a habe ihren Mittelpunkt im Nullpunkt des Coordinatensystems. Eine ebene Welle falle in der Richtung der x-Axe von ihrer positiven Seite her ein. Wir wollen zunächst annehmen, dass dieselbe linear polarisiert sei und zwar so, dass die elektrische Kraft in der x, y Ebene schwinge. Für die Componenten X, Y, Z, L, M, N der elektrischen und magnetischen Kraft gelten überall ausserhalb der Kugel die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \quad \frac{1}{V}\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \quad (V = \text{Licht-geschwindigkeit})$$

nebst den entsprechenden durch cyklische Vertauschung der Coordinaten entstehenden. Die Kugel selbst soll vollkommen reflektierend oder mit anderen Worten ein vollkommener Leiter sein. Dann ist ihre Oberfläche unter allen Umständen eine Niveaufläche der elektrischen Kraft, die in die Oberfläche fallenden Kraftcomponenten müssen verschwinden, es müssen die Beziehungen gelten:

Auf der Kugeloberfläche:

$$Xy - Yx = Xz - Zx = Yz - Zy = 0.$$

Im Unendlichen muss die Componente Y der elektrischen Kraft ein Glied der Form $\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right)$ enthalten, welches die ebene polarisierte einfallende Welle darstellt. Deren Wellenlänge ist zugleich durch diesen Ansatz zu λ, ihre Periode zu τ und ihre Amplitude und Intensität zu 1 festgelegt. Sonst dürfen in X, Y, Z im Unendlichen keine Glieder vorkommen, welche die physikalische Bedeutung einfallender Wellenzüge haben.

Wir setzen nun:

$$
\begin{aligned}
X &= \text{pars real } (\xi\, e^{iqt}) & L &= \text{pars real } (\lambda\, e^{iqt}) \\
Y &= \text{pars real } (\eta\, e^{iqt}) & M &= \text{pars real } (\mu\, e^{iqt}) \\
Z &= \text{pars real } (\zeta\, e^{iqt}) & N &= \text{pars real } (\nu\, e^{iqt})
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$q = \frac{2\pi}{\tau},$$

wobei $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ von der Zeit unabhängige komplexe Grössen sein sollen, und erhalten an Stelle der Maxwell'schen Gleichungen die folgenden:

$$i k \lambda = \frac{\delta \zeta}{\delta y} - \frac{\delta \eta}{\delta z} \quad i k \mu = \frac{\delta \xi}{\delta z} - \frac{\delta \zeta}{\delta x} \quad i k \nu = \frac{\delta \eta}{\delta x} - \frac{\delta \xi}{\delta y} \tag{2}$$

$$i k \xi = \frac{\delta \mu}{\delta z} - \frac{\delta \nu}{\delta y} \quad i k \eta = \frac{\delta \nu}{\delta x} - \frac{\delta \lambda}{\delta z} \quad i k \zeta = \frac{\delta \lambda}{\delta y} - \frac{\delta \mu}{\delta x} \tag{3}$$

$$k = \frac{2\pi}{\tau V} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{4}$$

Durch Elimination der magnetischen Componenten λ, μ, ν ergiebt sich daraus:

$$k^2 \xi + \Delta^2 \xi = 0 \qquad k^2 \eta + \Delta^2 \eta = 0 \qquad k^2 \zeta + \Delta^2 \zeta = 0. \tag{5}$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta \eta}{\delta y} + \frac{\delta \zeta}{\delta z} = 0. \tag{6}$$

Die Randbedingungen auf der Kugeloberfläche gehen durch Einführung von ξ, η, ζ über in:

$$\xi y - \eta x = \xi z - \zeta x = \eta z - \zeta y = 0. \tag{7}$$

Für das Unendliche folgt, dass η ein Glied:

$$\bar{\eta} = e^{ikx} \tag{8}$$

entsprechend der ebenen einfallenden Welle enthalten muss und dass sonst in ξ, η, ζ keine Teile vorkommen dürfen, welche physikalisch die Bedeutung aus dem Unendlichen einfallender Wellen besitzen. Unsere Aufgabe ist jetzt, drei „Wellenpotentiale" (Lösungen der Differentialgleichung $k^2 u + \Delta^2 u = 0$) ξ, η, ζ zu finden, welche durch die Bedingung (6) verknüpft

sind, auf der Oberfläche der Kugel den Bedingungen (7) und im Unendlichen der Bedingung (8) genügen.

§ 2. Ansatz der Lösung in Form von Reihenentwicklungen nach Kugel- und Bessel'schen Functionen.

Man führe Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein durch die Beziehungen:

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad z = r\sin\vartheta\sin\varphi. \qquad 9)$$

Es ist bekannt,[1]) dass die Differentialgleichung $k^2 u + \Delta^2 u = 0$ sog. „Zerfällung" nach den drei Coordinaten r, ϑ, φ gestattet, d. h., dass ein partikuläres Integral gegeben wird durch den Ansatz:

$$u = R \cdot \Theta \cdot \Phi. \qquad 10)$$

Hierbei bedeutet Φ eine Funktion von φ allein und zwar in unserem Falle $\cos n\varphi$ oder $\sin n\varphi$ (n ganzzahlig), Θ ist eine Funktion von ϑ allein und zwar die n. Zugeordnete der Kugelfunktion irgend einer Ordnung m, für die wir $P_{m,n}(\cos\vartheta)$ schreiben werden. Schliesslich bedeutet R eine Funktion von r allein und zwar eine Lösung R_m der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 R_m}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R_m}{d r} + R_m\left(k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2}\right) = 0. \qquad 11)$$

Nutzt man die Willkürlichkeit der beiden ganzen Zahlen m und n aus und superponiert alle aus verschiedener Wahl derselben hervorgehenden partikulären Integrale der Form (9), so erhält man das allgemeinere Integral:

$$\begin{aligned} u = & \sum_m \sum_n G_{m,n} R_m(r) P_{m,n}(\cos\vartheta)\cos n\varphi \\ & + \sum_m \sum_n H_{m,n} R_m(r) P_{m,n}(\cos\vartheta)\sin n\varphi \end{aligned} \qquad 12)$$

worin die G und H willkürliche Constanten sind, und es lässt sich zeigen, dass in Rücksicht auf die weitere Willkürlich-

[1]) Vgl. Pockels, Ueber die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Teubner 1891, pag. 109–111.

keit der Integrationskonstanten in den Lösungen R_m der Differentialgleichung (11) dieser neue Ansatz sogar die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung $k^2 u + \Delta^2 u = 0$ giebt, welche nebst ihren ersten Derivierten ausserhalb einer Kugel um den Nullpunkt eindeutig und stetig ist.[1]) Es folgt demnach, dass jedes der drei Wellenpotentiale ξ, η, ζ, die wir zu bestimmen haben, sich durch eine Doppelsumme der Form (12) darstellen lassen muss, und es erübrigt nur, die darin auftretenden willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dass den Bedingungen (6) (7) (8) genügt wird.

Diese Aufgabe vereinfacht sich von vornherein beträchtlich durch folgende Bemerkung: Der einzige Umstand, welcher bewirkt, dass die Lichtbewegung in unserem Problem nicht völlig symmetrisch um die x-Axe herum, unabhängig von φ, wird, ist der, dass die Polarisationsebene der einfallenden Lichtwelle in gewisser Weise vor andern durch die x-Axe gehenden Ebenen ausgezeichnet ist. Es ist danach zu vermuten, dass die Abhängigkeit der Lösung von φ immerhin keine komplizierte sein wird, dass also Glieder mit Sinus oder Cosinus höherer Vielfacher von φ nicht vorkommen werden. In der That, versucht man zunächst für ξ, η, ζ Ausdrücke der Form (12) anzusetzen, so bemerkt man alsbald, dass die grosse Mehrzahl der Constanten G und H verschwinden müssen, und wird zu dem folgenden vereinfachten Ansatz geführt:

$$\xi = \alpha \cos \varphi \qquad \eta = e^{ikx} + \beta + \gamma \cos 2\varphi \qquad \zeta = \gamma \sin 2\varphi \qquad 13)$$

wobei α, β und γ drei von φ unabhängige, also nur r und ϑ enthaltende Grössen sind, die in Form folgender Summen dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_m (2m+1) A_m R_m(r) P_{m,1}(\cos\vartheta) \\ \beta &= \sum_m (2m+1) B_m R_m(r) P_{m,0}(\cos\vartheta) \qquad 14) \\ \gamma &= \sum_m (2m+1) C_m R_m(r) P_{m,2}(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. Pockels (l. c.), pag. 63 und 111.

Die Grössen A_m, B_m, C_m bedeuten hier noch zu bestimmende Constante, denen aus Bequemlichkeitsrücksichten der Faktor $(2m+1)$ beigefügt wurde.

Der Ansatz (13), (14) liefert für ξ, η, ζ an und für sich Wellenpotentiale. Es erübrigt also, die drei Bedingungen (6) (7) (8) zu erfüllen. Die Einführung der Ausdrücke (13) in die Randbedingungen (7) giebt in Rücksicht darauf, dass eine der Bedingungen (7) eine Folge der beiden anderen ist und weggelassen werden kann:

Für $r = a$:

$$e^{ikx} + \beta - \gamma = 0 \qquad \alpha \sin\vartheta - 2\gamma\cos\vartheta = 0. \qquad 15)$$

Die Bedingungen im Unendlichen verlangen — da das Glied (8) im Ausdruck (13) für η schon abgesondert ist — einfach, dass α, β und γ im Unendlichen keine einfallenden Wellen entsprechenden Teile enthalten. Was die Bedingung (6) angeht, welche für den ganzen Raum gilt, so wollen wir zunächst nur fordern, dass sie für Punkte auf der Oberfläche der Kugel a befriedigt werde. Wir werden später zeigen, dass sie dann auch für den ganzen Raum erfüllt ist. Um noch die Grössen α, β, γ und Polarkoordinaten in die auf die Oberfläche der Kugel beschränkte Bedingung (6) einzuführen, stelle man sich ξ, η, ζ für einen Augenblick bildlich als Geschwindigkeitskomponenten einer Flüssigkeit dar. Die Gleichung (6) bedeutet dann bekanntlich, dass in jedes Volumenelement ebensoviel Flüssigkeit ein- als ausströmt. Man betrachte ein Volumenelement von der Form eines Kegelstumpfs, dessen Basis ein kleines Stück dw der Oberfläche der Kugel a, dessen Decke ein Stück dw' der Oberfläche der Kugel $a + da$ sei und dessen Mantel durch lauter Abschnitte von Kugelradien gebildet werde. Da die Bedingungen (7) im Bilde besagen, dass längs der Oberfläche der Kugel a keine tangentiale Strömung stattfindet, so kann durch die Mantelfläche keine Flüssigkeitsmasse aus- oder einströmen (oder strenger: diese Flüssigkeitsmasse wird von höherer Ordnung klein). Es müssen

sich also nach (6) die Strömungen durch Basis und Decke ausgleichen. Die radiale Strömungskomponente ist nun:

$$\begin{aligned} R &= \xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta \cos\varphi + \zeta \sin\vartheta \sin\varphi \\ &= \cos\varphi \{a \cos\vartheta + [e^{ikx} + \beta + \gamma] \sin\vartheta\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Durch die Basis strömt daher die Masse $dw \cdot R$ ein. Durch die Decke $dw' = dw \left(\frac{a + da}{a}\right)^2$ strömt die Masse $dw' \cdot \left(R + da \cdot \frac{\delta R}{\delta r}\right)$ aus. Demnach verlangt (6), dass:

$$R\,dw = \left(R + da \cdot \frac{\delta R}{\delta r}\right) dw'$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$0 = \frac{2}{a} \cdot R + \frac{\delta R}{\delta r}$$

ist. Führt man hierin (16) ein, so erhält man als neue Oberflächenbedingung, welche als Ersatz der Bedingung (6) eintritt:

Für $r = a$:

$$0 = \cos\vartheta\left(r\frac{\delta a}{\delta r} + 2a\right) + \sin\vartheta\left[r\frac{\delta}{\delta r}(\beta + \gamma + e^{ikx}) + 2(\beta + \gamma + e^{ikx})\right]. \tag{17}$$

Nunmehr ist unsere Aufgabe darauf reduziert, die Grössen A_m, B_m, C_m und die noch unbestimmten Integrationskonstanten der Lösungen R_m der Differentialgleichungen (11) so zu bestimmen, dass die Summen (14) den drei Randbedingungen (15) und (17) genügen und im Unendlichen keine Teile enthalten, welche einfallenden Wellen entsprechen.

Zur Vorbereitung der Lösung stelle ich einige Sätze aus der Theorie der Kugel- und Cylinderfunktionen zusammen, welche zum Teil bekannt sind, zum Teil ohne grosse Mühe aus bekannten Sätzen folgen.

§ 3. Aus der Theorie der Kugelfunctionen.

Die gewöhnliche Kugelfunction m. Ordnung wurde durch P_m oder $P_{m,0}$ bezeichnet. Die n. Zugeordnete der Kugelfunction m. Ordnung lässt sich dann definieren durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned} P_{m,n}(\cos\vartheta) = P_{m,n}(x) &= (1-x^2)^{n/2}\frac{d^n P_m}{d x^n} \\ &= \frac{1}{2^m \cdot m!}(1-x^2)^{n/2}\frac{d^{n+m}}{d x^{n+m}}(x^2-1)^m. \end{aligned} \qquad 18)$$

Zwischen den verschiedenen Zugeordneten verschiedener Ordnung bestehen die folgenden drei Rekurrenzen (vgl. F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, Leipzig 1878, pag. 74):

$$(2m+1)\cos\vartheta\, P_{m,n} = (m+1-n)P_{m+1,n} + (m+n)P_{m-1,n} \qquad 19)$$

$$(2m+1)\sin\vartheta\, P_{m,n-1} = P_{m+1,n} - P_{m-1,n} \qquad 20)$$

$$(2m+1)\sin\vartheta\, P_{m,n+1} = (m+1-n)(n-m)P_{m+1,n} + (m+1+n)(n+m)P_{m-1,n}. \qquad 21)$$

Man findet mit Hülfe der eben angegebenen Beziehungen leicht die nachstehende später zu verwendende Relation:

$$(2m+1)\sin\vartheta\frac{d P_{m,1}}{d\vartheta} = m^2 P_{m+1,1} - (m+1)^2 P_{m-1,1}. \qquad 22)$$

Ferner lassen sich die folgenden Sätze mit Hülfe von (18)—(22) aus den bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen ableiten:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta\, P_{m,1} P_{m',1} = 0 \\ &\qquad \text{ausser wenn } m' = m+1 \text{ oder } m' = m-1. \\ &\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta\, P_{m,1} P_{m+1,1} = 2\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)} \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta\, P_{m,0} P_{m',0} = 0 \\ &\qquad \text{ausser wenn } m' = m+1 \text{ oder } m-1. \\ &\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta\, P_{m,0} P_{m+1,0} = 2\cdot\frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

§ 4. Aus der Theorie der Cylinderfunctionen.

Führt man in der Differentialgleichung (11) für r die Variable $\varrho = r k$ ein, so schreibt sie sich:

$$\frac{d^2 R_m}{d \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d R_m}{d \varrho} + R_m \left[1 - \frac{m(m+1)}{\varrho^2}\right] = 0. \qquad 25)$$

Versucht man diese Differentialgleichung durch einen Ausdruck der Form $e^{-i\varrho} \cdot S$ zu befriedigen, wobei S eine nach negativen Potenzen von ϱ fortschreitende Reihe sein soll, so gelingt dies durch die folgende mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechende Reihe:

$$K_m = \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho}\Bigg[1 + \frac{m(m+1)}{2}\frac{1}{i\varrho} + \frac{m(m+1)}{2}\frac{[m(m+1)-1\cdot 2]}{4}\frac{1}{(i\varrho)^2}$$
$$+ \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{[m(m+1)-1\cdot 2]}{4} \cdot \frac{[m(m+1)-2\cdot 3]}{6} \cdot \frac{1}{(i\varrho)^3} + \dots\Bigg] \qquad 26)$$

Eine zweite Lösung der Differentialgleichung, die wir K'_m nennen wollen, erhält man natürlich, indem man in diesem Ausdruck $+i$ mit $-i$ vertauscht. Die allgemeine Lösung würde sich dann linear aus K_m und K'_m zusammensetzen.

Andrerseits kann man Lösungen von (25) in Form aufsteigender Potenzreihen darzustellen suchen und findet dadurch die folgenden beiden Funktionen:

$$\chi_m(\varrho) = \frac{(i\varrho)^m}{1\cdot 3 \dots (2m+1)}\left\{1 + \frac{(i\varrho)^2}{2(2m+3)} + \frac{(i\varrho)^4}{2\cdot 4(2m+3)(2m+5)} + \dots\right\}$$
$$\varphi_m(\varrho) = \frac{1\cdot 3 \dots (2m-1)}{(i\varrho)^{m+1}}\left\{1 - \frac{(i\varrho)^2}{2(2m-1)} + \frac{(i\varrho)^4}{2\cdot 4(2m-1)(2m-3)} - \dots\right\} \qquad 27)$$

wobei die Coeffizienten des ersten Gliedes in Rücksicht auf die spätere Anwendung gewählt sind.

Auch durch χ_m und φ_m muss sich jede andere Lösung von (25) linear darstellen lassen. Führt man dies speziell für K_m aus, so erhält man:

$$i^{2m+1} K_m(\varrho) = \chi_m(\varrho) + (-1)^{m+1} \varphi_m(\varrho)$$

oder:

$$i^{m+1}K_m(\varrho)=\frac{\varrho^m}{1\cdot3\ldots2m+1}\left\{1-\frac{\varrho^2}{2(2m+3)}+\frac{\varrho^4}{2\cdot4(2m+3)(2m+5)}-..\right\}$$

$$+i\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{\varrho^{m+1}}\left\{1+\frac{\varrho^2}{2(2m-1)}+\frac{\varrho^4}{2\cdot4(2m-1)(2m-3)}-..\right\} \quad 28)$$

ein Ausdruck, der sich auch durch direkte Entwicklung von K_m nach Potenzen von ϱ gewinnen liesse. Umgekehrt kann man aber auch z. B. χ_m linear durch K_m und K'_m ausdrücken und zwar findet man:

$$2\,i\,\chi_m(\varrho)=K'_m(\varrho)-(-1)^m K_m(\varrho). \quad 29)$$

Ferner besteht zwischen irgend zwei Lösungen R_m und R'_m von (25) die Beziehung:

$$R_m\frac{d\,R'_m}{d\,\varrho}-R'_m\frac{d\,R_m}{d\,\varrho}=\frac{C}{\varrho^2},$$

wobei C eine Constante ist. Speziell für K_m und χ_m nimmt die Constante den Wert 1 an, sodass also gilt:

$$K_m\frac{d\,\chi_m}{d\,\varrho}-\chi_m\frac{d\,K_m}{d\,\varrho}=\frac{1}{\varrho^2}. \quad 30)$$

Die verschiedenen K_m stehen durch folgende Rekurrenzen mit einander in Verbindung:

$$(2\,m+1)\,K_m=i\,\varrho\,(K_{m+1}-K_{m-1}) \quad 31)$$

$$\varrho\frac{d\,K_m}{d\,\varrho}=m\,K_m-i\,\varrho\,K_{m+1}=-(m+1)\,K_m-i\,\varrho\,K_{m-1}$$
$$=-i\,\varrho\left[\frac{(m+1)\,K_{m+1}+m\,K_{m-1}}{2\,m+1}\right]. \quad 32)$$

Schliesslich gilt nach Heine, Hdb. d. Kugelfunctionen, 2. Aufl., I, pag. 82 die Entwicklung:

$$e^{i\varrho\cos\vartheta}=\sum_{m=0}^{\infty}(2\,m+1)\,\chi_m(\varrho)\,P_{m,0}(\cos\vartheta). \quad 33)$$

§ 5. Explicite Darstellung der Componenten der electrischen Kraft.

Wir beginnen damit, die Entwicklungen (14) für α, β, γ zuvörderst so zu spezialisieren, dass dieselben im Unendlichen keine Teile enthalten, welche einfallenden Wellenzügen entsprechen. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass R_m sich linear aus K_m und K'_m zusammensetzt, sodass man etwa schreiben kann:

$$R_m = c_1 K_m + c_2 K'_m = c_1 e^{-i\varrho} S + c_2 e^{+i\varrho} S'. \quad (c_1, c_2 \text{ Konstante.})$$

S und S' sind beide nach absteigenden Potenzen von ϱ fortschreitende Reihenentwicklungen, welche sich in sehr grosser Entfernung vom Nullpunkt, für grosses ϱ auf ihr erstes Glied $\frac{1}{\varrho}$ reduzieren. Demnach wird z. B. ein Glied der Entwicklung (14) von α in grosser Entfernung vom Nullpunkt lauten:

$$(2m+1) A_m \left(c_1 \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} + c_2 \frac{e^{+i\varrho}}{\varrho}\right) P_{m,1}(\cos\vartheta).$$

Um den daraus entspringenden Beitrag zur x-Componente der elektrischen Kraft zu finden, hat man nach (1) mit e^{iqt} zu multiplizieren und vom Resultat den reellen Teil zu nehmen. Setzt man:

$$(2m+1) A_m c_1 = d_1 e^{i\delta_1}, \quad (2m+1) A_m c_2 = d_2 e^{i\delta_2}, \quad d_1, d_2, \delta_1, \delta_2 \text{ reell,}$$

so wird dieser reelle Teil gleich:

$$\left[\frac{d_1}{\varrho}\cos(\delta_1 + qt - \varrho) + \frac{d_2}{\varrho}\cos(\delta_2 + qt + \varrho)\right] P_{m,1}(\cos\vartheta)$$

oder:

$$\left[\frac{d_1}{kr}\cos\left(\delta_1 + \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) + \frac{d_2}{kr}\cos\left(\delta_2 + \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{2\pi r}{\lambda}\right)\right] P_{m,1}(\cos\vartheta).$$

Man sieht sofort, dass das erste Glied eine zu grösserem r fortschreitende, das zweite hingegen eine aus dem Unendlichen einlaufende Welle darstellt. Laut der Bedingung für das Un-

endliche muss also das zweite Glied verschwinden, es muss d_2 und c_2 gleich null sein und R_m sich auf die einfache Form: $R_m = c_1 K_m$ reduzieren. Die Constante c_1 wollen wir noch so bestimmen, dass R_m auf der Kugeloberfläche $r = a$ gleich 1 wird. Ist zur Abkürzung:

$$k r = \varrho \qquad k a = \varrho_0 \tag{34}$$

so soll also sein:

$$R_m(r) = \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)}. \tag{35}$$

Hiermit ist jede Willkürlichkeit in den R_m beseitigt und die Bedingungen im Unendlichen sind erfüllt.

Nachträgliche Bemerkung zu § 2. Der Ausdruck

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta \eta}{\delta y} + \frac{\delta \zeta}{\delta z} = \sigma$$

ist ein Wellenpotential, welches im Unendlichen keine einfallenden Wellenzüge enthält — sobald ξ, η, ζ Wellenpotentiale sind und unseren Bedingungen für das Unendliche genügen. In Rücksicht auf die eben durchgeführte Betrachtung der Funktionen R_m wird also σ nach (12) und (35) in folgender Weise entwickelbar sein:

$$\sigma = \sum_m \sum_n \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)} P_{m,n}(\cos \vartheta) \left[G_{m,n} \cos n\varphi + H_{m,n} \sin n\varphi\right].$$

Für $x = a$ geht diese Entwicklung über in:

$$\sigma = \sum_m \sum_n P_{m,n}(\cos \vartheta) \left[G_{m,n} \cos n\varphi + H_{m,n} \sin n\varphi\right].$$

Fordert man jetzt, dass σ für $r = a$ verschwinde, so folgt, dass alle Coeffizienten G und H null sein müssen, und damit, dass σ überall identisch verschwindet. Hiermit ist der oben benutzte Satz erwiesen, dass es genügt, die Bedingung $\sigma = 0$ auf der Oberfläche der Kugel zu erfüllen, um das Verschwinden von σ im ganzen Raum herbeizuführen.

Wir suchen weiter durch geeignete Wahl der Constanten A_m, B_m, C_m in (14) die Randbedingungen (15) und (17) zu

erfüllen. Setzt man die Entwicklungen (14) in diese Randbedingungen ein, berücksichtigt (35) und ersetzt $e^{ikx} = e^{i\varrho\cos\vartheta}$ durch die Reihe (33), so erhält man die drei Gleichungen:

$$\sum_m (2m+1)\left[P_{m,0}(B_m + \chi_m(\varrho_0)) - P_{m,2}\, C_m\right] = 0 \qquad 36)$$

$$\sum_m (2m+1)\left[A_m P_{m,1} \sin\vartheta - 2\, C_m P_{m,2} \cos\vartheta\right] = 0 \qquad 37)$$

$$\sum_m (2m+1)\left[A_m S_m P_{m,1} \cos\vartheta + \sin\vartheta \left\{B_m S_m P_{m,0} + C_m S_m P_{m,2} + T_m P_{m,0}\right\}\right] = 0. \qquad 38)$$

In der letzten dieser Gleichungen habe ich noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$S_m = \left[r \frac{d R_m}{d r} + 2 R_m\right]_{r=a} = 2 + \left[\frac{\varrho \frac{d K_m}{d\varrho}}{K_m}\right]_{\varrho=\varrho_0} \qquad 39)$$

$$T_m = \left[\varrho \frac{d\chi_m}{d\varrho} + 2\chi_m(\varrho)\right]_{\varrho=\varrho_0}. \qquad 40)$$

Man multipliziere (36) mit $\sin\vartheta$. Dann kann man nach (20) und (21) sowohl $\sin\vartheta\, P_{m,0}$, als $\sin\vartheta\, P_{m,2}$ mit Hülfe der ersten Zugeordneten $P_{m,1}$ ausdrücken, sodass die ganze Summe dann nur noch erste Zugeordnete enthält, und zwar findet man:

$$\sum_m (B_m + \chi_m(\varrho_0))(P_{m+1,1} - P_{m-1,1}) - C_m\left[-(m-1)\, m\, P_{m+1,1} + (m+1)(m+2)\, P_{m-1,1}\right] = 0.$$

Ordnet man hier in der Weise, dass man Glieder, welche Grössen $P_{m,1}$ mit gleichem Index m enthalten, zusammenfasst, so folgt:

$$\sum_m P_{m,1}\left[(m+2)(m+3)\, C_{m+1} + B_{m+1} + \chi_{m+1} - (m-1)(m-2)\, C_{m-1} - B_{m-1} - \chi_{m-1}\right] = 0. \qquad 36')$$

Aehnlich kann man in der Summe (37) mit Hülfe der Rekurrenzen (19) und (20) sowohl $\sin\vartheta\, P_{m,1}$ als $\cos\vartheta\, P_{m,2}$ allein durch zweite Zugeordnete $P_{m,2}$ ausdrücken und nach diesen ordnen. Man erhält dann:

$$\sum_m P_{m,2}[A_{m-1}-2(m-2)C_{m-1}-A_{m+1}-2(m+3)C_{m+1}]=0. \quad 37')$$

Schliesslich lassen sich in (38) die drei Produkte $\cos\vartheta\, P_{m,1}$, $\sin\vartheta\, P_{m,0}$ und $\sin\vartheta\, P_{m,2}$ alle nach (19)—(21) durch erste Zugeordnete $P_{m,1}$ ausdrücken. Wiederum nach letzteren ordnend erhält man:

$$\sum_m P_{m,1}\left[\begin{array}{l} S_{m-1}\{(m-1)A_{m-1}+B_{m-1}-(m-1)(m-2)C_{m-1}\}+T_{m-1} \\ +S_{m+1}\{(m+2)A_{m+1}-B_{m+1}+(m+2)(m+3)C_{m+1}\}-T_{m+1}\end{array}\right]=0. \quad 38')$$

Es ist zu beachten, dass, wie aus (18) sofort ersichtlich, die drei Grössen $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ und $P_{1,2}$ gleich null sind. Daher beginnen die Summen (36′) und (38′) mit $m=1$, die Summe (37′) mit $m=2$.

Wir haben hier nun drei Entwicklungen nach zugeordneten Kugelfunktionen, die zur Summe die Null haben sollen. Dies ist aber nach einem bekannten Satze nicht anders möglich, als indem jeder einzelne Entwicklungkoeffizient verschwindet, und damit ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der A_m, B_m, C_m:

$$\begin{aligned}(m+2)(m+3)C_{m+1}+B_{m+1}+\chi_{m+1}\\ =(m-1)(m-2)C_{m-1}+B_{m-1}+\chi_{m-1} \quad m\geqq 1 \quad 41)\end{aligned}$$

$$A_{m+1}+2(m+3)C_{m+1}=A_{m-1}-2(m-2)C_{m-1} \quad m\geqq 2 \quad 42)$$

$$\begin{aligned}S_{m+1}[(m+2)A_{m+1}-B_{m+1}+(m+2)(m+3)C_{m+1}]-T_{m+1}\\ +S_{m-1}[(m-1)A_{m-1}+B_{m-1}-(m-1)(m-2)C_{m-1}]\\ +T_{m-1}=0 \quad m\geqq 1. \quad 43)\end{aligned}$$

Zur Auflösung dieses unendlichen Gleichungssystems erweist es sich als nützlich, die folgenden Grössen als Unbekannte einzuführen:

$$\begin{aligned}A_m+2(m+2)C_m&=p_m\\ B_m+(m+1)(m+2)C_m&=q_m \quad 44)\\ 2(2m+1)C_m&=r_m\end{aligned}$$

Es ist hier voraus zu bemerken, dass man, da $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ und $P_{1,2}$ verschwindet, in den Entwicklungen (14) von vorn-

herein auch A_0, C_0 und C_1 gleich null setzen darf, woraus dann folgt:

$$p_0 = r_0 = r_1 = 0 \qquad 45)$$

Durch Einführung dieser neuen Unbekannten verwandelt sich die Gleichungen (41) bis (43) in die nachstehenden:

$$q_{m+1} + \chi_{m+1} = q_{m-1} + \chi_{m-1} - r_{m-1} \quad m \geqq 1 \qquad 46)$$

$$p_{m+1} = p_{m-1} - r_{m-1} \quad m \geqq 2 \qquad 47)$$

$$S_{m+1}[(m+2)p_{m+1} - q_{m+1}] + S_{m-1}[(m-1)p_{m-1} + q_{m-1} - m r_{m-1}] + T_{m-1} - T_{m+1} = 0 \quad m \geqq 1. \qquad 48)$$

Subtrahiert man hier zunächst (47) von (46), so folgt:

$$q_{m+1} + \chi_{m+1} - p_{m+1} = q_{m-1} + \chi_{m-1} - p_{m-1} \quad m \geqq 2$$

und daraus ergiebt sich, dass für

$$\left.\begin{array}{lll} \text{gerades } m: & q_m + \chi_m = p_m + g_2 & m \geqq 2 \\ \text{ungerades } m: & q_m + \chi_m = p_m + g_1 & m \geqq 1 \end{array}\right\} \qquad 49)$$

sein muss, wobei g_1 und g_2 zwei vom Index m unabhängige Constante sind.

Schreiben wir (47) noch in der Form:

$$r_m = p_m - p_{m+2} \quad m \geqq 1, \qquad 50)$$

so sehen wir, dass die Bestimmung der q_m und r_m auf die der p_m zurückgeführt ist. Ersetzt man jetzt in dem Gleichungssystem (48) die q_m und r_m durch die Ausdrücke (49) und (50), so erhält man nicht etwa Rekurrenzen zwischen den p_m, vielmehr fällt merkwürdiger Weise aus jeder Gleichung p_{m-1} heraus und es ergiebt sich zur unmittelbaren Bestimmung von p_{m+1}:

$$p_{m+1}[(m+1)S_{m+1} + m S_{m-1}] + S_{m+1}(\chi_{m+1} - g) - S_{m-1}(\chi_{m-1} - g) + T_{m-1} - T_{m+1} = 0 \quad m \geqq 2, \qquad 51)$$

wobei g gleich g_1 oder gleich g_2 zu setzen ist, jenachdem m gerade oder ungerade ist.

Die erste für $m = 1$ entstehende Gleichung des Systems (48) konnte hier noch nicht ausgenutzt werden und man darf in dem vorstehenden Systeme erst mit $m = 2$ beginnen, weil q_0 nicht nach Art der Formel (49) auf p_0 zurückgeführt werden kann.

Ueberblickt man das bisher erlangte Resultat, so lassen sich nach (51) alle p von p_3 an berechnen. Nach (45) verschwindet p_0. Ferner folgt aus $r_1 = 0$ und der ersten (für $m = 1$ entstehenden) Gleichung des Systems (50):

$$p_1 = p_3. \tag{52}$$

Von allen Grössen p bleibt daher allein noch p_2 unbekannt. Sowie man auch p_2 hätte, erhielte man aus (45) und (50) alle r und aus (49) alle q — abgesehen von q_0. So bleiben einerseits im Grunde nur die beiden Unbekannten q_0 und p_2, andererseits enthält das System (46) bis (48) aber auch noch zwei unbenutzte Gleichungen. Bei der Subtraktion der Gleichungen (47) von (46) konnte die erste (für $m = 1$ entstehende) Gleichung (46) nicht mitbenutzt werden, weil die entsprechende Gleichung (47) fehlt, und ähnlich lag es mit der ersten Gleichung (48). Die beiden restierenden Gleichungen lauten daher:

Aus (46) für $m = 1$:

$$q_2 + \chi_2 = q_0 + \chi_0 - r_0.$$

Aus (48) für $m = 1$:

$$S_2 [3 p_2 - q_2] + S_0 q_0 + T_0 - T_2 = 0.$$

In Rücksicht auf (45) und (49) erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$q_0 + \chi_0 = p_2 + g_2 \tag{53}$$

$$p_2 [2 S_2 + S_0] + S_2 (\chi_2 - g_2) - S_0 (\chi_0 - g_2) + T_0 - T_2 = 0. \tag{54}$$

Damit sind denn alle Gleichungen befriedigt und alle Unbekannten gefunden — bis auf eine eigentümliche durchgehende Unbestimmtheit, die in der Willkürlichkeit der beiden Constanten g_1 und g_2 liegt. Es ist schwer zu ersehen, woher die Fixierung dieser beiden Constanten noch kommen soll, nachdem sich bei ganz beliebiger Wahl derselben alle Randbedingungen im Endlichen und Unendlichen haben erfüllen lassen, und doch ist physikalisch evident, dass unser Problem nur eine Lösung besitzen kann.

Der Schlüssel zur Ueberwindung der Schwierigkeit und zur Bestimmung von g_1 und g_2 liegt in Folgendem: Man nehme einmal an, dass keine einfallende Welle vorhanden sei. Dann verschwinden in unseren Gleichungen alle Grössen χ_m und T_m, welche aus der Entwicklung des die einfallende Welle darstellenden Ausdrucks e^{ikx} entsprangen. Es bleiben daher in den Gleichungen (51) die Glieder übrig:

$$p_{m+1}[(m+1)S_{m+1}+mS_{m-1}]-g(S_{m+1}-S_{m-1})=0. \qquad 55)$$

Es soll hieraus p_{m+1} berechnet werden für den Fall, dass der Kugelradius a gegen die Wellenlänge sehr klein ist. Für sehr kleines ϱ wird K_m nach (28) näherungsweise dargestellt durch:

$$i^m K_m(\varrho)=\frac{1\cdot 3\ldots\ldots(2m-1)}{\varrho^{m+1}} \qquad 56)$$

und daraus folgt nach (34), (35) und (39):

$$R_m(r)=\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{m+1}=\left(\frac{a}{r}\right)^{m+1} S_m=1-m. \qquad 57)$$

Dies giebt in (55) eingesetzt:

$$p_{m+1}=\frac{g}{m(2m-1)}. \qquad 58)$$

Nunmehr kann man nach (50) r_m, nach den Gleichungen:

$$q_m=p_m+g$$

die aus (49) durch Weglassung der χ-Glieder entstehen, die q_m und, nachdem p_m, q_m und r_m bekannt sind, aus (44) die A_m, B_m, C_m berechnen. Es genügt, das Resultat für B_m anzuführen:

$$B_m=g\left[1-\frac{3}{(2m-3)(2m+1)^2}\right].$$

Damit erhält man nach (14) folgende Entwicklung von β:

$$\beta=\sum_m g\left[2m+1-\frac{3}{(2m-3)(2m+1)}\right]R_m(r)\,P_{m,0}(\cos\vartheta).$$

Für $r = a$ und $\vartheta = 0$ wird $R_m = 1$ und $P_{m,0} = 1$ und damit wird β:

$$\beta = \sum_m g \left[2m + 1 - \frac{3}{(2m-3)(2m+1)}\right]$$

also unendlich. Mit anderen Worten: Aus den Grössen g entspringen Ausdrücke für die Componenten der elektrischen Kraft, welche mit Unstetigkeiten behaftet sind. Die Bedingung, welche zur Fixierung der Grössen g führt, ist daher die, dass die Componenten der elektrischen Kraft stetig bleiben sollen, und zwar verlangt sie, dass g_1 und g_2 null sind.

Lässt man jetzt alle Glieder g aus den Gleichungen (49) bis (54) weg, so kann man sie so zusammenfassen:

$$p_{m+1}\left[(m+1)S_{m+1} + m\,S_{m-1}\right]$$
$$+ (S_{m+1}\chi_{m+1} - T_{m+1}) - (S_{m-1}\chi_{m-1} - T_{m-1}) = 0 \quad m > 1 \qquad 59)$$

$$q_m = p_m - \chi_m \quad m \geq 1 \qquad r_m = p_m - p_{m+2} \quad m \geq 2 \qquad 60)$$

$$p_0 = 0 \quad p_1 = p_3 \quad q_0 = p_2 - \chi_0 \quad r_0 = r_1 = 0. \qquad 61)$$

Die Gleichungen (59) gestatten noch eine beträchtliche Vereinfachung.

Nach der Definition (39) war:

$$S_m = \left[2 + \frac{\varrho \dfrac{dK_m}{d\varrho}}{K_m}\right]_{\varrho=\varrho_0} \quad T_m = \left[2\chi_m(\varrho) + \varrho\frac{d\chi_m}{d\varrho}\right]_{\varrho=\varrho_0}.$$

Daher ist:

$$S_m\chi_m - T_m = \left[\frac{\varrho}{K_m}\left(\chi_m\frac{dK_m}{d\varrho} - K_m\frac{d\chi_m}{d\varrho}\right)\right]_{\varrho=\varrho_0}$$

oder nach (30):

$$S_m\chi_m - T_m = -\left[\frac{1}{\varrho K_m}\right]_{\varrho=\varrho_0}. \qquad 62)$$

Ferner wird:

$$(m+1)S_{m+1} + m\,S_{m-1} = 2(2m+1)$$
$$+ \left[(m+1)\frac{\varrho\dfrac{dK_{m+1}}{d\varrho}}{K_{m+1}} + m\,\varrho\frac{\dfrac{dK_{m-1}}{d\varrho}}{K_{m-1}}\right]_{\varrho=\varrho_0}.$$

Nach (31) und (32) bestehen die Rekurrenzen:

$$\varrho \frac{d K_{m+1}}{d \varrho} = -(m+2) K_{m+1} - i \varrho K_m$$

$$\varrho \frac{d K_{m-1}}{d \varrho} = (m-1) K_{m-1} - i \varrho K_m$$

$$(2m+1) \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} = -i \varrho [(m+1) K_{m+1} + m K_{m-1}]$$

$$(2m+1) \quad K_m = i \varrho [K_{m+1} - K_{m-1}]. \tag{63}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{m+1}{K_{m+1}}$, die zweite mit $\frac{m}{K_{m-1}}$, die dritte und vierte je mit $-\frac{K_m}{K_{m-1} K_{m+1}}$ und addiert, so erhält man:

$$\frac{(m+1)}{K_{m+1}} \varrho \frac{d K_{m+1}}{d \varrho} + \frac{m}{K_{m-1}} \varrho \frac{d K_{m-1}}{d \varrho}$$

$$-(2m+1) \frac{K_m}{K_{m-1} K_{m+1}} \left(K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} \right) = -2(2m+1)$$

und damit:

$$(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1} = (2m+1) \frac{K_m}{K_{m-1} K_{m+1}} \left(K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} \right). \tag{64}$$

Führt man jetzt (62) und (64) im Ausdruck von p_{m+1} ein, so folgt:

$$p_{m+1} = \frac{K_{m-1} K_{m+1}}{(2m+1) K_m} \frac{1}{K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho}} \left(\frac{1}{\varrho K_{m+1}} - \frac{1}{\varrho K_{m-1}} \right) \text{ für } \varrho = \varrho_0,$$

oder in Rücksicht auf (63):

$$p_{m+1} = -\left[\frac{i}{\varrho^2 \left(K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} \right)} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \tag{65}$$

Es bleibt nur noch übrig, mit Hülfe der p_m nach (60) und (61) die q_m und r_m und dann nach (44) die A_m, B_m, C_m abzuleiten, um nach einer leichten Zwischenrechnung die voll-

ständige Lösung des Beugungsproblems zu erhalten, welche, wenn man alles zusammenstellt, durch folgende Formeln gegeben wird:

Der Kugelradius sei a. Man setze:

$$\varrho = k r \quad \varrho_0 = k a \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Man berechne die endlichen Ausdrücke (26):

$$K_m = \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho}\left[1 + \frac{m(m+1)}{2}\frac{1}{i\varrho} + \frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)-1\cdot 2}{4}\frac{1}{(i\varrho)^2} + \ldots\right] \quad 66)$$

und

$$\chi_m = -\frac{K_m(-\varrho_0) + (-1)^m K_m(\varrho_0)}{2i} \quad 67)$$

und bilde damit:

$$p_{m+1} = -\left[\frac{i}{\varrho^2 \frac{d(\varrho K_m)}{d\varrho}}\right]_{\varrho=\varrho_0} \quad 68)$$

sowie:

$$R_m(r) = \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)}. \quad 69)$$

Dann gelten die Entwicklungen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) A_m R_m(r) P_{m,1}(\cos\vartheta) \\ \beta &= \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) B_m R_m(r) P_{m,0}(\cos\vartheta) \quad 70) \\ \gamma &= \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) C_m R_m(r) P_{m,2}(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

mit den folgenden Entwicklungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} (2m+1)A_m &= (m-1)p_m + (m+2)p_{m+2} \\ 2(2m+1)B_m &= (m+1)(m+2)p_{m+2} - m(m-1)p_m - 2(2m+1)\chi_m \quad 71) \\ 2(2m+1)C_m &= p_m - p_{m+2} \end{aligned}$$

und die Componenten der elektrischen Kraft für die durch die vollkommen reflektierte Kugel gestörte Lichtbewegung werden erhalten aus:

$$X = \text{pars real}\,(e^{iqt}\,a\cos\varphi)$$
$$Y = \text{pars real}\,(e^{iqt+ikx} + e^{iqt}\,[\beta + \gamma\cos 2\varphi]) \qquad 72)$$
$$Z = \text{pars real}\,(e^{iqt}\,\gamma\sin 2\varphi).$$

§ 6. Bemerkungen über die Verwendung dieser Darstellung.

Die Reihen, durch die wir hier die Verteilung der elektrischen Kraft und damit der Lichtintensität dargestellt haben, sind zwar unter allen Umständen konvergent, indessen wird, wie leicht zu sehen, die Convergenz um so langsamer, je grösser die Kugel ist, welche das Licht reflektiert. Dies Verhalten liegt insofern günstig, als man für grosse Kugeln die Lichtverteilung in rohen Zügen aus der geometrischen Optik, mit grösserer Schärfe aus der Kirchhoff'schen Beugungstheorie ableiten kann. In den Fällen, wo diese beiden Hülfsmittel versagen, nämlich für Kugeln, deren Durchmesser nicht über wenige Wellenlängen hinausgeht, wird aber gerade die numerische Rechnung nach obigen Formeln durchführbar und man könnte sich an ihrer Hand überzeugen, wie sich mit dem Kleinerwerden der Kugel z. B. der Schatten hinter ihr allmählich auflöst. Ich will mich hier begnügen nur die Grenzwerte anzuführen, in die ξ, η, ζ übergehen, wenn der Kugelradius äusserst klein auch gegen die Wellenlänge wird:

$$\xi = -k^3 a^3 \sin\vartheta\cos\varphi\left[\tfrac{1}{2}K_1(kr) + \cos\vartheta\,K_2(kr) - \frac{k^2a^2}{6}K_3(kr)(\cos^2\vartheta - \tfrac{1}{5})\right]$$

$$\eta = e^{ikx} + k^3a^3\left[\tfrac{2}{3}K_0(kr) + \tfrac{1}{2}K_1\cos\vartheta + K_2(\tfrac{1}{3} - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi) + K_3\frac{k^2a^2}{6}\cos\vartheta\,(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \tfrac{1}{5})\right] \qquad 73)$$

$$\zeta = -k^3a^3\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\left[K_2(kr) - \frac{k^2a^2}{6}K_3(kr)\cos\vartheta\right]$$

wobei:

$$K_0 = \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad K_1 = \frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 + \frac{1}{ikr}\right)$$

$$K_2 = \frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right) \tag{74}$$

$$K_3 = \frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 + \frac{6}{ikr} + \frac{15}{(ikr)^2} + \frac{15}{(ikr)^3}\right).$$

In grosser Distanz r von der Kugel gehen diese Formeln über in:

$$\xi = -\frac{k^2 a^3}{2} \sin\vartheta \cos\varphi \,(1 + 2\cos\vartheta)\, \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$\eta = e^{ikx} + k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r}\left[1 + \frac{\cos\vartheta}{2} - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi\right] \tag{75}$$

$$\zeta = -k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi.$$

Lord Rayleigh hat gefunden (l. c.), dass bei sehr kleinen Kugeln aus durchsichtigen Medien die Intensität des zerstreuten Lichts umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge wird und dass in Richtungen, die einen rechten Winkel mit der Richtung der einfallenden Welle machen, vollständige Polarisation des zerstreuten Lichts eintritt. Ersteres Verhalten gilt nach den Gleichungen (75) (da k umgekehrt proportional zur Wellenlänge ist) offenbar auch für das von einer kleinen vollkommen reflektierenden Kugel zerstreute Licht, hingegen erfolgt in keiner Richtung vollständige Polarisation. Man erhält für $\vartheta = 90^0$:

$$\xi = -\frac{k^2 a^3}{2} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos\varphi \quad \eta - e^{ikx} = k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin^2\varphi$$

$$\zeta = -k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\varphi \cos\varphi$$

und daraus für die Intensität der x-Componente:

$$\text{Mod}\, \xi^2 = \tfrac{1}{4} \frac{k^4 a^6}{r^2} \cos^2\varphi$$

und für die Intensität der senkrecht zur x-Axe stehenden Componente des zerstreuten Lichts:

$$\text{Mod}\,[(\eta - e^{ikx})^2 + \zeta^2] = \frac{k^4 a^6}{r^2} \sin^2 \varphi .$$

Ist das einfallende Licht nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, polarisiert, sondern natürliches Licht, so muss man in diesen Ausdrücken alle möglichen Werte von φ einsetzen und das Mittel nehmen und findet dann:

für die Schwingungskomponente parallel zur x-Axe: $\frac{1}{4}\frac{k^4 a^6}{r^2}$

" " " senkrecht " " $\frac{k^4 a^6}{r^2}$

d. h. „das von sehr kleinen vollkommen reflektierenden Kugeln in Richtungen senkrecht zur Normale der einfallenden Welle zerstreute Licht ist zu drei Vierteln polarisiert."

Schliesslich sei noch ein Umstand hervorgehoben. Da die Intensität des zerstreuten Lichts von der Wellenlänge abhängt, so wird, wenn das einfallende Licht weiss ist, das zerstreute eine andere Farbe zeigen. Nur bei sehr grossen Kugeln kommt die Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht in Betracht und das reflektierte Licht bleibt farblos. Bei sehr kleinen Kugeln entsteht, wie Lord Rayleigh gezeigt hat, das tiefe Blau des Himmels. Bei Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge bilden sich noch andere Farbennüancen aus, die sogar ein wenig von der Richtung des reflektierten Lichts abhängen und die sich alle aus den obigen Formeln ableiten liessen.

Nach diesen Andeutungen über die anderweitige Verwendbarkeit der Lösung des Beugungsproblems gehen wir an unsere eigentliche Aufgabe, die Berechnung des Maxwell'schen Drucks, welchen das Licht auf die Kugel ausübt. Hierzu ist zunächst erforderlich die

§ 7. Ableitung der magnetischen Kraftcomponenten aus den electrischen.

Man wähle irgend einen Punkt 0 der Kugeloberfläche zum Nullpunkt eines neuen rechtwinklichen Coordinatensystemes x_1, y_1, z_1, dessen x-Axe in den durch 0 gehenden Radiusvektor falle, dessen y-Axe den durch 0 gehenden Meridian $\varphi =$ const. und dessen z-Axe den durch 0 gehenden Parallelkreis $\vartheta =$ const. tangiere. Es werde y_1 zu wachsendem ϑ, z_1 zu wachsendem φ positiv gezählt. Die Kraftcomponenten (oder genauer die komplexen Grössen, aus denen sich nach (1) die Kraftcomponenten ableiten) in Richtung der neuen Axen mögen heissen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$. Für ξ_1, η_1, ζ_1 erhält man durch Coordinatendrehung die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \quad \xi \cos\vartheta_0 + \eta \sin\vartheta_0 \cos\varphi_0 + \zeta \sin\vartheta_0 \sin\varphi_0 \\ \eta_1 &= -\xi \sin\vartheta_0 + (\eta \cos\varphi_0 + \zeta \sin\varphi_0) \cos\vartheta_0 \\ \zeta_1 &= -\eta \sin\varphi_0 + \zeta \cos\varphi_0. \end{aligned} \qquad 76)$$

Die magnetischen Kraftcomponenten in Richtung der neuen Axen sind aus den Gleichungen, welche den (2) entsprechen, abzuleiten:

$$ik\lambda_1 = \frac{\delta \zeta_1}{\delta y_1} - \frac{\delta \eta_1}{\delta z_1} \quad ik\mu_1 = \frac{\delta \xi_1}{\delta z_1} - \frac{\delta \zeta_1}{\delta x_1} \quad ik\nu_1 = \frac{\delta \eta_1}{\delta x_1} - \frac{\delta \xi_1}{\delta y_1}. \qquad 77)$$

Wir wollen diese Gleichungen verwenden, um speziell die magnetische Kraft im Punkte 0 zu bestimmen. Im Punkte 0 sind η_1 und ζ_1 gleich null, weil auf der Oberfläche der Kugel keine tangentialen elektrischen Kräfte existieren, und es gilt, da die y_1- und z_1-Axe die Oberfläche tangieren, auch:

$$\frac{\delta \eta_1}{\delta y_1} = \frac{\delta \eta_1}{\delta z_1} = \frac{\delta \zeta_1}{\delta y_1} = \frac{\delta \zeta_1}{\delta z_1} = 0.$$

Ferner ist geometrisch evident, dass im Punkte 0:

$$\frac{\delta}{\delta x_1} = \frac{\delta}{\delta r} \quad \frac{\delta}{\delta y_1} = \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta \vartheta} \quad \frac{\delta}{\delta z_1} = \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\delta}{\delta \varphi}$$

ist. Damit geht (77) über in:

$$\lambda_1 = 0 \quad i\,k\,\mu_1 = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\delta\,\xi_1}{\delta\,\varphi} - \frac{\delta\,\zeta_1}{\delta\,r} \quad i\,k\,\nu_1 = \frac{\delta\,\eta_1}{\delta\,r} - \frac{1}{r}\frac{\delta\,\xi_1}{\delta\,\vartheta}.$$

Wir erfahren also zunächst, dass der magnetischen Kraft die radiale Componente fehlt, dass sie in der Kugeloberfläche liegt.

Drückt man nach (13) ξ, η, ζ durch α, β, γ aus, so folgt ferner:

$$\xi_1 = \cos\varphi\,\{\alpha\cos\vartheta + \sin\vartheta\,[e^{ikz} + \beta + \gamma]\}$$
$$\eta_1 = \cos\varphi\,\{-\alpha\sin\vartheta + \cos\vartheta\,[e^{ikz} + \beta + \gamma]\}$$
$$\zeta_1 = -\sin\varphi\,\{e^{ikz} + \beta - \gamma\}.$$

Auf der Kugeloberfläche wird in Folge der Relationen (15):

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0 \quad \xi_1 = \alpha\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta} = 2\,\gamma\,\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} \qquad 78)$$

und damit:

$$ik\mu_1 = +\sin\varphi\left[-\frac{\alpha}{r\sin\vartheta\cos\vartheta} + \frac{\delta}{\delta r}(e^{ikz} + \beta - \gamma)\right]$$

$$ik\nu_1 = \quad \cos\varphi\left[-\frac{\delta\alpha}{\delta r}\sin\vartheta + \cos\vartheta\frac{\delta}{\delta r}(e^{ikz} + \beta + \gamma) - \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta\vartheta}\left(\frac{\alpha}{\cos\vartheta}\right)\right]$$

Nun gilt weiter an der Oberfläche der Kugel die Gleichung (17):

$$0 = \cos\vartheta\left(r\frac{\delta\alpha}{\delta r} + 2\alpha\right) + \sin\vartheta\left[r\frac{\delta}{\delta r}(e^{ikz} + \beta + \gamma) + 2(e^{ikz} + \beta + \gamma)\right]$$

welche sich in Rücksicht auf (15) auch so schreiben lässt:

$$0 = r\,\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r}\cos\vartheta + \sin\vartheta\,r\,\frac{\delta}{\delta r}(e^{ikz} + \beta + \gamma) + \frac{2\,\alpha}{\cos\vartheta}$$

und damit lassen sich die Ausdrücke von μ_1 und ν_1 in die folgenden verwandeln:

$$i\,k\,\mu_1 = \sin\varphi\left[-\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r}\operatorname{cotg}\vartheta - \frac{3\,\alpha}{r\sin\vartheta\cos\vartheta} - 2\frac{\delta\,\gamma}{\delta\,r}\right]$$

$$i\,k\,\nu_1 = \cos\varphi\left[-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r} - \frac{2\,\alpha}{r\sin\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta\,\vartheta}\left(\frac{\alpha}{\cos\vartheta}\right)\right]$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} -i\,\varrho_0\,\mu_1\frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi} &= r\frac{\partial a}{\partial r}\cos\vartheta + \frac{3\,a}{\cos\vartheta} + 2\sin\vartheta\, r\frac{\partial\gamma}{\partial r} \\ &= \cos\vartheta\left(r\frac{\partial a}{\partial r}+2\,a\right) + 2\sin\vartheta\left(r\frac{\partial\gamma}{\partial r}+2\,\gamma\right) + \frac{a}{\cos\vartheta} \\ -i\,\varrho_0\,\nu_1\frac{\sin\vartheta}{\cos\varphi} &= r\frac{\partial a}{\partial r} + 2\,a + \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{a}{\cos\vartheta}\right), \end{aligned}\right\} \quad 79)$$

wobei die frühere Abkürzung $k\,a = \varrho_0$ benutzt ist. Da wir es übrigens fortan nur mit Punkten auf der Kugel selbst zu thun haben, werden wir nicht mehr eigens auf diesen Umstand hinweisen müssen und dürfen uns erlauben, den Index 0 wegzulassen, sowie beliebig r und a zu vertauschen.

Hier führen wir nun unsere Entwicklungen (70) für a, β, γ ein, die wir aber zunächst ein wenig umformen. Es ist auf der Kugeloberfläche:

$$a = \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)A_m P_{m,1}(\cos\vartheta), \quad \gamma = \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)C_m P_{m,2}(\cos\vartheta)$$

und nach der Bezeichnungsweise (39):

$$\left.\begin{aligned} 2\,a + r\frac{\partial a}{\partial r} &= \Sigma\ (2\,m+1)\,A_m\,S_m\,P_{m,1}\,(\cos\vartheta) \\ 2\,\gamma + r\frac{\partial\gamma}{\partial r} &= \sum_{m=1}^{\infty}(2\,m+1)\,C_m\,S_m\,P_{m,2}\,(\cos\vartheta) \end{aligned}\right. \quad 80)$$

Setzt man für A_m und C_m die Ausdrücke (71) durch die p_m ein, so wird:

$$a = \sum_{m=1}^{\infty}\left[(m-1)\,p_m + (m+2)\,p_{m+2}\right]P_{m,1}\,(\cos\vartheta)$$

oder durch eine leichte Umstellung der Summe:

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+1}\left[m\,P_{m+1,1}\,(\cos\vartheta) + (m+1)\,P_{m-1,1}\,(\cos\vartheta)\right].$$

Da aber nach (19):

$$(2\,m+1)\cos\vartheta\,P_{m,1} = m\,P_{m+1,1} + (m+1)\,P_{m-1,1}$$

ist, so erhält man das einfache Resultat:

$$\frac{a}{\cos\vartheta} = \sum_{m=1}^{\infty}(2\,m+1)\,p_{m+1}\,P_{m,1}\,(\cos\vartheta). \qquad 81)$$

Hieraus folgt noch mit Hülfe von (22):

$$\sin\vartheta\,\frac{\delta}{\delta\vartheta}\left(\frac{a}{\cos\vartheta}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}p_{m+1}\left[m^2 P_{m+1,1}-(m+1)^2 P_{m-1,1}\right]$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}P_{m,1}\left[(m-1)^2 p_m-(m+2)^2 p_{m+2}\right]. \tag{82}$$

Ferner notieren wir die nach (80) folgende Formel:

$$r\frac{\delta a}{\delta r}+2a=\sum P_{m,1}(\cos\vartheta)S_m\left[(m-1)p_m+(m+2)p_{m+2}\right]. \tag{83}$$

Wir bilden weiter die in dem Ausdruck (79) für μ_1 auftretende Grösse:

$$\cos\vartheta\left(r\frac{\delta a}{\delta r}+2a\right)+2\sin\vartheta\left(r\frac{\delta\gamma}{\delta r}+2\gamma\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)S_m\left[A_m\cos\vartheta\,P_{m,1}(\cos\vartheta)+2\,C_m\sin\vartheta\,P_{m,2}(\cos\vartheta)\right].$$

Drückt man sowohl $\cos\vartheta\,P_{m,1}$, als $\sin\vartheta\,P_{m,2}$ nach (19) und (21) durch $P_{m,1}$ aus, so geht diese Summe über in:

$$\sum_{m=1}^{\infty}S_m\left[A_m\left\{m\,P_{m+1,1}+(m+1)\,P_{m-1,1}\right\}\right.$$
$$\left.+2\,C_m\left\{(m+1)(m+2)\,P_{m-1,1}-m(m-1)\,P_{m+1,1}\right\}\right]$$

und wenn man A_m und C_m durch die p_m ausdrückt, in:

$$\sum_{m=1}^{\infty}S_m\left[m\,p_{m+2}\,P_{m+1,1}+(m+1)\,p_m\,P_{m-1,1}\right]$$

oder nach den $P_{m,1}$ geordnet:

$$\cos\vartheta\left(r\frac{\delta a}{\delta r}+2a\right)+2\sin\vartheta\left(r\frac{\delta\gamma}{\delta r}+2\gamma\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}P_{m,1}\,p_{m+1}\left[(m+2)\,S_{m+1}+(m-1)\,S_{m-1}\right]. \tag{84}$$

Die Einführung der Entwicklungen (81) bis (84) in (79) liefert jetzt:

$$-i\,\varrho\,\mu_1\sin\vartheta$$
$$=\sin\varphi\sum_{m=1}^{\infty}P_{m,1}p_{m+1}\left[2m+1+(m+2)S_{m+1}+(m-1)S_{m-1}\right]$$

$$-i\varrho\nu_1 \sin\vartheta = \cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1}\left[(m-1)^2 p_m - (m+2)^2 p_{m+2}\right.$$
$$\left. + S_m\{(m-1)p_m + (m+2)p_{m+2}\}\right].$$

Hiermit sind die Grössen $\mu_1 \sin\vartheta$ und $\nu_1 \sin\vartheta$ nach Kugelfunktionen entwickelt. Für das folgende werden wir aber nötig haben, μ_1 und ν_1 selbst in Form solcher Entwicklungen zu besitzen, und das wird erreicht durch folgenden Ansatz. Sei:

$$(C_{m+1}-C_{m-1}) = p_{m+1}[2m+1+(m+2)S_{m+1}+(m-1)S_{m-1}] \quad 85)$$

$$(D_{m+1}-D_{m-1}) = (m-1)p_m(m-1+S_m)+(m+2)p_{m+2}(S_m-m-2). \quad 86)$$

Dann wird:

$$i\varrho\mu_1 \sin\vartheta = \sin\varphi \sum P_{m,1}(C_{m-1} - C_{m+1})$$
$$= \sin\varphi \sum_{m=1}^{\infty} C_m(P_{m+1,1} - P_{m-1,1}).$$

Es gilt aber nach (20):

$$(2m+1)\sin\vartheta\, P_{m,0} = P_{m+1,1} - P_{m-1,1}$$

und damit:

$$i\varrho\mu_1 = \sin\varphi \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)C_m P_{m,0}. \quad 87)$$

Genau ebenso folgt:

$$i\varrho\nu_1 = \cos\varphi \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)D_m P_{m,0}. \quad 88)$$

Das sind die gewünschten Entwicklungen von μ_1 und ν_1 nach Kugelfunktionen.

Es erübrigt nur noch, die C_m und D_m aus den Rekurrenzen (85) und (86) zu bestimmen.

Zunächst lassen sich die rechten Seiten derselben vereinfachen. Die Gleichung (59) schreibt sich in Rücksicht auf (62):

$$p_{m+1}[(m+1)S_{m+1} + mS_{m-1}] - \frac{1}{\varrho K_{m+1}} + \frac{1}{\varrho K_{m-1}} = 0 \quad 89)$$

und damit folgt:

$$C_{m+1} - C_{m-1} = \frac{1}{\varrho K_{m+1}} - \frac{1}{\varrho K_{m-1}} + p_{m+1}[2m+1+S_{m+1}-S_{m-1}].$$

Ferner wird nach der Definition (39) von S_m:

$$2m + 1 + S_{m+1} - S_{m-1} = 2m + 1 + \frac{\varrho \frac{dK_{m+1}}{d\varrho}}{K_{m+1}} - \frac{\varrho \frac{dK_{m-1}}{d\varrho}}{K_{m-1}}$$

und dieser Ausdruck lässt sich mit Hülfe von (32) reduzieren auf:

$$(2m+1) \cdot \frac{K_m^2}{K_{m+1} \cdot K_{m-1}}.$$

Demnach:

$$C_{m-1} - C_{m+1} = \frac{1}{\varrho K_{m-1}} - \frac{1}{\varrho K_{m+1}} - (2m+1) p_{m+1} \frac{K_m^2}{K_{m+1} K_{m-1}}.$$

Bildet man diese Gleichung für $m+1$, $m+3$, $m+5$ u. s. w. und addiert alle entstehenden Relationen, so ergiebt sich zur Bestimmung von C_m:

$$C_m = \frac{1}{\varrho K_m} - \sum_{\nu=0}^{\infty} (2m + 4\nu + 3) \frac{K_{m+2\nu+1}^2}{K_{m+2\nu} \cdot K_{m+2\nu+2}} p_{m+2\nu+2}. \quad 90)$$

Die Convergenz der hier auftretenden Summe lässt sich ohne Schwierigkeit erweisen.

Um die Grössen D_m zu finden, ersetze man in (85) m durch $m+1$ und addiere die entstehende Relation zu (86). Es ergiebt sich:

$$(D_{m+1} + C_{m+2}) - (D_{m-1} + C_m) = (m-1) p_m (m - 1 + S_m)$$
$$+ p_{m+2} [2(m+1) S_m + (m+3) S_{m+2} - (m+1)^2].$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung (89), nachdem man in ihr m durch $m+1$ ersetzt und mit 2 multipliziert hat, so bleibt:

$$(D_{m+1} + C_{m+2}) - (D_{m-1} + C_m)$$
$$= (m-1) p_m (m - 1 + S_m) - (m+1) p_{m+2} (m + 1 + S_{m+2})$$
$$+ \frac{2}{\varrho K_{m+1}} - \frac{2}{\varrho K_{m-1}}$$

und man sieht, dass dieser Gleichung genügt wird, wenn für jeden Wert von m gilt:

$$D_{m-1} + C_m = \frac{2}{\varrho K_{m-1}} - (m-1) p_m (m - 1 + S_m).$$

Führt man wiederum für S_m seinen Wert (39) ein und drückt den Differentialquotienten von K_m nach (32) durch die K_m selbst aus, so erhält man leicht:

$$D_{m-1} + C_m = \frac{2}{\varrho K_{m-1}} + (m-1)\, i\, \varrho\, p_m \frac{K_{m-1}}{K_m}. \qquad 91)$$

Nachdem die C_m aus (90) gefunden sind, giebt diese Gleichung unmittelbar die D_m und damit kann man die Entwicklungen (87) und (88) für die Componenten der magnetischen Kraft wirklich bilden.

Es ist für die weitere Anwendung noch erforderlich, von den bisher verwandten komplexen Grössen zu den reellen Schwingungskomponenten überzugehen. Zu dem Zweck setze man:

$$\xi_1 = F e^{if} \cos\varphi \quad \mu_1 = G e^{ig} \sin\varphi \quad \nu_1 = H e^{ih} \cos\varphi$$

$$p_{m+1} = F_m e^{if_m} \quad C_m = i \varrho G_m e^{ig_m} \quad D_m = i \varrho H_m e^{ih_m},$$

wo sämtliche Buchstaben auf den rechten Seiten reelle Grössen sein sollen.

Dann erhält man einerseits:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \text{pars real}\,(F e^{if} e^{iqt} \cos\varphi) = F \cos(f+qt)\cos\varphi \\ \text{ebenso: } M_1 &= G\cos(g+qt)\sin\varphi,\ N_1 = H\cos(h+qt)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad 92)$$

und hierbei bedeutet X_1 die radiale Componente der elektrischen Kraft, M_1 und N_1 die tangentialen Componenten der magnetischen Kraft. Andrerseits folgt aus (78), (81), (87) und (88), indem man überall Reelles und Imaginäres trennt:

$$\left.\begin{aligned} F\cos f &= \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)P_{m,1}F_m\cos f_m,\ F\sin f = \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)P_{m,1}F_m\sin f_m \\ G\cos g &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,0}G_m\cos g_m,\ G\sin g = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,0}G_m\sin g_m \\ H\cos h &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,0}H_m\cos h_m,\ H\sin h = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,0}H_m\sin h_m \end{aligned}\right\}. \quad 93)$$

Damit ist der Uebergang zu reellen Schwingungskomponenten vollzogen und die Berechnung der an der Oberfläche der Kugel wirkenden elektrischen und magnetischen Kräfte ermöglicht.

§ 8. Der Maxwell'sche Druck.

Nach Maxwell herrscht im Aether ein Druck senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien und ein Zug in Richtung der elektrischen Kraft, beide numerisch gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen elektrischen Energie, also gleich

$$\sigma (X^2 + Y^2 + Z^2),$$

wo σ ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der Wahl der Einheit der elektrischen Kraft abhängt. Ein ebensolcher Druck und Zug herrscht senkrecht und parallel zur magnetischen Kraft und ist wiederum numerisch gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen magnetischen Energie $\sigma (L^2 + M^2 + N^2)$. Um die vollen Drucke im Aether zu erhalten, hat man das elektrische und das magnetische Drucksystem zu superponieren.

Nun steht die elektrische Kraft überall senkrecht auf unserer Kugel. Demnach wirkt auf jedes Oberflächenelement derselben zunächst ein senkrechter Zug, dessen Grösse gleich σX_1^2 ist, weil hier die elektrische Kraft nur aus ihrer Normalkomponente X_1 besteht. Die magnetische Kraft hingegen liegt in der Oberfläche unserer Kugel. Daher erfährt jedes Oberflächenelement derselben zweitens einen senkrechten Druck gleich $\sigma (M_1^2 + N_1^2)$. Der Gesamtdruck auf ein Oberflächenelement wird daher: $\sigma (M_1^2 + N_1^2 - X_1^2)$ oder nach (92) gleich:

$$\sigma \{ G^2 \cos^2 (g + q \cdot t) \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2 (h + qt) \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2 (f + qt) \cos^2 \varphi \}.$$

Der Druck ändert sich hiernach periodisch mit der halben Schwingungsperiode des Lichts. Der uns allein interessierende Durchschnittswert für Zeiten, welche viele Perioden umfassen, wird:

$$\frac{\sigma}{2} (G^2 \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2 \varphi).$$

Bildet man durch Multiplikation mit $\cos \vartheta$ die in die x-Richtung fallende Componente dieses Drucks und integriert über die ganze Kugelfläche, so erhält man für den in Richtung der einfallenden Welle auf die Kugel wirkenden Druck D:

$$D=\frac{\sigma}{2}\int a^2\,d\vartheta\,d\varphi \sin\vartheta\cos\vartheta\,(G^2\sin^2\varphi+H^2\cos^2\varphi-F^2\cos^2\varphi),$$

wobei, wie früher, a den Kugelradius bedeutet. Da F, G und H nicht von φ abhängen, lässt sich die Integration nach φ ausführen und das Integral auf folgende Form bringen:

$$D=\frac{\sigma\pi a^2}{2}\int_0^\pi d\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\,[(G\cos g)^2+(G\sin g)^2+(H\cos h)^2 \\ +(H\sin h)^2-(F\cos f)^2-(F\sin f)^2].$$

Hier sind nun die Summen (93) einzusetzen. Beginnen wir beispielsweise mit der Summe für $G\cos g$, so folgt:

$$\int_0^\pi d\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\,(G\cos g)^2$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\sum_{m'=0}^\infty(2m+1)(2m'+1)G_m G_{m'}\cos g_m\cos g_{m'}\int_0^\vartheta d\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta P_{m,0}P_{m',0}.$$

Die in der vorstehenden Formel rechts auftretenden Integrale sind null, ausser wenn $m'=m\pm 1$ ist. Daher reduziert sich die Doppelsumme auf die einfache:

$$2\sum_{m=0}^\infty(2m+1)(2m+3)G_m G_{m+1}\cos g_m\cos g_{m+1}\int_0^\vartheta d\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta P_{m,0}P_{m+1,0}$$

und wenn man hier für die Integrale nach (24) die Werte

$$\frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}$$

einsetzt, so wird:

$$\int_0^\pi d\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta(G\cos g)^2=4\sum_{m=0}^\infty(m+1)G_m G_{m+1}\cos g_m\cos g_{m+1}.$$

Ganz ähnlicher Umformungen sind die übrigen Glieder des Ausdrucks von D fähig (bei den Gliedern mit F hat man die Integralformel (23) zu benutzen) und man erhält schliesslich durch Addition der sechs entstehenden Summen die Schlussformel für den Druck des Lichts:

$$D = 2\sigma\pi a^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, G_m\, G_{m+1} \cos(g_m - g_{m+1}) \right.$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, H_m\, H_{m+1} \cos(h_m - h_{m+1}) \qquad 94)$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(m+2) F_m F_{m+1} \cos(f_m - f_{m+1}) \right\}.$$

Der Proportionalitätsfaktor σ lässt sich leicht aus der durchschnittlichen Energie pro Volumeneinheit E der einfallenden Welle berechnen. Die elektrische Schwingung der einfallenden Welle war $Y = \cos(kx + qt)$, dementsprechend ihre elektrische Energie gleich $\sigma Y^2 = \sigma \cos^2(kx + qt)$. Der Mittelwert dieses Ausdrucks für Vielfache der Schwingungsperiode ist $\frac{\sigma}{2}$. Es ist bekannt, dass in ebenen Wellen die Energie der magnetischen und die Energie der elektrischen Schwingung gleich sind. Daher habe ich noch einmal $\frac{\sigma}{2}$ hinzuzufügen, um die ganze Energie pro Volumeneinheit zu erhalten, und finde damit:

$$\sigma = E. \qquad 95)$$

§ 9. Formeln zur numerischen Rechnung.

Um eine etwaige Controlle der späteren numerischen Angaben zu erleichtern, will ich die Formeln angeben, die ich zur numerischen Berechnung des Drucks benutzt habe und die aus den oben abgeleiteten auf die einfachste Weise hervorgehen, indem man von vorneherein für Trennung des Reellen und Imaginären sorgt.

a Kugelradius. $\qquad \varrho = \frac{2\pi a}{\lambda}$.

Man bilde die endlichen Ausdrücke:

$$k_m \cos\chi_m = 1 - \frac{(m-1)\,m\,(m+1)(m+2)}{2\cdot 4}\frac{1}{\varrho^2} + \frac{(m-3)(m-2)\ldots(m+3)(m+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{1}{\varrho^4} - \ldots$$

$$k_m \sin\chi_m = \frac{1}{\varrho}\frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{\varrho^3}\frac{(m-2)(m-1)\ldots(m+2)(m+3)}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$$

sowie:

$$l_m \cos\psi_m = 1 - \frac{1}{\varrho^2}\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)+1\cdot 2}{4} + \frac{1}{\varrho^4}\frac{(m-2)(m-1)\ldots(m+2)(m+3)}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{m(m+1)+3\cdot 4}{8} - \ldots$$

$$l_m \sin\psi_m = \frac{1}{\varrho}\frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{\varrho^3}\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{2\cdot 4}\cdot\frac{m(m+1)+2\cdot 3}{6} + \ldots$$

und berechne hieraus k_m, l_m, χ_m, ψ_m für eine Reihe von Werten des Index m.

Wünscht man für den Druckwert etwa eine zweistellige Genauigkeit, so gehe man dabei bis zu einem Index $\bar{m}$, für welchen k_m und l_m grösser als 100 werden, und vernachlässige auch in den späteren Formeln alle Glieder, in welchen k_m oder l_m mit höherem Index als $\bar{m}$ vorkommen. Für $\varrho = \frac{1}{4}$, bei einem Kugeldurchmesser gleich etwa $^1/_{12}$ Wellenlänge, genügt es, $\bar{m} = 3$ zu nehmen, so dass die Berechnung des Drucks sehr leicht auszuführen ist; für $\varrho = 4$ hingegen, wenn also der Kugeldurchmesser die Wellenlänge schon um einiges übertrifft, muss man bereits bis zu $\bar{m} = 7$ oder 8 gehen und für Kugeln, deren Durchmesser mehrere Wellenlängen beträgt, wird die Rechnung praktisch undurchführbar, aber, wie sich unten zeigen wird, auch nicht mehr erforderlich.

Man berechne weiter die Hülfsgrössen:

$$\frac{1}{\varrho k m} = r_m \quad \frac{2m+1}{\varrho^2 l_m}\frac{k_m^2}{k_{m-1}k_{m+1}} = s_m \quad \frac{m}{\varrho^2 l_m}\frac{k_m}{k_{m+1}} = t_m \quad \frac{1}{\varrho^2 l_m} = F_m$$

und die Hülfswinkel:

$$\chi'_m = \chi_m + \varrho - \frac{\pi m}{2} \qquad \psi'_m = \frac{\pi}{2}(m+1) - \varrho - \psi_m$$

$$\tau_m = \psi'_m + \chi'_m - \chi'_{m+1} \qquad \sigma_m = \chi'_{m-1} - \chi'_m - \tau_m .$$

Dann gilt:

$$G_m \cos g'_m + G_{m+2} \cos g'_{m+2} = r_m \cos \chi'_m + r_{m+2} \cos \chi'_{m+2} + s_{m+1} \cos \sigma_{m+1}$$

$$G_m \sin g'_m + G_{m+2} \sin g'_{m+2} = r_m \sin \chi'_m + r_{m+2} \sin \chi'_{m+2} + s_{m+1} \sin \sigma_{m+1}.$$

Man kann aus diesen beiden Gleichungssystemen die G_m und g'_m durch Rekurrenz berechnen, indem man mit einem hinreichend hohen Wert des Index $m = \overline{m}$ beginnt und $G_{\overline{m}+1}$ sowie $G_{\overline{m}+2}$ gleich null setzt. Ist das ausgeführt, so findet man H_m und h'_m nach den Formeln:

$$H_m \cos h'_m = t_m \cos \tau_m - 2\, r_m \sin \chi'_m + G_{m+1} \cos g'_{m+1}$$

$$H_m \sin h'_m = t_m \sin \tau_m - 2\, r_m \cos \chi'_m - G_{m+1} \sin g'_{m+1}.$$

Die F_m, G_m und H_m stimmen überein mit den im vorigen § so bezeichneten Grössen.

Das Verhältnis des Drucks der Strahlung D zu der Strahlungsenergie in der Volumeneinheit wird dann erhalten aus der Summe:

$$\frac{D}{E} = 2\pi a^2 \Bigg[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, G_m\, G_{m+1} \sin(g'_m - g'_{m+1}) + (m+1)\, H_m\, H_{m+1} \sin(h'_{m+1} - h'_m) + m(m+1)(m+2)\, F_m\, F_{m+1} \sin(\psi'_m - \psi'_{m+1}) \Bigg].$$

§ 10. Grenzwerte des Drucks.

In den beiden Fällen, dass die Kugel entweder sehr klein oder sehr gross gegen die Wellenlänge ist, lassen sich einfache geschlossene Ausdrücke für den Druck angeben.

Wenn der Kugelradius und damit ϱ sehr klein ist, kann man sich in der Entwicklung (28) von K_m:

$$i^{m+1}K_m = i\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{\varrho^{m+1}}\left\{1+\frac{\varrho^2}{2(2m-1)}+\frac{\varrho^4}{2\cdot 4(2m-1)(2m-3)}\cdots\right\}$$
$$+\frac{\varrho^m}{1\cdot 3\ldots 2m+1}\left\{1-\frac{\varrho^2}{2(2m+3)}+\frac{\varrho^4}{2\cdot 4(2m+3)(2m+5)}\cdots\right\}$$

auf die paar ersten Glieder beschränken. Wo dann in den obigen Formeln ein Faktor oder Divisor K_m oder ein Differentialquotient dieser Grössen auftritt, kann man stets nach Potenzen von ϱ entwickeln und enthält schliesslich den Druck D selbst in Form einer Potenzreihe nach ϱ, deren erstes Glied den gesuchten Grenzwert darstellt. Die Rechnungen, die hierzu führen, sind ziemlich umständlich, aber ganz elementar; man muss sich nur hüten, zu früh höhere Glieder wegzulassen, da sich zum Schluss solche niederer Ordnung herausheben. Man erhält als Grenzwert des Drucks für sehr kleine Kugeln:

$$\frac{D}{E}=\frac{14}{3}\pi a^2\varrho^4=\frac{224}{3}\pi^5\frac{a^6}{\lambda^4}. \qquad 96)$$

Für sehr grosse Kugeln findet man den Druck folgendermassen. Fällt eine ebene Welle unter einem Winkel ψ auf eine vollkommen reflektierende ebene Platte auf, so erleidet letztere einen senkrechten Druck: $P = 2E\cos^2\psi$, wobei E wiederum die Energie pro Volumeneinheit der einfallenden Welle bedeutet. (Vgl. für die einfache Ableitung dieser Regel aus Maxwell's Druckannahmen Goldhammer, Annalen der Physik, Bd. 4, 1901, pag. 844 und Boltzmann, Wied. Annalen, 22). Betrachten wir die Oberflächenelemente unserer Kugel als eben, so folgt, dass überall auf dieselbe ein senkrechter Druck gleich $2E\cos^2\vartheta$ — in unserer Bezeichnung — wirkt. Die x-Componente dieses Drucks ist $2E\cos^3\vartheta$ und der Gesamtdruck auf die Kugel wird durch Integration über die Vorderfläche gewonnen, da die beschattete Hinterfläche natürlich keine Einwirkung erleidet. Es ergiebt sich daher:

$$D = a^2\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\vartheta\sin\vartheta\cdot 2E\cos^3\vartheta$$

oder:

$$\frac{D}{E}=\pi a^2. \qquad 97)$$

Es ist im ersten Augenblick auffällig, dass dieser für eine vollkommen reflektierende grosse Kugel geltende Wert genau übereinstimmt mit dem von Herrn Arrhenius benutzten für eine vollkommen schwarze Kugel gültigen. Doch lässt sich dieses Resultat leicht aufklären. An der Stelle, welche von der einfallenden Welle zuerst getroffen wird ($\vartheta = 0$), erleidet eine vollkommen reflektierende Kugel allerdings einen doppelt so starken Druck, als eine vollkommen schwarze. Indessen nimmt nach den Seiten hin bei der vollkommen reflektierenden Kugel der Druck viel rascher ab, weil bei flachen Incidenzen die Druckwirkung der reflektierten Welle die der einfallenden zum Teil wieder aufhebt.

§ 11. Ergebnis.

Nachdem der Druck für sehr grosse wie sehr kleine Kugeln aus den Formeln des vorigen Paragraphen bekannt war, erübrigte noch die Berechnung für Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge. Ich will zur Bequemlichkeit das Verhältnis von D zu $\pi a^2 E$ mit V bezeichnen. Die Berechnung von V habe ich nach den Formeln § 9 für einige Werte des Kugelradius **numerisch** ausgeführt mit folgendem Resultat:

$\frac{2\pi a}{\lambda} = \varrho$	$^1/_4$	$^1/_2$	$\sqrt{^1/_2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$2a$	$0.08\ \lambda$	$0.16\ \lambda$	$0.22\ \lambda$	$0.32\ \lambda$	$0.45\ \lambda$	$0.64\ \lambda$	$1.27\ \lambda$
$V = \frac{D}{\pi a^2 E}$	0.018	0.35	1.07	2.42	2.16	1.31	1.22
$\frac{14}{3}\varrho^4$	0.018	0.29	1.17	4.67			

Zur Vergleichung wurden die Werte von V, wie sie aus der Näherungsformel (96) folgen, mitangesetzt. Man sieht: „**Beschränkt man sich auf eine Genauigkeit von etwa** $20^0/_0$, **so genügt die Formel:** $D = \frac{14}{3}\pi a^2 \varrho^4 E$ **zur Berechnung des Drucks von unendlich kleinen Kugeln**

an bis herauf zu Kugeln von ein Viertel Wellenlänge Durchmesser.“ Andrerseits muss nach (97) für sehr grosse Kugeln das Verhältnis von D zu $\pi a^2 E$ gleich 1 werden. Man sieht aus der Tabelle: Bei derselben Genauigkeit gilt die Formel $D = \pi a^2 E$ bis herab zu Kugeln von etwa anderthalb Wellenlängen Durchmesser.

Das Verhalten des Drucks für dazwischen liegende Werte wird durch Curve Fig. 1 veranschaulicht. Um dieselbe etwas sicherer zeichnen zu können, habe ich einige Punkte zwischen den oben berechneten bestimmt, indem ich die einfach verlaufende Grösse $\log V - 4 \log \varrho$ als Funktion von $\log \varrho$ numerisch interpolierte. Das Verhalten des Drucks lässt sich hiernach etwa so beschreiben: „Das Verhältnis V des Drucks zur „auffallenden Energiemenge“ $\pi a^2 E$ steigt von dem für grosse Kugeln gültigen und auch von Herrn Arrhenius benutzten Werte 1 zunächst langsam an, wenn man den Kugelradius verkleinert. Ist der Kugeldurchmesser auf etwa $^2/_3$ Wellenlänge herabgesunken, so erfolgt ein merkwürdiges rapides Anwachsen von V, welches bei etwa $^1/_3$ Wellenlänge Durchmesser zu einem Maximum gleich 2.5 führt. Bei weiterer Verkleinerung des Kugeldurchmessers sinkt V noch plötzlicher ab, als es vorher angestiegen ist. Für $2a = {}^1/_5 \lambda$ ist es bereits wieder unter die Einheit zurückgegangen und nimmt alsbald verschwindend kleine Werte an.“

Vergleichen wir nun den Druck des Lichts mit der Schwerkraft. Ist G die auf die Masseneinheit, also z. B. das Gramm, wirkende Schwerkraft der Sonne, s das spezifische Gewicht des Kugelmateriales, so hat die auf die ganze Kugel wirkende Schwerkraft den Betrag:

$$S = \tfrac{4}{3} \pi a^3 s \cdot G,$$

wobei a in Centimetern zu messen ist.

Der Druck des Lichts hat den Wert $\pi a^2 E \cdot V$ und das Verhältnis beider wird:

$$\frac{D}{S} = W = \tfrac{3}{4} \frac{E}{G} \cdot \frac{V}{as}.$$

Nimmt man die Solarkonstante zu 2.5 (Grammkalorien pro Minute und Quadratcentimeter) an, so findet man mit Herrn Arrhenius (l. c. pag. 83) die Energiedichte der Sonnen-

Fig. 1.

Verhältnis des Drucks zur auffallenden Energie.

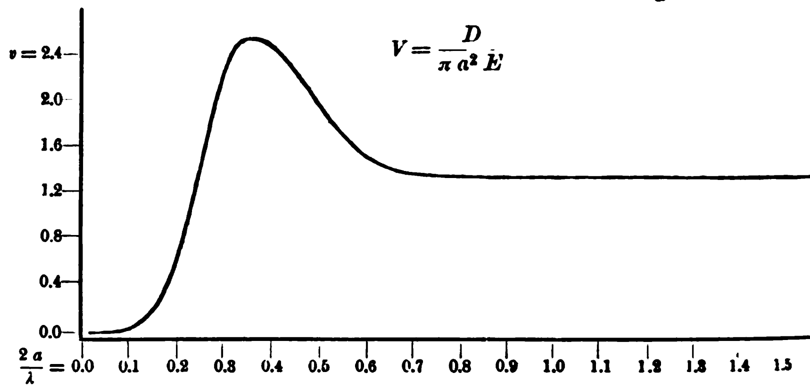
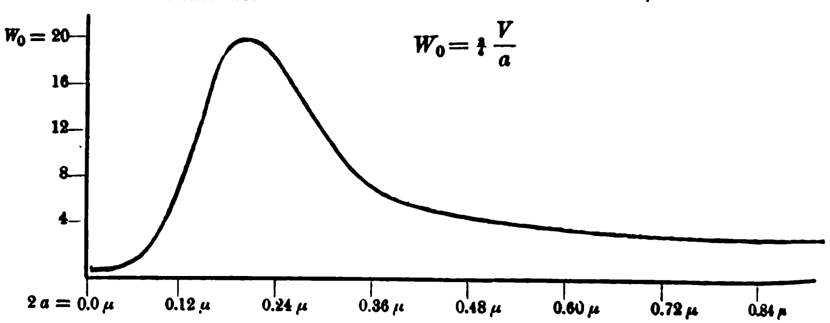


Fig. 2.

Verhältnis des Drucks zur Schwerkraft für $\lambda = 0.6\,\mu$ und $s = 1$.



strahlung an der Oberfläche der Sonne zu $27.5 \cdot 10^{-4}\, g\, \mathrm{cm}^{-2}$ (g bedeutet das Grammgewicht). Andrerseits ist die Schwere auf der Sonnenoberfläche 27.5 mal grösser als auf der Erde, daher:

$$G = 27.5\, g$$

und damit:

$$\frac{D}{S} = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{27.5\,10^{-4}}{27.5} \frac{V}{a\,s} = 0.75\,10^{-4} \frac{V}{a\,s},$$

wobei immer noch a in cm zu messen ist. Zieht man es vor, a in Tausendstel mm (μ) zu messen, so gilt:

$$W = \frac{D}{S} = 0.75 \frac{V}{a\,s}.$$

Wir wollen zunächst den Normalfall betrachten, dass die ganze Sonnenstrahlung aus Wellen der Länge $0.6\,\mu$ bestehe, wie sie der hellsten Stelle des Spektrums entsprechen, und das spezifische Gewicht s gleich 1 sei, und wollen das diesem Fall entsprechende Verhältnis von Druck zu Schwere mit W_0 bezeichnen.

Dann ist:

$$W_0 = \frac{D}{S} = \tfrac{3}{4} \frac{V}{a}. \tag{98}$$

Die Werte des Verhältnisses W_0, welche aus Formel (98) hervorgehen, sind in Fig. 2 graphisch dargestellt. Für grössere Werte von a, als die Figur giebt, kann man einfach $V = 1$ und:

$$W_0 = \frac{3}{4\,a}$$

setzen. Aus dieser Formel und der Figur entnimmt man folgendes: Im Normalfall wird der Druck des Lichts gleich der Schwerkraft, sobald der Kugeldurchmesser bis auf $2.5\,\lambda = 1.5\,\mu$ herabsinkt. Bei weiterer Verkleinerung der Kugel wächst der Druck über die Schwerkraft hinaus, bis er sie bei einem Kugeldurchmesser von $0.3\,\lambda = 0.18\,\mu$ um das 18-fache übertrifft. Von diesem Maximalwert sinkt er schnell wieder ab und wird bereits für den Kugeldurchmesser $0.12\,\lambda = 0.07\,\mu$ wieder der Schwerkraft gleich, um sich sodann rasch der Null zu nähern.

„Ein Ueberwiegen des Drucks der Strahlung über die Schwerkraft findet also nur für gewisse zwischen

verhältnismässig engen Grenzen liegende Kugelgrössen (0.07 — 1.5 μ) statt, innerhalb dieses Bereichs wächst aber der Druck bis auf das 18-fache der Schwerkraft an.“

Bei der practischen Anwendung des vorstehenden Ergebnisses hat man vor allem zu berücksichtigen, dass die Strahlung der Sonne in Wirklichkeit nicht auf die Wellenlänge 0.6 μ konzentriert, sondern über alle möglichen Wellenlängen verteilt ist. Setzt man die Intensität der Sonnenstrahlung zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ gleich $E\,J(\lambda)\,d\lambda$, wobei:

$$\int_0^\infty J(\lambda)\,d\lambda = 1 \tag{99}$$

sein muss, damit der richtige Betrag der Gesamtenergie herauskommt, so hat man strenge den Druck zu berechnen nach der Formel:

$$D = \pi a^2 E \int_0^\infty J(\lambda)\,V\,d\lambda$$

und erhält für das Verhältnis von Druck zu Schwerkraft:

$$\frac{D}{S} = \frac{3}{4\,a\,s}\int_0^\infty J(\lambda)\,V\,d\lambda. \tag{100}$$

Die genauere Kenntnis der Funktion $J(\lambda)$, der Intensität der Sonnenstrahlung für die verschiedenen Wellenlängen vor ihrer Absorption durch die irdische Atmosphäre, ist noch ein Desideratum. Um einen beiläufigen Anhalt zu gewinnen, setze ich für $J(\lambda)$ die nach Wien für den vollkommenen Radiator geltende Formel an:

$$J(\lambda) = \frac{1}{30\lambda_m}\left(\frac{5\,\lambda_m}{\lambda}\right)^5 e^{-5\frac{\lambda_m}{\lambda}}, \tag{101}$$

wobei der willkürliche Faktor, mit dem $J(\lambda)$ im allgemeinen multipliziert ist, gleich so bestimmt ist, dass die Gleichung (99) erfüllt wird, und wobei für λ_m die Wellenlänge maximaler Intensität, also bei der Sonne 0.6 μ einzusetzen ist. Die Mes-

sungen von Langley[1]) zeigen, dass man durch diesen Ansatz den wirklichen Verlauf der Funktion $J(\lambda)$ jedenfalls im Groben trifft. Ich habe nun den Ausdruck (101) für $J(\lambda)$ in (100) eingeführt und den Wert des Integrals durch mechanische Quadratur abgeschätzt. Dabei hat sich herausgestellt, dass durch die Verteilung der Sonnenenergie auf verschiedene Wellenlängen der Maximalwert des Verhältnisses von Druck zu Schwerkraft etwa auf die Hälfte des für den obigen Normalfall gültigen Wertes, also beiläufig auf 10 reduziert wird.

Auf der andern Seite sind aber auch Umstände in Betracht zu ziehen, welche die Druckwerte vergrössern. Es ist erstens möglich, dass die Materie der Cometenschweife ein geringeres spezifisches Gewicht hat als 1, etwa das spezifische Gewicht 0.8 der Kohlenwasserstoffe. Zweitens ist die Solarkonstante mit 2.5 für die Strahlung der Atmosphäre ausserhalb der Sonne zweifellos zu gering angesetzt und nach neueren Versuchen etwa auf 3.5—4 zu vermehren. Beides zusammen bewirkt eine Vergrösserung des Drucks auf nahezu das Doppelte, sodass man schliesslich auf einen Maximalwert von W in der Nähe von 20 zurückkommt.

Dass die Teilchen eine Constitution besitzen sollten, bei welchen grössere Drucke auftreten, als bei vollkommen reflektierenden Kugeln, ist, wenn nicht unmöglich, so doch unwahrscheinlich. Fasst man alles zusammen, so kommt man daher zu folgendem Schluss: „Die Theorie der Cometenschweife von Arrhenius erfährt insofern eine Bestätigung, als eine Zurückführung der grössten beobachteten abstossenden Kräfte auf den Druck der Sonnenstrahlung eben noch möglich erscheint. Noch grössere derartige Kräfte, welche die Schwere um mehr als das 20- oder 30-fache übertreffen, würde man aber nicht erklären können, ohne unwahrscheinlich kleine spezifische Gewichte für die Schweifteilchen anzunehmen.

---

[1]) Memoirs of the National Akad. of Science. Washington Vol. IV.

Schliesslich noch eine Bemerkung über einen Punkt der Sonnenphysik. Herr Arrhenius führt auch das radial gefaserte Aussehen der Sonnenkorona auf den Druck der Sonnenstrahlung zurück, indem er annimmt, dass der aus der Sonne bei Eruptionen emporgeschleuderte Staub unter seinem Einfluss nahezu radial von der Sonne wegströmt (l. c. pag. 85). Ein Zurücksinken der Teilchen in mehr parabolischen Curven, wie sie schon beobachtet worden sind, kann nach der Ansicht von Herrn Arrhenius dadurch bewirkt werden, dass zwei Teilchen sich zufällig treffen und zusammenbacken, mit dem Effekt, dass die Schwerkraft nun den Strahlendruck überwindet. Nach dem oben festgestellten rapiden Absinken des Drucks für sehr kleine Kugeln ist es einfacher, anzunehmen, dass die emporgeschleuderten Körperchen sich durch Verdunstung verkleinern und sich dadurch dem Strahlendruck mehr und mehr entziehen, sodass sie schliesslich samt ihren gasförmigen Verdunstungsprodukten unter dem Einfluss der Schwerkraft zur Sonne zurückfallen.

Beiträge zur Sonnentheorie.

Von R. Emden.

(Eingelaufen 6. Juli.)

Helmholtz[1]) hat gezeigt, dass verschieden dichte, mit ungleicher Geschwindigkeit strömende Luftschichten in scharf ausgeprägten Diskontinuitätsflächen aneinander grenzen können; dann sind ähnliche Bedingungen gegeben, wie wenn der Wind über eine Wasseroberfläche streicht, und jene Trennungsfläche wird zur Bildung gewaltiger, paralleler, in Richtung der rascher bewegten Schicht vorwärts eilender Wellenzüge veranlasst. Diese, meistens unsichtbar, können der Beobachtung zugänglich werden durch parallele, in den aufsteigenden Wellenbergen entstehende Wolkenstreifen, welche oft grosse Flächen des Firmaments bedecken; durch stürmische Regenschauer, die von Perioden heiteren Wetters unterbrochen, in gleichen Zwischenräumen mehrmals im Tage wiederkehren, sowie durch die Bewegung, die sie einem zufällig von ihnen erfassten Luftballon mittheilen. Ein glücklicher Zufall gestattete mir, bei einer Ballonfahrt die Längen dieser Wellen, sowie die Beschaffenheit der beiden sich berührenden Luftschichten zu messen und Uebereinstimmung der von der Helmholtz'schen Theorie geforderten und der gemessenen Wellenlänge zu konstatiren.[2])

In einer Reihe von Abhandlungen hat Helmholtz die Bedeutung dieser Wellenbildung für die allgemeine Zirkulation

---

[1]) Helmholtz, Gesammelte Abhandlungen. Bd. I u. III.

[2]) R. Emden, Eine Beobachtung über Luftwogen. Wied. Annal. LXII. pag. 62. 1897.

der Atmosphäre dargelegt. Die Wärmemenge, welche die Atmosphäre in den äquitorialen Gegenden empfängt und in mächtiger Strömung in den obern Schichten den Polen zuführt, müssen auch der Erdoberfläche in mittleren Breiten zugeführt werden. Ein einfaches Niedersteigen jener obern Schichten ist ausgeschlossen, denn, ihr Rotationsmoment beibehaltend, würden schon in niedern Breiten regelmässig Stürme auftreten, von einer Heftigkeit, wie sie selbst ausnahmsweise nicht beobachtet werden. Der Koefficient der Wärmeleitung ist viel zu klein, dass sich der Wärmegehalt durch Leitung, der Reibungskoefficient zu klein, dass sich Rotationsmomente durch innere Reibung ausgleichen können. Vielmehr werden sich die am Aequator mit Energie gespeisten, polwärts strömenden Luftmassen in immer neu sich bildenden Diskontinuitätsflächen von den untern, an Energie ärmeren, zurück zum Aequator strömenden Luftmassen absondern. Die immer mächtiger sich ausbildenden Wellen werden mit immer steiler werdender Wellenfront weitereilen, sie werden schliesslich, wie Wasserwellen, überhängend und branden; und an Stelle jedes Wellenzuges bildet sich ein gewaltiger, horizontalgelagerter Wirbel, indem sich schliesslich die beiden Luftschichten mischen. Indem durch Bildung von Diskontinuitätsflächen die Unstetigkeit erst auf die Spitze getrieben wird, bewirkt das Aufrollen derselben stetige Uebergänge in Bezug auf Rotationsmoment und Wärmegehalt, die ohne diesen Vorgang bei der Kleinheit der Koefficienten für Wärmeleitung und Reibung unmöglich wäre.

Aehnliche Verhältnisse werden auch im Innern der flüssig gedachten, rotirenden und Wärme ausstrahlenden Sonne eintreten müssen. Dies näher auszuführen ist der Zweck der nachfolgenden Betrachtungen.[1])

---

[1]) Auf die im Folgenden zu beschreibende Schichtenbildung hat, wie ich sehe, bereits M. Brillouin hingewiesen in einer kurzen Anmerkung zur französischen Uebersetzung der Abhandlung von W. Thomson: Ueber die Sonnenwärme. W. Thomson: Conférences scientifiques et allocutions. pag. 241, Anmerkung.

Wir betrachten die Sonne zur grösseren Bequemlichkeit als rotirende Kugel; die sich ergebenden Schlüsse lassen sich ohne Weiteres auch auf ein rotirendes Ellipsoid übertragen. Um eine zu rasche Abkühlung der äussersten Schichten zu verhüten, sind wir, da Wärmeleitung zu geringe Wärmemengen nach der Oberfläche transportiren würde, genöthigt, die Sonne ganz oder bis in beträchtliche Tiefen hinab als flüssige Masse aufzufassen, die durch Wärmeabgabe dichter wird, so dass durch Wärmeausstrahlung auf- und absteigende Strömungen und durch deren Mischung mehr oder minder gleichmässige Wärmeabgabe derselben bewirkt werden. Ob die Flüssigkeit kompressibel oder inkompressibel ist, ist hierbei gleichgültig. Wir behandeln den ersten Fall, als den Allgemeineren. Da wir die Zustandsgleichung so hoch temperirter und stark komprimirter Gase nicht kennen, legen wir der Rechnung die Hypothese zu Grunde, dass der ganze Theil der Sonne, den wir betrachten, die Zustandsgleichung p (Druck) $\times$ v (Masse der Volumeinheit) $=$ H (Gaskonstante) $\times$ T (absolute Temperatur) gehorcht.

Wir nehmen ferner an, dass die Masse der g a n z e n Sonne den Gasgesetzen gehorcht, der Durchkühlungsprocess durch Konvektionsströmung durch die ganze Masse hindurch erfolgt. Hätte die Sonne einen f e s t e n Kern, so wäre dies für das Folgende gleichgültig; die eintretende Schichtenbildung würde dann eben nur bis zur Oberfläche dieses festen Kernes hinabreichen. Diese Gaskugel soll anfangs im adiabatischen (indifferenten) Gleichgewichte stehen, d. h. Dichte, Druck und Temperatur soll durch die ganze Masse hindurch so variiren, dass ein beliebiges Sonnentheilchen bei beliebiger, vor Wärmeaustausch geschützter Verschiebung im Sonneninnern in Bezug auf Dichte, Druck und Temperatur stets mit dem augenblicklich verdrängten Theilchen übereinstimmt. In einer nicht rotirenden Kugel muss durch Mischung auf- und absteigender Strömungen dieser Zustand stets herbeigeführt werden.

Reibungskräfte sollen nur an Stellen mit endlichen Geschwindigkeitsdifferenzen zur Wirkung gelangen.

Wir betrachten die Sonne vom Nordpole aus und bezeichnen eine Bewegung im Sinne der Rotation als Vorwärtsbewegung.

Die Massen an der Oberfläche der Sonne geben Wärme ab, werden dichter und müssen in die Tiefe sinken. Würde die Sonne nicht rotiren, so würden bei dem angenommenen Gleichgewichtszustande der Sonne diese Massen bis zum Sonnenmittelpunkt herabsteigen und daselbst eine gleiche Menge Materie verdrängen, die den freigewordenen Platz an der Oberfläche ausfüllt. Dies Strömungsbild wird aber durch die Rotation der Sonne vollständig geändert.

Aus Symetriegründen sind die Flächen gleichen Druckes Rotationsflächen, die Druckkräfte schneiden die Sonnenachse und die durch Abkühlung dichter gewordenen, einwärts sinkenden Massen müssen ihr Rotationsmoment beibehalten. Der Sonnenachse sich nähernd werden sie immer rascher vorwärts eilen und ihr Abtrieb durch Wachsen der Winkelgeschwindigkeit (Zentrifugalkraft) abnehmen. Die aufsteigenden Massen werden, ihr kleineres Rotationsmoment beibehaltend, immer rascher rückwärts eilen, mit abnehmendem Auftriebe. Wir erhalten so ungleich dichte, verschieden rasch rotirende Gasmassen, die in einer ausgeprägten Diskontinuitätsfläche aneinander vorbeigleiten können. Wir erhalten so Diskontinuitätsflächen, die an beliebigen Stellen im Sonneninnern auftreten können. Ueber ihre Gestalt wissen wir a priori nichts, als dass wir es wegen Symetriegründen mit Rotationsflächen, in den meisten Fällen aber wohl nur mit mehr oder minder grossen Stücken von solchen zu thun haben werden. An diese Diskontinuitätsflächen sind nun die Bedingungen für das Zustandekommen mächtiger Wellen gegeben. Zur Sonnenachse nicht windschief gelegene Wellen oder Wellenzüge werden immer gewaltiger sich ausbilden, vorwärtseilend werden sie überhängend und an Stelle jeder Welle bildet sich durch deren Brandung ein mächtiger Wirbel, in dem sich der Ausgleich der Rotationsmomente und des Wärmegehaltes der beiden Schichten vollzieht. N u r a u f d i e s e W e i s e **kann ein gleich-**

mässiger Durchkühlungsprocess der **rotirenden** Sonne zu Stande kommen, denn die Verschiedenheit der Rotationsmomente verhindert das Zustandekommen beträchtlicher Konvektionsströme in radialer Richtung; die innere Reibung genügt bei der Kleinheit des Reibungskoefficienten nicht, in genügend kurzer Zeit die Rotationsmomente auszugleichen, ebensowenig wie die Wärmeleitung den verschiedenen Wärmegehalt.

Dieser geschilderte Mischungsprocess soll näher untersucht werden. Wir haben in erster Linie die Gestalt und Lage dieser Diskontinuitätsflächen und dadurch die Lagerung der durch sie getrennten Sonnenschichten festzustellen.

Wir bezeichnen mit R den Abstand eines Theilchens vom Sonnenmittelpunkt, mit r dessen Abstand von der Sonnenachse; der Durchmesser der Sonne sei $= D$. Das Rotationsmoment der Masseneinheit, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Sonne rotirt, sei:

$$\Omega = \omega r^2. \tag{1}$$

Bezeichnen p und ϱ Druck und Dichte, X, Y, Z, u, v, w Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in Richtung der $x\,y\,z$-Achsen, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0. \tag{2'}$$

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems werde in den Sonnenmittelpunkt gelegt; die x-Achse falle mit der Sonnenachse zusammen, die y-Achse geht durch Vorwärtsbewegung in die Z-Achse über. $X\ Y\ Z$ sind die Beschleunigungen, welche die Sonnenmasse einer im Innern liegenden Masseneinheit ertheilt.

Liegt diese im Abstande R vom Sonnenmittelpunkt, so ist das Potential der Gesammtmasse der Sonne auf dieselbe:

$$V = -4\pi \left\{ \frac{1}{R} \int_0^R \varrho R^2 dR + \int_R^{\frac{D}{2}} \varrho R dR \right\}.$$

Dabei ist es gleichgültig, ob wir die Sonne mit festem Kerne oder durch die ganze Masse hindurch gasförmig annehmen. (Durch den gasförmigen Theil hindurch ist ϱ als Funktion von R bekannt, sobald die Adiabate, welche dessen indifferentes Gleichgewicht darstellt, und die Natur des Gases gegeben sind.) Würden wir die Sonne nicht als Kugel, sondern Ellipsoid betrachten, so wäre für das Folgende V als das Potential dieses Ellipsoides aufzufassen. Stets ist:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wir beobachten nur rotirende Bewegungen um die Sonnenachse. Dann ist:

$$u = 0,$$

$$v = -\omega z = -\frac{\Omega}{r^2} z,$$

$$w = \omega y = \frac{\Omega}{r^2} y.$$

Die 3 Gleichungen 2) vereinfachen sich, wenn die Bewegung stationär geworden, in die beiden Gleichungen:

$$3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\Omega^2}{r^3} \end{aligned}$$

2ª ist identisch erfüllt.

Der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}$, worin s eine beliebige Richtung bedeutet, lässt bei adiabatischen Processen eine wichtige Umformung zu. Der Zustand der Gasmasse sei in einem be-

stimmten Momente definirt durch die Werthe p_0 u. ϱ_0. Behandeln wir die Gasmasse adiabatisch, so sind sämmtliche Werthe von p und ϱ, welche die Gasmasse durchläuft, abhängig von p_0 u. ϱ_0 nach der Gleichung:

$$4) \qquad \frac{p}{\varrho^\varkappa} = \frac{p_0}{\varrho_0^\varkappa}$$

(wenn $\varkappa$ das Verhältniss der spezifischen Wärmen) und in jedem Momente muss sein:

$$4^a) \qquad \frac{p}{\varrho} = H\,T.$$

Der Wärmegehalt einer Gasmasse wird gemessen durch deren potentielle Temperatur. Dieselbe wird gewöhnlich definirt als diejenige Temperatur, die ein Gas erlangt, wenn es adiabatisch auf einen näher festzusetzenden Normaldruck gebracht wird. Da im Gegensatz zu einem solchen willkürlichen Normaldruck die Dichte eins eine durch das absolute Messsystem unmittelbar und eindeutig festgesetzte Grösse ist, dürfte die folgende Definition der potentiellen Temperatur zweckmässiger sein, da sie ausserdem die Formeln sehr vereinfacht, so oft die potentielle Temperatur in dieselbe eintritt:

Potentielle Temperatur ist diejenige Temperatur, die ein Gas erlangt, wenn es adiabatisch auf die Dichte eins gebracht wird. Diese Temperatur bezeichnen wir mit Θ.

Durch diese Festsetzung ist ohne weiteres auch ein potentieller Druck definirt als derjenige Druck, den das Gas ausübt, wenn es adiabatisch auf die Dichte eins gebracht wird. Dieser sei mit Π bezeichnet. Π und Θ ändern sich bei adiabatischer Behandlung nicht. Ist die Sonne im adiabatischen Gleichgewicht, so haben Π und Θ durch die ganze Sonnenmasse hindurch konstante Werthe. Strahlt ein Sonnentheilchen Wärme aus, so sinken dessen Π und Θ.

Nach 4^a) stehen Π und Θ in der Beziehung:

$$\Pi = H \cdot \Theta.$$

Wählen wir in Gl. 4 für ϱ_0 und p_0 die Werthe

$$\varrho_0 = 1 \text{ u. } p_0 = \Pi,$$

so lautet die Gleichung der Adiabate:

$$p = \varrho^{\varkappa} \cdot \Pi\,\Theta.$$

Diese Festsetzungen benützend können wir schreiben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = (\Pi \cdot \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}} p^{-\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot (\Pi \cdot \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\partial s}.$$

Setzen wir:

5) $$\vartheta = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} (\Pi\,\Theta)^{\frac{1}{\varkappa}}, \quad \pi = p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

so wird:

6) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial s}, \quad \vartheta = \text{constans}.$$

Da $\varkappa > 1$, so ändert sich ϑ gleichsinnig mit Θ, und kann deshalb ebenfalls als Mass für den Wärmegehalt einer Gasmasse dienen. Ebenso ändert sich π gleichsinnig mit p. An Stelle der beiden Variabeln ϱ und p haben wir nur noch Eine, π, da ϑ bei adiabatischen Processen konstant bleibt. Bei adiabatischem Gleichgewicht hat ϑ durch die ganze Sonnenmasse hindurch denselben Werth.

Durch den oben geschilderten Abkühlungs- und Strömungsvorgang können sich in der Sonne Schichten bilden, innerhalb welchen Wärmegehalt und Rotationsmoment konstante Werthe besitzen, während beide Grössen von einer Schicht zur andern sprungweise sich ändern. Eine solche Schicht, innerhalb welcher ϑ und Ω konstante Werthe besitzen, nennen wir eine homogene Schicht.

Mit Benutzung der eingeführten Bezeichnungen lauten die Gleichungen 3):

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\Omega^2}{r^3}.$$

Innerhalb einer homogenen Schicht gilt also die Beziehung:

$$\text{I.} \qquad V + \vartheta\,\pi = -\tfrac{1}{2}\frac{\Omega^2}{r^2} + C.$$

Wir betrachten nun zwei aneinander grenzende Schichten 1 und 2 und unterscheiden danach $\vartheta_1\ \Omega_1\ C_1$ von $\vartheta_2\ \Omega_2\ C_2$.

Damit eine Diskontinuitätsfläche bestehen kann, muss zu beiden Seiten derselben der Druck, und somit auch π, denselben Werth haben. An jeder Stelle der Grenzfläche muss also sein:

$$\pi_1 - \pi_2 = 0,$$

wobei längs derselben π_1 und π_2 variiren und an der Oberfläche der Gaskugel die Werthe $\pi_1 = \pi_2 = 0$ annehmen.

Wir erhalten demnach als Gleichung der Meridiankurve der Diskontinuitätsfläche (Berührungsflächen zweier homogenen Schichten), ausgedrückt durch r und R:

$$\text{II.} \qquad V\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right) - \frac{C_1}{\vartheta_1} + \frac{C_2}{\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung dieser Meridiankurve ergiebt sich durch Differenziren nach r und R zu:

$$\frac{dV}{dR}\,dR = \frac{dr}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right)$$

oder:

$$\text{III.} \qquad \frac{dr}{dR} = r^3\,\frac{dV}{dR}\cdot\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}\right).$$

Der Differentialquotient hat also stets dasselbe Vorzeichen wie $\dfrac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}$.

Verschwindet dieser Ausdruck, was für $\vartheta_2 = \vartheta_1$, $\Omega_1 = \Omega_2$ der Fall ist, so geht die Meridiankurve über in eine Parallele zur Sonnenachse.

Die Trennungsfläche von Schichten, die bei gleichem Wärmegehalt verschiedenes Rotationsmoment besitzen, sind in diesem Specialfalle Kreis-Cylinder-

flächen, parallel und zentrisch zur Sonnenachse gelegen.[1])

Um im allgemeineren Falle weiteren Einblick in die Formen dieser Flächen und die Lagerung der Schichten 1 und 2 zu erhalten, benützen wir das von Helmholtz bei Behandlung der Diskontinuitätsflächen der Atmosphäre angewendete Verfahren.

Die Gleichung der Trennungsfläche lautet $\pi_1 - \pi_2 = 0$ und für jede Richtung s innerhalb der Trennungsfläche ist deshalb

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial s} = 0 .$$

Ertheilen wir der Fläche einer Stelle eine kleine Deformation, so werden π_1 und π_2 sich ändern, und ebenfalls $\pi_1 - \pi_2$, falls das Gleichgewicht der Fläche nicht zufällig indifferent ist. Entfernen wir uns auf der Fläche auf der Normalen um die kleine Strecke ∂n, so kann der Quotient $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial n}$ positiv oder negativ sein, und dasselbe Vorzeichen hat bei stetiger Druckvertheilung auf jeder Seite der Fläche auch der Quotient $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial h}$, wobei ∂h in beliebiger Richtung zurückgelegt wird. Ist der Differentialquotient positiv, so wird bei dieser Deformation nach dieser Seite hin ein Ueberdruck entstehen, der die Fläche wieder zurückdrängt; das Gleichgewicht der Fläche ist dann stabil. Wäre der Differentialquotient negativ, so würde die auftretende Druckdifferenz die Deformation vergrössern und das Gleichgewicht wäre labil. Zur Entscheidung des Gleichgewichts genügt es, den Differentialquotienten nach den beiden Richtungen $d\,r$ und $d\,R$ zu bilden und zu sehen, in welche Schicht bei stabilem Gleichgewicht $d\,r$ oder $d\,R$ hineinragt.

Wir bilden erst $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial R}$ bei konstantem r, d. h. wir gehen parallel zur Sonnenachse nach aussen. Gleichung I. liefert:

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial R} = \frac{\partial V}{\partial R}\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right). \tag{7}$$

[1]) Vergl. E. J. Wilczynski: Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Inauguraldissertation, Berlin 1897, pag. 8.

Der Differentialquotient ist $+$, wenn $\vartheta_1 > \vartheta_2$, also: wenn die wärmehaltigere Schicht in Richtung nach dem Sonnenpol höher liegt, ist das Gleichgewicht der Fläche stabil.

Dabei bleiben noch zwei Möglichkeiten offen. Gehen wir auf der Trennungsfläche nach aussen, so können wir uns der Sonnenachse nähern oder von ihr entfernen. Im ersten Falle müsste die wärmehaltigere Schicht auf der der Achse abgewendeten Seite der Fläche liegen; im zweiten Falle wäre die Lage derselben auf der der Sonnenachse zugewendeten Seite. Um dies zu entscheiden, bilden wir aus I. $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r}$ bei konstantem R und erhalten:

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right). \tag{8}$$

Der Differentialquotient ist positiv, wenn $\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} > \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}$, d. h. wenn zum grössern Rotationsmoment Ω_1 der kleinere Wärmegehalt ϑ_1 oder ein höchstens gleicher Wärmegehalt ϑ_2 gehört. In der vor Ausstrahlung geschützten Sonne hat ϑ überall denselben Werth, Ω nimmt von der Achse nach dem Aequator hin zu. Bei der Ausstrahlung nimmt ϑ gleichmässig über die ganze Oberfläche ab, so dass $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$ vom Pol zum Aequator hin und von der Sonnenachse senkrecht nach aussen wächst. Auch tritt die Abkühlung, Abnahme von ϑ, ein für die an der Oberfläche liegenden, niedersinkenden Massen, also grösseres Ω, während die aufsteigenden Massen mit grösserem ϑ und kleinerem Ω beladen sind. In den Schichten der Sonne wird deshalb stets zum grössern Ω das kleinere ϑ gehören.

Bewegen wir uns auf einer Kugelfläche, die wir um den Sonnenmittelpunkt legen, so liegt bei stabilem Gleichgewicht die Schicht mit grösserem Wärmegehalt und kleinerem Rotationsmoment auf der der Sonnenachse zugewandten Seite der Trennungsfläche.

Die Trennungsflächen der Schichten, die sich in der rotirenden Sonne durch Wärmeausstrahlung bilden müssen, liegen also der Art, dass wir bei der Bewegung auf derselben uns von der Sonnenachse entfernen, wenn wir nach aussen gehen. Dabei liegt die an Wärme reichere, mit kleinerem Rotationsmoment behaftete Schicht auf der der Sonnenachse zugewandten Seite.

In Uebereinstimmung damit zeigt III, dass $\frac{dr}{dR}$ positiv ist.

Gehen wir parallel zur Sonnenachse nach aussen, so treffen wir stets auf wärmereichere Schichten, ebenso, wenn wir auf einer Kugelfläche von der Aequatorebene her uns der Sonnenachse nähern. Auf keinem dieser beiden Wege können wir deshalb dieselbe Trennungsfläche zweimal durchqueren. Daraus folgt:

Die Trennungsflächen sind keine geschlossenen Flächen, sondern Rotationsflächen, welche die Sonnenoberfläche schneiden.

Der Schnittwinkel ist bestimmt durch den Werth von $\frac{dr}{dR}$ an der Sonnenoberfläche.

Ueber die Gestalt dieser Fläche lässt sich im Allgemeinen wenig aussagen; sie ist bestimmt durch $\frac{dr}{dR}$. Aus III. folgt:

$$\frac{dr}{dR} = r^3 \frac{dV}{dR} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1} = r^3 \cdot f \cdot (R) \cdot \varphi (\Omega \cdot \vartheta).$$

Die Funktion $f(R) = \frac{dV}{dR}$ kann, wenn die Gaskonstante und das Verhältniss der specifischen Wärme der Sonnenmassen bekannt ist, für den adiabatischen Gleichgewichtszustand mit genügender Genauigkeit berechnet werden.[1]) Vom Werthe 0 im Mittelpunkte steigt sie, um nach Ueberschreitung eines

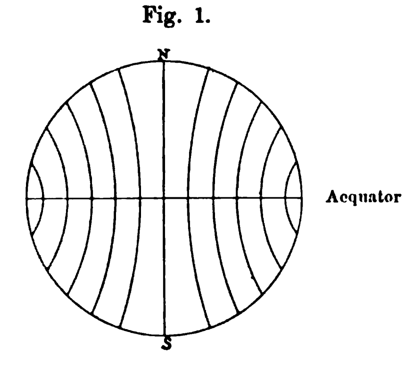
[1]) Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper. Wied. Annal. XI. pag. 332. 1880.

Maximums, dessen Lage auf dem Radius durch $\varkappa$ bedingt ist, bis zum Werthe $-g$ auf der Oberfläche abzunehmen. Ueber den Werth der Funktion $\varphi(\Omega\,\vartheta)$ können wir ohne Kenntniss der Grösse Ω und ϑ nichts aussagen, als dass sie $+$ ist und mit steigender Differenz des Wärmegehaltes beider Schichten zunimmt. Legen wir eine Ebene durch die x (Sonnen-) und y-Achse, so können wir die Gleichung für $\frac{dr}{dR}$ auch schreiben

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{x}\left(\frac{R}{r^3 f(R)\,\varphi(\Omega\,\vartheta)}-y\right)$$

und sehen daraus, dass die Trennungsflächen die Aequatorebene senkrecht durchsetzen und an derselben Stelle im Sonnen-

Fig. 1.



innern die Tangente an der Meridiankurve um so steiler auf der Aequatorebene steht, je kleiner $\varphi(\Omega\,\vartheta)$ ist. Die Trennungsflächen sind also um so gekrümmter, je mehr sich die beiden benachbarten Schichten in Bezug auf Wärmegehalt und Rotationsmoment unterscheiden. Wären nur die Rotationsmomente, nicht auch die potentiellen Temperaturen derselben verschieden, so wären die Trennungsflächen Cylinderflächen parallel zur Sonnenachse.

Die Form der Trennungsflächen ist in vorstehender Figur angedeutet.

Ein Zerfallen der rotirenden Sonne in eine beliebig grosse Zahl solcher homogener Schichten würde einen stabilen Gleichgewichtszustand derselben darstellen, falls wir die Reibung an den Trennungsflächen vernachlässigen, und die Schichten so geordnet sind, dass bei Bewegung auf der Aequatorebene nach aussen stets Schichten mit grösserem Ω und kleinerem ϑ angetroffen werden.

Jede dieser rotirenden Schichten zeigt nun gänzlich anderes Verhalten wie die als Ganzes rotirend gedachte Sonne. Während letztere durch die ganze Masse hindurch dieselbe potentielle Temperatur besitzt, ist diese hier nur innerhalb einer Schicht konstant und wechselt von einer Schicht zur andern sprungsweise. In jeder Schicht ist das Rotationsmoment ebenfalls konstant; der kleinste Impuls genügt daher, um ein Massentheilchen eine Schicht in beliebiger Richtung durchqueren zu lassen. In jeder Schicht existirt ein Geschwindigkeitspotential, während die Rotation der Sonne eine Wirbelbewegung darstellt. Innerhalb einer Schicht wächst die Winkelgeschwindigkeit umgekehrt wie das Quadrat des Rotationsradiuses, die lineare Geschwindigkeit umgekehrt wie die erste Potenz, die Zentrifugalkraft umgekehrt wie die dritte Potenz desselben. Die Differenzen der linearen Geschwindigkeit an der Berührungsfläche zweier Schichten ist deshalb nicht konstant, sondern nimmt in dem Masse zu, wie sich die Trennungsfläche der Achse nähert. Je tiefer sich eine Trennungsfläche in das Sonneninnere hinabzieht, um so grösser wird die Differenz der sich tangirenden Geschwindigkeit und deshalb der Effekt der Reibung längs der Trennungsfläche.

Die Bildung dieser Schichten und die Gestalt der Trennungsflächen ist offenbar vollständig unabhängig von der Anwesenheit eines festen Kernes in der Sonne. In letzterem Falle wird sich die Schichtbildung eben nur bis zur Oberfläche hinabziehen und der feste Sonnenkern mit der zur Photosphäre reichenden, geschichteten Gashülle vollständig der Erde mit der geschichteten Atmosphäre entsprechen. Der Unterschied ist nur der, dass die Lagerung der Schichten und der Trennungs-

flächen, wie sie der Sonne entsprechen, in der Atmosphäre der Erde, wo in der Regel die Tangente an die Meridiankurve der Trennungsfläche der Schichten das Himmelsgewölbe zwischen Horizont und Pol schneidet, nur ausnahmsweise und lokal beschränkt auftreten kann. Der Grund hierfür liegt darin, dass in der am Aequator geheizten Atmosphäre beinahe stets zum grössern Rotationsmoment der grössere Wärmegehalt gehört, durch Heizung der Quotient $\frac{\Omega}{\vartheta}$ abnimmt, während in den sich berührenden Schichten der Sonne zum grössern Rotationsmoment der geringere Wärmegehalt gehört, da durch Abkühlung $\frac{\Omega}{\vartheta}$ zunimmt.

Tritt an der Trennungsfläche solcher Schichten Mischung ein zwischen den Mengen m_1 und m_2 der durch $\Omega_1\,\vartheta_1$ und $\Omega_2\,\vartheta_2$ charakterisirten Schichten, so lassen sich das Rotationsmoment Ω (da nur innere Kräfte wirken) und die potentielle Temperatur ϑ der Mischung nach dem Schwerpunktssatze berechnen zu:

$$(m_1 + m_2)\,\Omega = m_1\,\Omega_1 + m_2\,\Omega_2$$
$$(m_1 + m_2)\,\vartheta = m_1\,\vartheta_1 + m_2\,\vartheta_2.$$

Gleichung III lautete:

$$\frac{d\,V}{d\,R}\cdot\frac{d\,R}{d\,r} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right).$$

Der Index 1 beziehe sich auf die wärmehaltigere Schicht. Um die Lage der Grenzfläche der Mischung gegen Schicht 1 zu finden, die durch $\frac{d\,r_1}{d\,R_1}$ bezeichnet werden möge, haben wir in dieser Gleichung an Stelle von Ω_2 und ϑ_2 Ω und ϑ zu setzen und finden:

$$\frac{d\,V}{d\,r}\left(\frac{d\,R_1}{d\,r_1} - \frac{d\,R}{d\,r}\right) = \frac{m_1\,\vartheta_1}{m_1 + m_2}\,\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_2 - \vartheta_1},$$

da $\vartheta_1 > \vartheta_2$ ist:

$$\frac{d\,r_1}{d\,R_1} > \frac{d\,r}{d\,R}.$$

Die neue Trennungsfläche gegen Schicht 1 ist also stärker gegen die Aequatorebene geneigt, wie die ursprüngliche. Ebenso erhalten wir für $\frac{d R_2}{d r_2}$, welches die Lage der Trennungsfläche der Mischung gegen Schicht 2 angiebt, nach demselben Verfahren:

$$\frac{d V}{d r}\left(\frac{d R_2}{d r_2} - \frac{d R}{d r}\right) = \frac{m_2 \vartheta_2}{m_1 + m_2} \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_1 - \vartheta_2},$$

also:

$$\frac{d r_2}{d R_2} < \frac{d R}{d r}.$$

Die neue Trennungsfläche gegen Schicht 2 steht also steiler auf der Aequatorebene wie die ursprüngliche. Von dem beliebigen Punkte der Trennungsfläche an, an dem die Mischung sich vollzieht, suchen sich also zwei neue Trennungsflächen in die Schichten 1 und 2 hineinzuziehen, einen dachförmigen, gegen die Aequatorebene hin offenen Raum abgrenzend. Die gemischten Partieen müssen sich deshalb längs der ursprünglichen Trennungsfläche äquatorwärts (in der Atmosphäre der Erde unter normalen Verhältnissen polwärts) in Bewegung setzen. In dem Masse, wie immer mehr Massen zur Mischung gelangen, wird die gemischte Schicht auch längs der Trennungsfläche nach aussen an Raum gewinnen und zwischen die ursprünglichen sich berührenden Schichten lagert sich eine neue Schicht mit mittlerem Rotationsmoment und Wärmegehalt ein.

Nun ist es wohl ausgeschlossen, dass die Sonne oder der gasförmige Theil derselben vollständig in eine mehr oder minder grosse Anzahl solcher homogener Schichten zerfällt. Wir haben uns die in Wirklichkeit eintretenden Verhältnisse vielmehr so vorzustellen, dass bei der von aussen her stattfindenden Abkühlung der rotirenden Sonne mehr oder minder ausgedehnte Stücke dieser Diskontinuitätsflächen sich bilden werden. Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten der Trennungsfläche regt dieselbe zu immer mächtigerer Wellenbildung an, Wellen, die schliesslich überhängend werden und branden und sich dadurch in gewaltige

Wirbel verwandeln, innerhalb deren sich die Mischung eines grossen Theils der Massen beider Schichten vollzieht. Inzwischen werden sich an anderen Stellen neue Trennungsflächen neu entstandener Schichten gebildet haben, an denen sich derselbe Mischungsprocess wiederholt. Einzig und allein durch diesen Mechanismus, der nichts Hypothetisches an sich hat und in einer flüssigen, rotirenden, Wärme ausstrahlenden Masse mit Nothwendigkeit sich einstellen muss, kann eine gleichmässige Durchkühlung der Sonnenmasse eintreten und ein viel zu rasches Erkalten der äusseren Schichten verhindert werden. Denn Wärmeleitung und innere Reibung der Gase sind zu gering, den Ausgleich des Wärmegehaltes und der Rotationsmomente zu besorgen. Nur durch die geschilderte Bildung von Diskontinuitätsflächen und deren Aufrollen können durch Mischung verschiedene Rotationsmomente und potentielle Temperaturen ausgeglichen werden.

Wir haben bereits gezeigt, dass in einer homogenen Schicht die Winkelgeschwindigkeit im Quadrat des Abstandes von der Rotations- (Sonnenachse) abnimmt. Daraus folgt, dass es unmöglich ist, von einer Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Sonne zu sprechen. Würde die Sonne zufällig einmal überall mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiren, so würde diese Konstanz durch die auftretende Schichtenbildung und Mischung gestört werden. Die Winkelgeschwindigkeit muss variabel sein sowohl durch die ganze Sonnenmasse hindurch, als an derselben Stelle im Laufe der Zeit. Sie braucht in einem bestimmten Moment auch nicht stetig durch die Masse zu variiren, sondern wird an einer Diskontinuitätsfläche sich sprungweise ändern. Schneidet eine Diskontinuitätsfläche die Sonnenoberfläche (Photosphäre), so erhalten wir Partien, die daselbst mit ungleicher Winkelgeschwindigkeit aneinander vorbeigleiten. Dieselbe Ueberlegung gilt aber auch hinsichtlich der potentiellen Temperaturen. Wäre $\varkappa$ für die Sonnenmasse und jene Funktion $\varphi\,(\Omega\,\vartheta)$ bekannt, so liesse sich eine mittlere Ver-

theilung der Winkelgeschwindigkeiten (Rotationsmomente) und potentiellen Temperaturen angenähert berechnen. In Ermanglung dessen müssen wir uns mit folgendem allgemeinen Raisonnement begnügen.

Kühlt sich die nicht rotirende Sonne von aussen her ab, so wird die Wirkung der Abkühlung auf die ganze Oberfläche gleichförmig sein, da die durch Konvektionsströmung bewirkte Mischung bis in gleiche Sonnentiefen hinabreicht. Rotirt die Sonne, so werden jene Strömungen, die sich an den Polen längs der Sonnenachse vollziehen, in keiner Weise gestört. Je näher wir aber dem Aequator kommen, desto weniger tief kann die Strömung hinabgehen, desto näher der Oberfläche wird sie durch Bildung von Diskontinuitätsflächen gehemmt und der Wärmeaustausch kann nur durch Aufrollen derselben und Bildung neuer ungleich langsamer in die Tiefe fortschreiten. Der Wärmeverlust der äquatorialen Partien wird deshalb langsamer ersetzt als der polaren Gegenden, die potentiellen Temperaturen der letzteren müssen deshalb verhältnissmässig höher werden. Da aber unter gleichen Drucken die wirklich beobachteten Gastemperaturen mit den potentiellen Temperaturen wachsen, so würde der Satz folgen:

a) Die Sonnenoberfläche muss in den polaren Gegenden höhere Temperaturen besitzen wie am Aequator.

Ob diese Temperaturdifferenz gross genug ist, um durch Strahlungsmessungen festgestellt zu werden, muss die Erfahrung lehren.

Ganz dieselben Ueberlegungen können wir anstellen bezüglich den Austausch der Rotationsmomente (Winkelgeschwindigkeiten) in polaren und äquatorialen Gegenden. Die äusseren Sonnenportionen ziehen sich durch Abkühlung zusammen, ihre Winkelgeschwindigkeit vergrössert sich und die Hülle muss dem Kern voraneilen. Die in polaren Gegenden ungestört in grösste Tiefen hinabreichenden Konvektionsströme sorgen für Ausgleich der Winkelgeschwindigkeit. Je näher wir dem Aequator kommen, desto bälder wird die Strömung durch Diskontinuitätsflächen gehemmt und desto langsamer theilt sich

durch fortwährendes Aufrollen und Neubildung derselben die von aussen wachsende Winkelgeschwindigkeit den tiefern Partien mit. Daraus folgt der bekannte Satz:

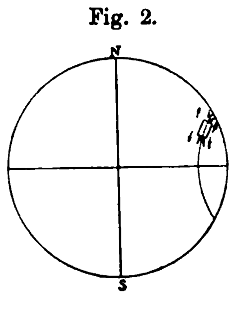
b) Die Sonnenoberfläche muss in ihren äquatorialen Gegenden grössere Winkelgeschwindigkeiten besitzen wie in den polaren Gegenden.

Sätze a) und b) sind Parallelsätze, die auf derselben Ursache basiren.

Ausser durch die Verhinderung einer gleichmässigen Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Sonne machen sich diese Diskontinuitätsflächen, namentlich der Process ihres Aufrollens, noch in anderer Weise bemerkbar.

Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeiten veranlassen die Flächen und Wellen, die schliesslich überhängend werden und branden. An Stelle jeden Wellenzuges entsteht ein gewaltiger Wirbel, der im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne rotirt und nicht windschief zur Sonnenachse liegt. Die Differenz der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten dieser Trennungsfläche wächst (pag. 352) mit deren Annäherung an die Sonnenachse. Der Ort maximaler Wellen- und Wirbelbildung wird deshalb im Innern der Sonne, nicht an der Oberfläche derselben zu suchen sein. In Fig. 2 ist ein solcher Wirbel seiner Lage nach skizzirt. Die Theorie der Wirbel lehrt, dass in seiner Achse der Druck sinkt. In Richtung der Achse saugt der Wirbel deshalb Masse ein, um sie in andern Theilen wieder auszuwerfen. Diese Saugwirkung der Cyklone der Atmosphäre ist bekannt; jeder vertikale Wirbel in einem Flusse macht sich in einer Depression der Oberfläche geltend. Liegt der Wirbel, der sich durch Aufrollen der Diskontinuitätsfläche bildet, der Sonnenoberfläche nicht zu fern, so wird er sich in jener ebenso bemerkbar machen, wie der Wasserwirbel in der Oberfläche des Wassers. Giebt man die Wilson'sche

Fig. 2.



Theorie der Beschaffenheit der Sonnenflecke als Vertiefungen in der Sonnenoberfläche zu, so brauchen wir die Ursache derselben nur in diesen Wirbeln im Sonneninnern zu suchen, um eine befriedigende Erklärung des Meisten zu erhalten, was wir über die Flecken und ihre Begleiterscheinungen wissen.

Es kann nicht im Rahmen dieser Abhandlung liegen, das ganze ungeheure Beobachtungsmaterial über Sonnenflecke in Hinsicht auf diesen Erklärungsversuch eingehend zu behandeln. Es genüge hier zu zeigen, dass die charakteristischen Erscheinungen, welche die Sonnenflecken darbieten, beinahe a priori vorausgesagt werden können, wenn wir sie mit diesen Wirbeln im Sonneninnern in Verbindung bringen.

Rollt sich eine Diskontinuitätsfläche nicht zu entfernt von der Sonnenoberfläche auf, so wird der sich ausbildende Wirbel sich allmählich auch auf derselben bemerkbar machen. Unruhe der Oberfläche, vermehrte Fackelbildung sind Vorboten des sich bildenden Fleckes, nach unserer Auffassung ein Beweis, dass die Mühle im Innern der Sonne bereits im Gange ist. Die Saugwirkung des Wirbels wird bald die an der Oberfläche der Photosphäre gelegenen Massen ergreifen. An einem oder mehreren Punkten beginnt die Masse einzusinken. Es bildet sich ein höchst unregelmässiger Krater aus; die Strömung wird allmählich stationär, und in demselben Grade wird der Krater regelmässigeren Querschnitt annehmen. In radialen Strömen stürzen die photosphärischen Massen in diesen Krater hinein, das Aussehen der Absorptionslinien im Spektrum zeigt die heftige Bewegung im Innern dieses Strudels an. „Dunklere Theile, wie der übrige Kern, sind wahrscheinlich Oeffnungen röhrenartiger Vertiefungen, welche in unbekannte Tiefen eindringen“ (Dawes).

Die eingesogenen Massen müssen durch Massen aus dem Sonneninnern ersetzt werden, und der Sonnenfleck wird deshalb von einem an Fackeln und Protuberanzen reichen Gebiete umgeben sein. „Ein Fleck ist thatsächlich in der Regel von einem Ringe von Eruptionen umgeben, und es hat den An-

schein, als ob die ausbrechenden Massen sämmtlich in ein und dieselbe Vertiefung strömten, als ob die Massen wirklich hinabgezogen würden, als ob der Fleck eine saugende Wirkung ausübte, die stark genug ist, um die in der Umgebung des Fleckes hervorbrechenden Massen in das Innere des Fleckes hinabzuziehen" (Young).

Erschöpft sich allmählich im Sonneninnern der Wirbel durch innere Reibung, so lässt dessen Saugwirkung nach, der Krater an der Sonnenoberfläche füllt sich aus und nur die noch einige Zeit andauernde, vermehrte Fackelthätigkeit an dieser Stelle zeigt, dass im Sonneninnern an dieser Stelle noch Kräfte thätig sind, die allmählich erlöschen. Wird, während der Wirbel noch in Thätigkeit ist, durch eintretende Unsymmetrie das Zuströmen nicht in Richtung der Achse erfolgen, so kann der Krater an der Sonnenoberfläche verschwinden, um nach Erneuerung des symmetrischen Zuflusses wieder zu erscheinen. Auf diese Weise können Sonnenflecke mehrmals verschwinden und an derselben Stelle der Sonne wieder aufbrechen. Entstehen die Wellen und Wirbel in zu grosser Tiefe, so wird sich ihr Auftreten auf der Sonnenoberfläche nur in vermehrter Fackelthätigkeit, nicht mehr in Kraterbildung, bemerkbar machen. Auf diese Weise lassen sich auch die „verschleierten Flecke" erklären, auf die Trouvelot aufmerksam machte. (Vgl. Young, Die Sonne, pag. 129.)

Entsteht der Wirbel nahe der Sonnenoberfläche, so wird sich sein Rotationssinn (im Sinne der Sonnenrotation) auch in einer gleichsinnigen Drehbewegung des Flecks bemerkbar machen müssen, wie sie auch zuweilen beobachtet wird. In den meisten Fällen entsteht der Wirbel in beträchtlichem Abstand von der Sonnenoberfläche, so dass der Drehsinn des Fleckes in erster Linie bedingt ist durch unsymmetrisches Herbeiströmen der angesogenen Massen. Die ablenkende Kraft der Sonnenrotation auf diese Strömungen ist bei der langsamen Winkelgeschwindigkeit derselben gering (unter gleicher Breite und bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit etwa 25 mal kleiner als auf der Erde), besonders in den niederen Breiten, in denen sich die

Mehrzahl der Flecke ausbildet. Es kann deshalb auch sehr wohl vorkommen, dass in demselben Fleck je nach der Unsymmetrie des Anströmens verschiedener Drehsinn herrscht.

Aussehen, Entstehen und Verschwinden der Flecke wird, sobald man diese wie Wilson betrachtet, vollständig durch dies Aufrollen der Diskontinuitätsflächen klar gelegt. Ebenso befriedigend wird dadurch auch die Vertheilung der Flecke über die Sonnenoberfläche hinweg erklärt. Die Art und Weise des Entstehens der Schichtbildung und Betrachtung der Fig. 1 lehrt, dass um den Aequator herum eine Zone minimaler Flecken häufig vorhanden sein muss. Nur äusserst selten kann eine, vielleicht unsymmetrisch ausgebildete, Trennungsfläche durch unsymmetrisches Aufrollen einen Fleck in diesen Regionen verursachen. Auch in höheren Breiten werden sich selten Diskontinuitätsflächen bilden und dann nur solche, bei denen erst in grossen Tiefen genügende Differenz der linearen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten und dadurch Wellen- und Wirbelbildung zu Stande kommt. In höheren Breiten werden wir wohl Fackeln, auch verschleierte Flecke, aber keine ausgebildeten Flecke mehr antreffen. Der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit sind mittlere Breiten, jene Breiten maximaler Schichtbildung, die sich auch an der Oberfläche durch grösste Verschiedenheit in der stetigen Anordnung der Winkelgeschwindigkeit verrathen. Wäre jene Funktion $\varphi\,(\Omega\,\vartheta)$ bekannt, so liesse sich der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit berechnen. So lange dies nicht möglich ist, müssen wir eher umgekehrt aus der Fleckenhäufigkeit auf die Stelle maximaler Schichtbildung schliessen. Die meisten Trennungsflächen müssen sich deshalb in mittleren Breiten bilden, wo die Tangentenrichtung an die der Sonnenoberfläche näher liegenden Theile derselben letztere unter 10^0 bis 40^0 Breite schneidet, da zwischen diese Grenze die Fleckenzone (mit seltenen Ausnahmen) eingeschlossen ist. Diese Orte maximaler und ausgeprägtester Schichtbildung haben durchaus nichts Unwahrscheinliches an sich, so dass wir auf Grund unserer Hypothese die Vertheilung der Flecken rein mechanisch und ungezwungen erklären können.

Häufig treten Sonnenflecke in gleicher Breite serienweise angeordnet auf. Unsere Hypothese lässt dies voraussehen. Denn eine Diskontinuitätsfläche bildet öfters nicht eine Welle, sondern es folgen mehrere Wellen aufeinander. Jedem Wellenzuge entspricht bei der Auflösung desselben ein Wirbel, und jedem Wirbel kann ein Sonnenfleck entsprechen. So entstehen Flecke, die ungefähr unter gleicher Breite liegend zu ziemlich gleichen Zeiten auftreten. (Eine Serie Sonnenflecke und ein System parallel gelagerter Cirrusstreifen in unserer Atmosphäre werden durch den gleichen Mechanismus hervorgerufen.)

Nach einer Periode geringster Fleckenhäufigkeit beginnen die wieder zahlreicher auftretenden Flecke sich in höheren Breiten zu bilden und die Fleckenbildung schreitet dann nach niedrigeren Breiten fort. Unsere Hypothese lässt auch dies voraussehen. Ist die Sonnenmasse in einer Periode grösster Ruhe, so werden die an der Oberfläche erkaltenden Massen verhältnissmässig stark sich abkühlen können, ehe sie niedersinken. Die Diskontinuitätsflächen beginnen in grösserer Tiefe und höherer Breite sich zu bilden und ebenso die Sonnenflecke. In dem Masse, wie die Sonne unruhiger wird, wird das labile Gleichgewicht der erkaltenden Massen an der Oberfläche rascher ausgelöst; die Massen müssen früher, weniger stark erkaltet niedersinken und dementsprechend bilden sich Schichten und Flecke in immer niedereren Breiten.

Durch Auslösung dieses labilen Gleichgewichtes können möglicherweise Planeten die Fleckenerscheinungen beeinflussen.

Werden die Sonnenflecke durch Wirbel verursacht, so müssen sie auch Eigenbewegung besitzen. Ein gerader Wirbelfaden in einer unendlich ausgedehnten ruhenden Flüssigkeitsmasse wird keine Eigenbewegung besitzen. Liegt er aber in der Nähe einer festen Wand oder der Flüssigkeitsoberfläche diesen parallel, so wird er sich diesen parallel bewegen im gleichen Sinne, wie in Folge seiner Rotationsbewegung die Flüssigkeit zwischen Wirbel und Wand hindurchströmt und mit einer Geschwindigkeit $= \frac{1}{4}$ derjenigen, mit welcher die Flüssigkeit im Fusspunkte des auf die feste Wand gefällten

Lothes strömt. Die Wirbel im Sonneninnern liegen nicht parallel der Sonnenoberfläche, zerlegen wir sie aber in zwei Wirbelkomponenten senkrecht und parallel der Sonnenoberfläche, so wird namentlich für Wirbel in niederen Breiten letztere beträchtlichen Werth besitzen. In niederen Breiten müssen die Wirbel, namentlich wenn sie nicht in zu grosser Tiefe liegen, Eigenbewegung besitzen und zwar im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne dieser voraneilen. So erklärt sich der Satz von Duner, dass sich aus Sonnenfleckenbeobachtungen eine grössere Rotationsgeschwindigkeit der Sonne ergiebt, wie aus Spektralbeobachtungen auf Grund des Doppler'schen Princips. Nicht senkrecht zu einander gestellte Wirbel beeinflussen gegenseitig ihre Eigenbewegung; dadurch lassen sich die verwickelten Eigenbewegungen der Sonnenflecke erklären, die Faye denselben zuschreibt. Dass ein Wirbel (Sonnenfleck) sich in mehrere Wirbel theilt, kann entsprechend an den Wasserwirbeln in einem Flusse häufig beobachtet werden.

Da nach dieser Erklärung die Flecke Folgeerscheinungen des Mischungsprocesses der rotirenden Sonne sind, so wird zur Zeit ihrer maximalen Häufigkeit der Wärmeverlust der Sonnenoberfläche am vollkommensten durch Mischung mit tiefer liegenden, wärmehaltigeren Massen ausgeglichen werden. Die Zeiten maximaler Fleckenhäufigkeit werden demnach mit Zeiten erhöhter Wärmestrahlung der Sonne (Klimaschwankungen) zusammenfallen.

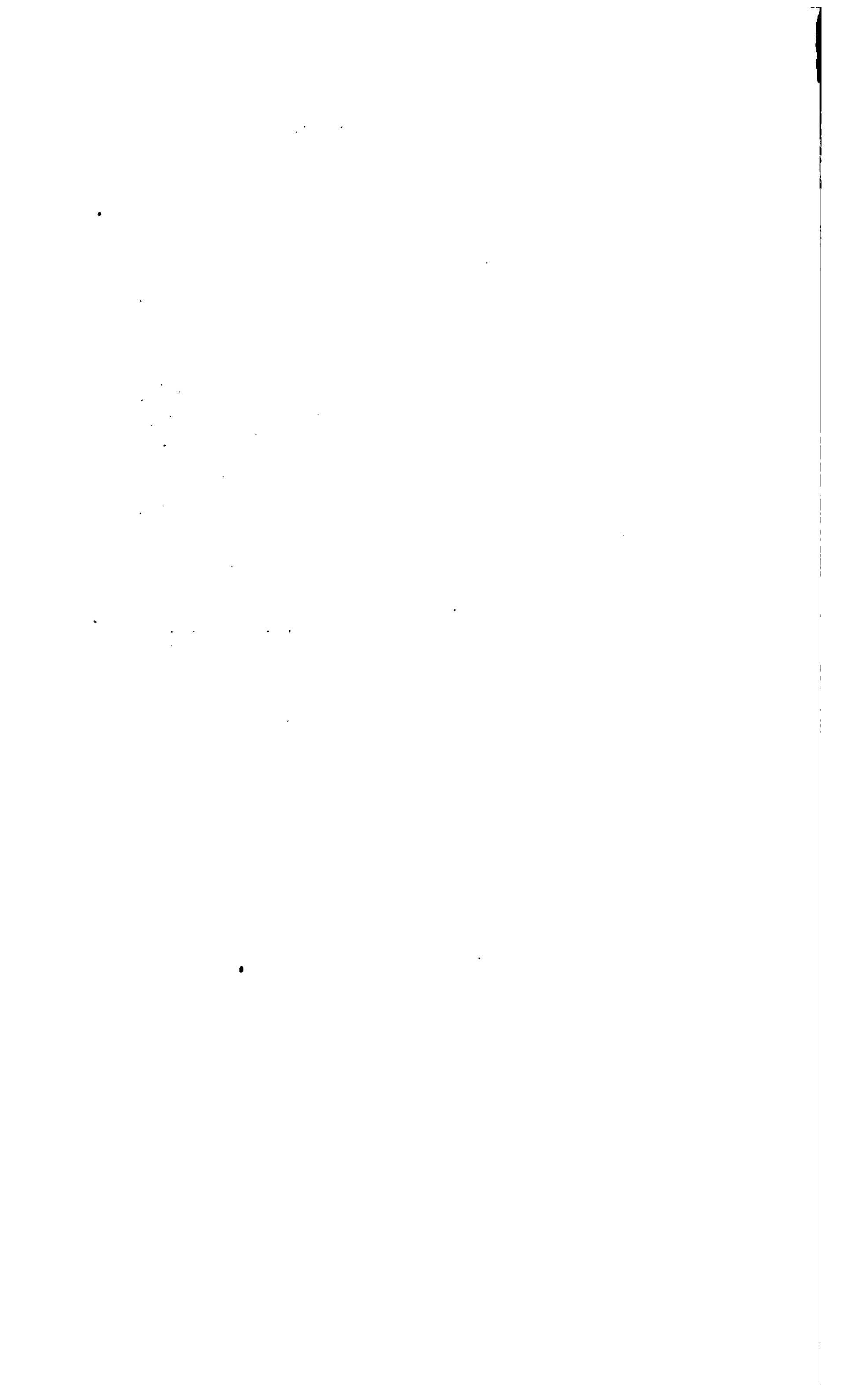
Young hat (die Sonne, pag. 173) die Vermuthung ausgesprochen, „dass die Flecke vielleicht Vertiefungen in der Photosphäre sind, die nicht unmittelbar durch den Druck von oben nach unten, sondern durch Verminderung des Drucks von unten nach oben, in Folge von Eruptionen, die in der Nähe stattfinden, erzeugt werden", und eine etwas künstliche Theorie der Flecke auf dieser Basis versucht.

Die Entstehung von Wirbeln durch Aufrollen der Diskontinuitätsflächen giebt unmittelbar die Druckverminderung im Sonneninnern, nach der Young sucht. Die Faye'sche Wirbel-

theorie der Sonnenflecke besitzt ihrer mannigfachen Vorzüge wegen noch zahlreiche Verbreitung, trotzdem, im Widerspruch mit der Erfahrung, das Fleckeninnere sämmtlich gleichsinnig mit der Sonne rotiren müsste, und die mechanische Erklärung des Zustandekommens dieser Wirbel nicht stichhaltig ist. Die hier skizzirte Theorie besitzt sämmtliche Vorzüge, welche die Theorie von Faye auszeichnen, ohne deren Nachtheile.

Da über den Flecken, falls sie durch Saugwirkung der im Innern der Sonne arbeitenden Wirbel entstehen, eine absteigende Strömung der die Photosphäre umhüllenden Gase eintreten muss, wie sie Oppolzer seiner Theorie der Sonnenflecke zu Grunde legt, so werden die mannigfachen Vorzüge der Oppolzer'schen Theorie auch der hier entwickelten zu Gute kommen. Die absteigende Strömung, von der Oppolzer ausgeht, findet hier ihre Erklärung.

Schichtenbildung, nach Raum und Zeit variable Rotationsgeschwindigkeiten und den Sonnenflecken analoge Gebilde sind nothwendige Folgeerscheinungen des durch Wärmeausstrahlung bewirkten Abkühlungsprocesses eines rotirenden, ganz oder nur in seinen äussern Schichten aus flüssiger Masse bestehenden Himmelskörpers.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 9. November 1901.

1. Herr Sebastian Finsterwalder hält im Anschluss an die Vorzeigung einiger Modelle, welche die Herstellung des neuen Ballons des Vereins für Luftschifffahrt betreffen, einen Vortrag: „Ueber die Zusammensetzung der Kugeloberfläche aus geodätischen Streifen von gleicher Maximalbreite und kleinster Gesammtlänge." Die Abhandlung wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Hermann Ebert macht eine Mittheilung: „Ueber die Spectra der neuen Sterne." Die Abhandlung wird ebenfalls anderweit publicirt werden.

3. Herr Walther v. Dyck legt eine Arbeit des Privatdozenten E. v. Weber: „Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene" vor.

4. Herr Ad. v. Baeyer spricht: „Ueber die basischen Eigenschaften des Sauerstoffs." Die Abhandlung wird an einem andern Orte veröffentlicht werden.



Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 9. November.*)

Obwohl die Lehre von den ebenen Kreisverwandtschaften schon durch Möbius zu einem gewissen Abschluss gebracht wurde und auch in der Folge stets zu den meist umworbenen Gebieten der neuern Geometrie gehört hat, so bietet sich doch bei tieferem Eindringen in diese Theorie eine erstaunliche Fülle unerledigter Probleme. In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die vorhandenen Lücken besonders nach zwei Richtungen hin auszufüllen.

Einer genaueren Untersuchung bedürftig erscheint vor allem die Frage, welche Gestalt die Theorie der Kreisverwandtschaften unter Heranziehung complexer Werte für beide unabhängige Variable annimmt. Bei der nahen Beziehung der Kreisverwandtschaften zu gewissen imaginären Gebilden (den beiden isotropen Geradenbündeln) wird in der That die principielle Berücksichtigung der complexen Punkte der Ebene besonders wichtig. Ihre volle Bedeutung erlangt diese Fragestellung freilich erst dann, wenn auch complexe Kreisverwandtschaften in Untersuchung gezogen werden; da wir uns aber fürs erste auf das Studium der reellen Kreisverwandtschaften beschränken wollen und jene allgemeineren Transformationen blos gelegentlich streifen, so möge das Folgende nur als eine Vorarbeit in der genannten Richtung betrachtet werden.

Eine zweite Art der Fragestellung, die übrigens mit der vorher genannten aufs Engste zusammenhängt, bietet sich dar,

wenn man die von C. Segre[1]) und H. Wiener[2]) entwickelte Theorie der binären Projektivitäten vermöge eines bekannten von Möbius[3]) herrührenden Uebertragungsprincips kreisgeometrisch zu deuten sucht. In beiden Theorien stehen die Begriffe „Vertauschbarkeit" und „Orthogonalität" zweier Kreisverwandtschaften im Vordergrund des Interesses, und das Entsprechen der Sätze ist daher vielfach ein wörtliches. Da es aber zwei getrennte Kategorien von Kreisverwandtschaften der Ebene gibt und jene beiden Begriffe einen ganz verschiedenen geometrischen Inhalt haben, je nachdem die betreffenden Verwandtschaften derselben Klasse angehören oder nicht, so liefert unsere Uebertragung einen grossen Reichtum an Beziehungen, die bei der Beschränkung auf das binäre Wertgebiet nicht hervortreten können.

Auch bei dieser Gruppe von Sätzen müssen wir uns auf die Darlegung einiger Hauptgesichtspunkte beschränken.

I. Elementares über Kreisverwandtschaften.

In diesem Paragraph stellen wir zunächst die wichtigsten Sätze über Kreisverwandtschaften zusammen und knüpfen daran einige Folgerungen (Nr. 12 ff.), die zum Teil über Bekanntes hinausgehen dürften.

1. Wenn von einer ebenen KV[4]) drei Paare entsprechender Punkte $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$ gegeben sind, so findet man nach Möbius[5]) in folgender Weise zu einem beliebigen Punkt A_4 den entsprechenden A_4': Man setze in der Ebene einen positiven Drehsinn fest; dann ist der $\sphericalangle (K, K')$ zwischen zwei gerichteten

---

[1]) Journ. f. Math. 100 p. 317—330 (1887); vgl. auch Memorie della R. Acc. delle scienze di Torino, serie 2ª vol. 38 (1888) p. 2—24.

[2]) Leipz. Ber. 43 (1891) p. 646, Einschub I; ferner: „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden". Hab.-Schrift, Darmstadt 1885.

[3]) Leipz. Ber. 4 (1852) p. 41—54 = Journ. f. Math. 52 (1856) = Werke II p. 189—204.

[4]) d. h. Kreisverwandtschaft.

[5]) Werke II p. 209 f.

Kurven K, K', die sich in einem Punkte P schneiden, eindeutig bestimmt als derjenige Winkel, um den man die gerichtete Tangente von K im Punkte P um diesen Punkt in der angenommenen positiven Richtung zu drehen hat, bis sie mit der gerichteten Tangente von K' im Punkte P zusammenfällt. Bezeichnet jetzt das Symbol PQR den durch die Punkte P, Q, R gehenden Kreis, genommen in der Richtung, die von P über Q nach R führt, so sind durch die Gleichungen

$$\sphericalangle (A_1 A_2 A_3,\ A_1 A_2 A_4) = \sphericalangle (A_1' A_2' A_3',\ A_1' A_2' A_4')$$
$$\sphericalangle (A_1 A_2 A_3,\ A_1 A_3 A_4) = \sphericalangle (A_1' A_2' A_3',\ A_1' A_3' A_4')$$

die Kreise $A_1' A_2' A_4'$, $A_1' A_3' A_4'$ und infolge dessen auch A_4' als Schnittpunkt derselben eindeutig bestimmt. Man erhält auf diesem Wege eine sog. d i r e k t e KV; eine indirekte KV ergibt sich, wenn man in den obigen Gleichungen die rechten Seiten mit -1 multiplicirt. Eine KV ist also eindeutig bestimmt durch 3 Paare entsprechender Punkte und die Angabe, ob sie direkt oder indirekt sein soll.

2. Ihren einfachsten analytischen Ausdruck finden die direkten bezw. indirekten KV bezw. durch die Formeln

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}; \tag{1}$$

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \tag{2}$$

worin $z, z', \bar{z}$ bezw. für $x + iy$, $x' + iy'$, $x - iy$ geschrieben wurde, ferner x, y und x', y' rechtwinklige cartesische Coordinaten der reellen Punkte der Ebene, endlich $abcd$ irgend welche complexe Constanten bedeuten, deren Determinante $ad - bc$ nicht null ist. Die complexe Zahl z bezeichnen wir als das Affix des reellen Punktes x, y.

Versteht man unter dem Doppelverhältnis von 4 Punkten $A_1 A_2 A_3 A_4$, deren Affixe bezw. $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ sind, die Grösse

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

so ergibt sich aus den obigen Transformationsformeln sogleich die fundamentale Eigenschaft, dass das Doppelverhältnis von 4 Punkten bei beliebiger KV invariant bleibt, bei beliebiger indirekter KV in seinen conjugirten Wert übergeht.

3. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten $ABCD$ ist dann und nur dann reell, wenn sie cyclisch (d. h. auf einem Kreise) liegen; es ist dann und nur dann von der Form $e^{i\beta}$ (β reell), wenn sie orthocyclisch liegen, d. h. wenn durch A, B ein Kreis geht, der C von D harmonisch trennt;[1]) dann geht auch durch C und D ein Kreis, der A von B harmonisch trennt.

Liegen 4 Punkte sowohl cyclisch als orthocyclisch, ohne dass zwei derselben zusammenfallen, d. h. ist ihr Doppelverhältnis gleich -1, so heissen sie harmonisch. Man erhält zu 3 Punkten A, B, C den vierten harmonischen D als zweiten Schnittpunkt des Kreises ABC mit dem durch C gehenden Kreis des Büschels, das A und B zu Grenzpunkten hat, also mittels linearer Construktionen.[2])

4. Aus Nr. 1 ergibt sich die euklidische Construktion einer durch 3 Paare definirten KV; eine kreisgeometrische, die nur lineare Operationen verlangt, folgt unmittelbar aus dem von H. Wiener[3]) herrührenden Satze, dass man für eine binäre Projektivität, von der 3 Paare gegeben sind, zu jedem Punkt den entsprechenden lediglich durch wiederholte Construktion vierter harmonischer Punkte finden kann. Diese Methode überträgt sich ohne weiteres auf jede direkte KV in der Ebene; hat man solcherweise für die KV, die durch die Paare

$$A_1 A_1', \; A_2 A_2', \; A_3 A_3' \tag{3}$$

[1]) Dies soll heissen, dass C und D hinsichtlich des Kreises invers sind.

[2]) Die linearen Construktionen der Kreisgeometrie sind 1) durch 3 Punkte einen Kreis zu legen; 2) von 2 Kreisen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, den zweiten Schnittpunkt zu bestimmen. Die quadratische Construktion ist die Lösung der Aufgabe, von 2 punktweise bekannten Kreisen die Schnittpunkte zu finden. Vgl. E. Study, Math. Ann. 49 p. 528.

[3]) Leipz. Ber. 43 (1891) p. 672.

definirt ist, zu A_4 den entsprechenden Punkt A'_4 linear construirt, so entspricht der zu A'_4 hinsichtlich des Kreises $A'_1 A'_2 A'_3$ inverse Punkt[1]) dem Punkte A_4 in der indirekten KV, die durch dieselben 3 Punktepaare (3) bestimmt wird.[2])

5. Wenn für eine KV, die durch (1) definirt ist, die Determinante $ad - bc = 0$ ist, und mit P und Q die Punkte mit den Affixen $\frac{a}{c}$ bezw. $\frac{-d}{c}$ bezeichnet werden, so ist jedes Punktepaar, das P als zweiten oder Q als ersten Punkt enthält, ein Paar entsprechender Punkte der Verwandtschaft. Diese heisst dann „singulär", die Punkte P, Q (die auch coincidiren können) ihre „singulären Punkte". Analoges gilt für die Formel (2); ein Unterschied zwischen direkter und indirekter KV findet bei verschwindender Determinante nicht mehr statt.

Singuläre Verwandtschaften bleiben im Folgenden, wo nichts anderes bemerkt wird, stets von der Betrachtung ausgeschlossen.

6. Jede direkte KV besitzt zwei verschiedene oder zusammenfallende reelle Fixpunkte, deren Affixe $z_1\, z_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(4) \qquad c z^2 + (d - a) z - b = 0$$

sind. Entsprechen sich in einer direkten KV irgend zwei Punkte involutorisch, so ist die Verwandtschaft selbst involutorisch; dazu ist die Bedingung $a + d = 0$ notwendig und hinreichend. Eine derartige KV werde eine „Möbiusinvolution"[3]) genannt; sie ist durch ihre Fixpunkte $M_1\, M_2$ eindeutig bestimmt und zwar derart, dass jedem Punkt A der zu ihm hinsichtlich $M_1\, M_2$ harmonische Punkt A' entspricht. Eine Möbiusinvolution ist ferner auch durch 2 Paare entsprechender

---

[1]) Die Construktion der Inversion an einem punktweise bekannten Kreis ist nach E. Study (Math. Ann. 49 p. 530) ebenfalls linear ausführbar.

[2]) Nach Nr. 26 ist diese indirekte zu jener direkten KV harmonisch.

[3]) A. F. Moebius, Leipz. Ber. 5 (1853) p. 176—190 = Werke II p. 219—236.

Punkte AA', BB' definirt; man findet dann zu jedem Punkte C folgendermassen[1]) den entsprechenden C': Ist D zu C hinsichtlich AA' harmonisch, ferner E zu C hinsichtlich BB', F zu D hinsichtlich BB', G zu E hinsichtlich AA' harmonisch, so ist C' zu C hinsichtlich F und G harmonisch. Einfacher ist folgende Construktion: Schneiden sich die Kreise ABC und $A'B'C$ zum zweitenmale in C_1, so schneiden sich die Kreise $AB'C_1$ und $BA'C_1$ zum zweitenmale in C'.

7. Diejenige Möbiusinvolution, die mit einer gegebenen direkten KV $\mathfrak{P}$ die Fixpunkte $M_1 M_2$ gemein hat, nennen wir die „Fixpunktsinvolution" von $\mathfrak{P}$; sind A', A_0 die Punkte, die einem gegebenen Punkte A in $\mathfrak{P}$ bezw. in der inversen Transformation $\mathfrak{P}^{-1}$ entsprechen, und ist B zu A hinsichtlich A', A_0 harmonisch, so ist AB ein Paar der Fixpunktsinvolution.[2]) Diese Involution ist also linear construirbar, auch wenn die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ nicht bekannt sind.

8. Sind AA' zwei entsprechende Punkte der direkten KV $\mathfrak{P}$ mit den Fixpunkten $M_1 M_2$, so ist das Doppelverhältnis $(A A' M_1 M_2)$ constant, wie auch das Paar AA' gewählt sein mag; diese complexe Constante heisst die „Invariante" von $\mathfrak{P}$. Sind $z_1 z_2$ die Affixe von $M_1 M_2$, so kann die Gleichung (1) in der Form:

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2} = \varkappa \frac{z-z_1}{z-z_2} \quad (5)$$ [3])

geschrieben werden, worin $1/\varkappa$ die Invariante von $\mathfrak{P}$ bedeutet; dabei hat $\varkappa$ den Wert:

$$\varkappa = \frac{1}{4}\left(a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)^2, \quad (6)$$

wenn, wie in der Folge immer, $ad - bc = 1$ angenommen wird. Die Invariante einer Möbiusinvolution ist gleich -1. Genügen die direkten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ der Beziehung:

---

[1]) H. Wiener, Leipz. Ber. 43 (1891) p. 670.

[2]) H. Schroeter, Journ. f. Math. 77 p. 120 f. (1874); H. Wiener a. a. O.

[3]) Vgl. auch Klein-Fricke, Vorl. über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. I p. 163 ff. Leipzig 1890.

$$\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}'^{-1} = \mathfrak{Q},$$ [1])

so sagen wir, „$\mathfrak{P}$ ist durch die direkte KV $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}$ äquivalent“ oder „$\mathfrak{P}'$ transformirt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$“; dann geht jedes Paar AA' von $\mathfrak{P}$ durch die Transformation $\mathfrak{P}'$ in ein Paar BB' entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ über, was wir mit H. Wiener so ausdrücken:

$$AA'\{\mathfrak{P}'\}BB'.$$

Aus der Thatsache, dass eine Transformation $\mathfrak{P}'$, die $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ transformirt, auch die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ in die von $\mathfrak{Q}$ überführt, schliesst man jetzt sofort: Damit zwei direkte KV durch eine direkte (bezw. indirekte) KV äquivalent seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Invarianten gleich oder reciprok (bezw. conjugirt oder conjugirt-reciprok) seien.

Erst in Nr. 34 werden wir für den Fall, dass diese Bedingung erfüllt ist, alle Transformationen bestimmen, die diese Ueberführung leisten.

9. Eine indirekte KV (2) ist dann und nur dann involutorisch, wenn sie eine Inversion an einem reellen[2]) Kreis darstellt, d. h. wenn ihre Coefficienten der Bedingung

$$\frac{a}{c} = \frac{-\bar{d}}{\bar{c}};\quad \frac{b}{c}\ \text{reell}$$

genügen. Der betr. reelle Kreis ist dann durch die Gleichung

$$c z \bar{z} + d z - a \bar{z} - b = 0 \tag{7}$$

dargestellt.

Da eine gerade (bezw. ungerade) Zahl indirekter KV nacheinander ausgeübt stets eine direkte (bezw. indirekte) KV liefert, so ist das Produkt zweier Inversionen J_1 und J_2 eine

---

[1]) Unter dem Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ist die Transformation zu verstehen, die erhalten wird, wenn man zuerst $\mathfrak{P}'$, dann $\mathfrak{P}$ ausführt.

[2]) Nach F. Klein nennen wir einen Kreis reell oder complex, je nachdem die Coefficienten seiner cartesischen Gleichung alle reell sind oder nicht; im ersten Fall heisst der Kreis „einteilig“ oder „nullteilig“, je nachdem er reelle Punkte enthält oder nicht.

direkte KV 𝔓, und zwar eine sog. „zweispiegelige“ Verwandtschaft.[1]) Schneiden sich die beiden reellen Direktrixkreise der Inversionen $J_1 J_2$ (wir nennen sie kurz die Kreise $J_1 J_2$) in 2 reellen Punkten $M_1 M_2$, so sind diese die Fixpunkte von 𝔓, und diese KV wird als „elliptische Transformation“[2]) bezeichnet; im entgegengesetzten Fall gibt es 2 reelle Punkte $M_1 M_2$, die hinsichtlich J_1 und J_2 gleichzeitig invers sind; diese sind die Fixpunkte der Kreisverwandtschaft 𝔓, die man jetzt eine „hyperbolische Transformation“ nennt.

Die Kreise des Büschels (J_1, J_2) sind die Niveaukreise[3]) von 𝔓, d. h. sie gehen vermöge 𝔓 ineinander über; die Kreise des dazu adjungirten[4]) Büschels nennt man die Bahnkreise, da sie (und nur sie, falls 𝔓 keine Involution ist) vermöge 𝔓 einzeln invariant bleiben. Umgekehrt ist jede direkte KV, die einen einteiligen Kreis K festlässt, eine zweispiegelige KV die K als Bahnkreis besitzt.

10. Da jedes Paar einer hyperbolischen KV zu den Fixpunkten cyclisch, jedes Paar einer elliptischen KV zu den Fixpunkten orthocyclisch liegt, also die Zahl $\varkappa$ (Nr. 8) im ersten Fall reell ist, im zweiten den absoluten Betrag 1 besitzt, so schliesst man leicht: die Transformation (1) ist, wenn $ad - bc = 1$ angenommen wird, dann und nur dann elliptisch, wenn $a + d$ reell, $(a + d)^2 < 4$ ist; sie ist dann und nur dann hyperbolisch, wenn entweder $a + d$ reell, $(a + d)^2 > 4$ oder wenn $a + d$ rein imaginär ist. Eine direkte KV mit zusammenfallenden Fixpunkten ist durch die Bedingung $(a + d)^2 = 4$ charakterisirt; eine solche ist daher stets zweispiegelig; ihre Bahn- und Niveaukreise bilden je ein Berührungsbüschel.

---

[1]) Unter einer Spiegelung verstehen wir hier stets nur eine Inversion, nicht auch eine Möbiusinvolution, im Gegensatz zu der Bezeichnungsweise des Herrn Wiener, wonach jede direkte KV, als Produkt zweier Involutionen (Nr. 36), zweispiegelig heisst.

[2]) Klein-Fricke a. a. O.

[3]) Klein-Fricke a. a. O.

[4]) so sagen wir statt „conjugirt“, da wir dieses Wort zu häufig in anderem Sinn gebrauchen müssen.

11. Aus der Thatsache, dass das Produkt dreier Inversionen dann und nur dann eine Inversion liefert, wenn die 3 Direktricen, oder wie wir kurz sagen wollen, die 3 Inversionen demselben Büschel angehören,[1]) schliesst man leicht, dass in der Gleichung

$$\mathfrak{P} = J_1 J_2 \text{ oder } J_1 \mathfrak{P} = J_2, \quad \mathfrak{P} J_2 = J_1$$

jeder der Faktoren J_1, J_2 innerhalb des Büschels (J_1, J_2) beliebig gewählt werden kann, worauf dann der andere eindeutig bestimmt ist; mit anderen Worten: Ergibt eine zweispiegelige KV mit einer Inversion J links oder rechts multiplicirt eine Inversion, so gehört J dem Büschel der Niveaukreise an und umgekehrt.

12. Damit die Inversionen J_1 und J_2 vertauschbar seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Direktricen sich rechtwinklig schneiden; ihr Produkt liefert in diesem Falle (und nur in diesem) eine Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$; eine solche kann sowohl als elliptische wie als hyperbolische KV aufgefasst werden. Jeder Kreis, der die Fixpunkte derselben enthält oder harmonisch trennt, bleibt bei $\mathfrak{J}$ invariant, so dass der Unterschied zwischen Bahn- und Niveaukreisen verschwindet; wir wollen beide Kreissysteme als Bahnkreise von $\mathfrak{J}$ bezeichnen.

Es möge hier beiläufig die Aufgabe erledigt werden, alle Möbiusinvolutionen $\mathfrak{J}$ zu bestimmen, die 2 gegebene einteilige Kreise K, K' ineinander überführen. Sind $M_1 M_2$ die Fixpunkte einer solchen Transformation $\mathfrak{J}$ und $\varkappa$ der durch $M_1 M_2$ gehende zu K orthogonale einteilige Kreis, so steht $\varkappa$ auch auf K' senkrecht, da ja $\mathfrak{J}$ den Kreis K in K', den Kreis $\varkappa$ in sich überführt. Bezeichnet man also mit $\{\varkappa\}$ die Inversion an dem Kreise $\varkappa$, so ist $\mathfrak{J}$ gleich dem Produkte $\{\varkappa\}\,\{\lambda\}$, wo λ den in $M_1 M_2$ auf $\varkappa$ senkrecht stehenden einteiligen Kreis bezeichnet. Da nun die Inversion $\{\varkappa\}$ die Kreise K, K' invariant lässt, so muss $\{\lambda\}$ den Kreis K in K' transformiren, d. h. λ ist ein einteiliger Potenzkreis der beiden gegebenen. Die

[1]) H. Wiener, Leipz. Ber. 43 p. 669 (1891).

Möbiusinvolutionen, die die gegebenen Kreise K, K' ineinander überführen, haben also die Form $\{\varkappa\}$ $\{\lambda\}$, wo $\varkappa$ einen beliebigen einteiligen Kreis des zu dem Büschel (K, K') adjungirten Büschels, λ einen einteiligen Potenzkreis von K und K' bedeutet. Gibt es zwei solche Potenzkreise λ, λ', d. h. schneiden sich K und K' reell, so gibt es auch 2 getrennte Scharen von Möbiusinvolutionen der verlangten Beschaffenheit; ihre Fixpunktepaare liegen bezw. auf λ und λ' harmonisch zu den Schnittpunkten von K und K'. Gibt es nur einen einteiligen Potenzkreis λ, so gibt es auch nur eine Schar von Möbiusinvolutionen, deren Fixpunkte auf λ harmonisch zu den Grenzpunkten des Büschels (K, K') gelegen sind.

13. Die Fixpunkte einer Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$, die durch 2 Paare entsprechender Punkte AA', BB' definirt ist, werden folgendermassen construirt:

Man lege durch A und A' einen beliebigen Kreis K, und construire nach Nr. 6 den ihm entsprechenden Kreis K', sowie die beiden Potenzkreise p, p' von K und K', was ausser linearen nur eine quadratische Construktion[1]) erfordert; dann sind nach der vor. Nr. p, p' Bahnkreise von $\mathfrak{J}$. Legt man jetzt durch B und B' den zu p orthogonalen Kreis q', ferner den zu p' orthogonalen Kreis q, so schneiden sich entweder p und q oder p' und q' in 2 reellen Punkten, den gesuchten Fixpunkten; die Construktion erfordert sonach 2 quadratische Operationen.

14. Um die Fixpunkte einer beliebigen direkten KV zu bestimmen, construiren wir zuerst ihre Fixpunktsinvolution (Nr. 7), dann deren Fixpunkte nach dem soeben geschilderten Verfahren. Bei einer zweispiegeligen nichtinvolutorischen KV $\mathfrak{P}$ erfordert die Bestimmung der Fixpunkte $M_1 M_2$ ausser linearen Construktionen nur eine quadratische; denn wählt man die Punkte AB beliebig, und ermittelt $A' A'' B' B''$ nach der Vorschrift:

$$A\,\{\mathfrak{P}\}\,A'\,\{\mathfrak{P}\}\,A''; \; B\,\{\mathfrak{P}\}\,B'\,\{\mathfrak{P}\}\,B'',$$

[1]) E. Study, Math. Ann. 49 p. 532.

so schneiden sich entweder die Kreise $AA'A''$ und $BB'B''$ in $M_1 M_2$, oder das durch sie bestimmte Büschel hat $M_1 M_2$ zu Grenzpunkten.

Kennt man von der direkten KV $\mathfrak{P}$ den einen Fixpunkt M_1, so ist der zweite als vierter harmonischer Punkt zu M_1 hinsichtlich eines beliebigen Paars der Fixpunktsinvolution linear construirbar.

15. Wird eine indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$, die keine Inversion ist, durch die Formel (2) dargestellt, worin wieder $ad - bc = 1$ gesetzt ist, so hat die direkte $KV\mathfrak{Q}^2$ die Form:[1])

$$z' = \frac{(a\bar{a} + b\bar{c})z + (a\bar{b} + b\bar{d})}{(c\bar{a} + d\bar{c})z + (c\bar{b} + d\bar{d})},$$

ist also nach Nr. 10, da ihre Determinante auch gleich 1 wird, zweispiegelig. Ihre Fixpunkte bleiben entweder bei $\mathfrak{Q}$ ebenfalls fest oder sie vertauschen sich gegenseitig; im ersten Fall bezeichnen wir sie als Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ selbst als „hyperbolisch"; im zweiten Fall als „Gegenpunkte" von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ selbst als „elliptisch"; ist $\mathfrak{Q}^2$ parabolisch, so nennen wir auch $\mathfrak{Q}$ eine parabolische Verwandtschaft.

Ist die indirekte KV $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, und bedeuten $M_1 M_2$ ihre Fixpunkte, ferner J die Inversion mit dem Centrum M_1, die den Punkt M_2 mit dem auf der Geraden $M_1 M_2$ zu wählenden Coordinatenanfangspunkt O vertauscht, so hat die indirekte KV $J\mathfrak{Q}J$ augenscheinlich die Form $z' = a\bar{z}$, wo a eine complexe Constante bedeutet, lässt also, wie man sofort durch Rechnung bestätigt, zwei senkrechte durch O gehende Gerade und sonst keine reellen Kreise oder Geraden invariant. Ist ferner $\mathfrak{Q}$ elliptisch, und bedeuten $M_1 M_2$ ihre Gegenpunkte, ferner J dieselbe Inversion wie vorhin, so hat die Kreisverwandtschaft $J\mathfrak{Q}J$ die Form $z' = a/\bar{z}$, lässt also einen einteiligen Kreis mit dem Centrum O und den zu ihm concentrischen und orthogonalen nullteiligen Kreis, ausserdem aber keine reellen Kreise oder Geraden stehen; daraus folgt:

[1]) Klein-Fricke a. a. O. p. 198 f.

Jede hyperbolische indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ besitzt zwei und nur zwei orthogonale einteilige Fixkreise, die sich in den Fixpunkten von $\mathfrak{Q}$ schneiden; jede elliptische indirekte $KV\mathfrak{Q}$ einen einteiligen und einen dazu orthogonalen nullteiligen Fixkreis, und die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ sind die Grenzpunkte des durch diese 2 Kreise definirten Büschels. Die Kreise des letzteren werden durch $\mathfrak{Q}$ involutorisch vertauscht, so zwar, dass die Fixkreise die Potenzkreise eines jeden Paars entsprechender Kreise des Büschels sind; auch die Kreise des adjungirten Büschels werden durch $\mathfrak{Q}$ unter sich transformirt, doch so, dass ausser den im hyperbolischen Falle vorhandenen reellen Nullkreisen kein reeller Kreis des Büschels stehen bleibt. Auch ersieht man jetzt sofort, dass $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch oder elliptisch ist, je nachdem dies für die zweispiegelige Verwandtschaft $\mathfrak{Q}^2$ zutrifft, je nachdem also das Quadrat der reellen Zahl

$$a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + c\bar{b}$$

grösser oder kleiner als 4 ist.[1]) Für eine parabolische KV ist der eine Fixkreis einteilig, der andere ein auf ihm liegender Punktkreis.

Die Ermittelung der Fix- bezw. Gegenpunkte einer durch 3 Paare gegebenen indirekten KV verlangt nach dem Vorigen ausser linearen Construktionen nur eine quadratische, dasselbe gilt für die Aufsuchung der Fixkreise, die mit den Potenzkreisen irgend zweier in $\mathfrak{Q}$ sich entsprechenden Bahnkreise von $\mathfrak{Q}^2$ identisch sind. Nur wenn $\mathfrak{Q}^2$ eine Möbiusinvolution ist, werden für die Ermittelung der Gegenpunkte zwei quadratische Construktionen nötig.

16. Ist $\mathfrak{Q}$ eine gegebene indirekte KV, und die Inversion J so gewählt, dass die direkte KV:

$$\mathfrak{P} = J\mathfrak{Q}$$

zweispiegelig wird, so muss es in dem Bahnkreisbüschel von $\mathfrak{P}$ einen reellen Kreis geben, der zu dem Kreis J orthogonal ist.

[1]) Klein-Fricke a. a. O.

also sowohl vermöge J als $\mathfrak{P}$, mithin auch durch $\mathfrak{Q}$ in sich übergeführt wird, d. h. der Kreis J muss zu einem der Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ orthogonal sein. Umgekehrt, ist dies der Fall, so lässt $J\mathfrak{Q}$ jenen Fixkreis invariant, ist also zweispiegelig; daraus folgt: Jede indirekte KV kann auf ∞^3 Arten als Produkt dreier Inversionen

$$\mathfrak{Q} = J J_1 J_2$$

dargestellt werden; J ist dabei ein beliebiger unter den ∞^2 reellen Kreisen, die zu dem einen oder anderen der beiden Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ orthogonal sind. Hat man J gewählt, so ist das Büschel (J_1, J_2) bestimmt und J_1 kann innerhalb desselben noch auf ∞^1 Arten angenommen werden, worauf J_2 eindeutig festgelegt ist.

Offenbar kann man jeden der 3 obigen Faktoren unter geeigneter Modification der übrigen an eine beliebige Stelle bringen; daraus folgt die Gleichberechtigung derselben, sowie die Thatsache, dass mit $J\mathfrak{Q}$ zugleich $\mathfrak{Q}J$ zweispiegelig ist, was übrigens auch unmittelbar aus der Beziehung

$$\mathfrak{Q}J = \mathfrak{Q}(J\mathfrak{Q})\mathfrak{Q}^{-1}$$

hervorgeht. Ist der Kreis J zu beiden Fixkreisen von $\mathfrak{Q}$ orthogonal, dann und nur dann ist $J\mathfrak{Q}$ und ebenso $\mathfrak{Q}J$ eine Möbiusinvolution, und $\mathfrak{Q}$ lässt sich also auf je ∞^1 Arten in jeder der Formen $J\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}J$ schreiben. Beiläufig folgt auch noch, dass jede direkte KV als Produkt von 4 Inversionen darstellbar ist, von denen eine ganz beliebig angenommen werden kann, ferner dass, wenn $\mathfrak{P}$ eine zweispiegelige KV, J die Inversion an einem ihrer Bahnkreise bedeutet, das Produkt $J\mathfrak{P}$ eine indirekte KV liefert, die jenen Bahnkreis und den dazu orthogonalen des Bahnkreisbüschels zu Fixkreisen hat.

Bedeutet J die Inversion an einem der Fixkreise von $\mathfrak{Q}$, so gilt die Beziehung $\mathfrak{Q}J = J\mathfrak{Q}$, d. h. J ist mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbar; auch besitzen nur die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ diese Eigenschaft.

17. Jede hyperbolische indirekte KV Ω kann in der Form

$$\varkappa \frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}_1}{\bar{z} - \bar{\zeta}_2},$$

jede elliptische in der Gestalt

$$\varkappa \frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}_2}{\bar{z} - \bar{\zeta}_1}$$

geschrieben werden, wo $\varkappa$ eine complexe Constante und $\zeta_1 \zeta_2$ das einemal die Fix-, das andremal die Gegenpunkte bedeuten. Daraus folgt leicht:

Sind $M_1 M_2$ die Fixpunkte, $A A'$ ein beliebiges Paar entsprechender Punkte einer indirekten hyperbolischen KV, so hat das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 A A')$ den constanten absoluten Betrag $|\varkappa|$. Sind $M_1 M_2$ die Gegenpunkte, $A A'$ ein beliebiges Paar einer indirekten elliptischen KV, so hat jenes Doppelverhältnis eine constante Amplitude.[1])

Im hyperbolischen Falle ist die Zahl $|\varkappa|$ das Doppelverhältnis der binären Projektivität, welche die KV auf dem einen ihrer einteiligen Fixkreise definirt; auf dem anderen ist dies Doppelverhältnis dann $= -|\varkappa|$. Im elliptischen Falle ist ampl. $\varkappa$ das Doppelverhältnis, welches irgend zwei entsprechende auf dem einteiligen Fixkreis liegende Punkte mit den Gegenpunkten bilden.

Da eine indirekte KV durch Angabe eines Fixkreises und der darauf herrschenden Projektivität eindeutig bestimmt ist, so schliesst man, dass die Zahl $|\varkappa|$ (bezw. ampl. $\varkappa$) die einzige Invariante einer hyperbolischen (bezw. elliptischen) indirekten KV gegenüber beliebigen Kreisverwandtschaften ist, d. h. zwei indirekte KV sind dann und nur dann durch eine KV ineinander transformirbar, wenn ihre Invarianten übereinstimmen oder reziproke Werte haben.

---

[1]) Es ist ampl. $z = \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$, wenn $z = \varrho e^{i\varphi}$.

18. Sind $ABCD$ vier gegebene Punkte, so ist der Ort aller Punkte D' derart, dass

$$|(ABCD)| = |(ABCD')|$$

der durch D gehende Kreis, der A von B harmonisch trennt; hieraus und aus dem oben Gesagten, sowie aus Nr. 8 folgert man leicht:

Sind AA', BB', M_1 gegebene Punkte, ferner N_1 der zweite Fixpunkt derjenigen direkten KV, die M_1 zum ersten Fixpunkt hat und A in A', B in B' verwandelt, und legt man durch N_1 die beiden Kreise, die A von A' und B von B' harmonisch trennen, so ist der zweite Schnittpunkt M_2 dieser Kreise der zweite Fixpunkt derjenigen indirekten hyperbolischen KV, die den ersten Fixpunkt M_1 und die Paare AA', BB' besitzt.

Da, wie wir später sehen werden, M_1 und N_1 sich in derjenigen Möbiusinvolution entsprechen, die A mit B' und B mit A' vertauscht, so folgt aus dem eben Gesagten eine einfache lineare Construktion des zweiten Fixpunkts einer indirekten KV, von der der eine Fixpunkt und 2 Paare gegeben sind. Aus der Bemerkung ferner, dass die genannten Punkte $M_1 M_2$ auch die Gegenpunkte einer indirekten KV sind, die A in B' und B in A' überführt, fliesst eine einfache Construktion der indirekten KV, die zwei gegebene Paare entsprechender Punkte und einen vorgeschriebenen Gegenpunkt besitzt.

II. Punktfelder und complexe Kreise.

19. Die beiden Büschel von Minimalgeraden der Ebene sind definirt durch die Gleichungen

$$x + iy = \text{const. bezw. } x - iy = \text{const.}$$

Jede Minimalgerade enthält einen und nur einen reellen Punkt. Ist nun ein beliebiger complexer Punkt der Ebene gegeben, und bedeuten A, B die reellen Punkte der durch ihn gehenden Minimalgeraden des ersten bezw. zweiten Systems, so nennen wir mit É. Laguerre[1]) die Punkte AB die „reellen Repräsentanten" jenes complexen Punktes und bezeichnen den

[1]) Bull. Soc. Mat. 1 p. 241—248 (1873) und an vielen andern Orten.

letzteren mit $[AB]$; offenbar ist $[BA]$ der zu $[AB]$ conjugirt imaginäre Punkt, $[AA]$ der reelle Punkt A. Die Repräsentanten eines complexen Punktes mit den cartesischen Coordinaten ξ, η haben darnach in der complexen Zahlenebene die Affixe $\xi + i\eta$ und $\overline{\xi - i\eta}$;[1]) umgekehrt repräsentiren zwei reelle Punkte mit den Affixen z_1 und z_2 den complexen Punkt mit den cartesischen Coordinaten

$$\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_2), \quad \frac{-i}{2}(z_1 - \bar{z}_2).$$

20. Die allgemeinste direkte complexe Kreisverwandtschaft wird definirt durch die Formeln:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \tilde{z}' = \frac{a\tilde{z} + \beta}{\gamma\tilde{z} + \delta}, \tag{1}$$

die allgemeinste indirekte complexe KV durch die Gleichungen

$$z' = \frac{a\tilde{z} + b}{c\tilde{z} + d}, \quad \tilde{z}' = \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{2}$$

worin $z, z'\ \tilde{z}, \tilde{z}'$ bezw. die Bedeutung

$$x + iy, \; x' + iy', \; x - iy, \; x' - iy'$$

haben und die x, y, x', y' nunmehr auch beliebige complexe Werte annehmen sollen; eine direkte (indirekte) KV verwandelt also jede Minimalgerade in eine Minimalgerade desselben (des andern) Systems.

Setzt man in (1) bezw. (2) für a, β, γ, δ die Werte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, so erhält man die allgemeinste direkte bezw. indirekte reelle KV in einer Form, die sich auch auf die complexen Punkte der Ebene erstreckt; man erkennt jetzt unmittelbar folgendes: Transformirt eine reelle KV den reellen Punkt A in A', B in B', so verwandelt sie den complexen Punkt $[AB]$ in $[A'B']$ oder $[B'A']$, je nachdem sie direkt oder indirekt ist.

Den complexen Punkt $[A'B']$, der vermöge einer complexen KV dem Punkt $[AB]$ entspricht, findet man folgender-

[1]) $\bar{a}$ bedeutet den conj. imaginären Wert zu a.

massen: Ist die KV direkt, und bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ die direkten reellen Verwandtschaften, die bezw. durch die beiden Formeln (1) definirt werden, wenn man $\tilde{z}$, $\tilde{z}'$ durch $\bar{z}$, $\bar{z}'$ ersetzt, so gilt die Beziehung

$$A\{\mathfrak{P}\}A'; \; B\{\mathfrak{P}'\}B'.$$

Ist die KV dagegen indirekt, und bezeichnen jetzt $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ die beiden indirekten reellen KV (2), so hat man:

$$B\{\mathfrak{P}\}A', \; A\{\mathfrak{P}'\}B'.$$

21. Ist eine indirekte reelle Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \tag{3}$$

vorgelegt, so betrachten wir jedes Paar entsprechender Punkte derselben als die Repräsentanten eines complexen Punktes x, y; der Ort dieser ∞^2 complexen Punkte[1]) ergibt sich durch Elimination von z, z' aus der Gleichung (3) und den folgenden:

$$x + iy = z, \; x - iy = z'$$

in der Form:

$$\bar{c}(x^2 + y^2) + \bar{d}(x - iy) - \bar{a}(x + iy) - \bar{b} = 0, \tag{4}$$

ist also ein complexer Kreis,[2]) den wir einfach den „Kreis $\mathfrak{Q}$" nennen wollen; er ist dann und nur dann reell, wenn $\mathfrak{Q}$ eine Inversion bedeutet; sein conjugirt complexer ist der Kreis $\mathfrak{Q}^{-1}$. Natürlich entspricht auch jedem complexen Kreis eine ganz bestimmte indirekte reelle KV.

22. Wollen wir für die direkten reellen KV eine analoge Interpretation gewinnen, so sind wir zur Heranziehung eines neuen geometrischen Begriffs[3]) genötigt. Die ∞^2 complexen

---

[1]) Die Bezeichnung ∞^ν bezieht sich im Folgenden stets auf die Anzahl ν der wesentlichen reellen Parameter eines Gebildes; es gibt also ∞^4 complexe Punkte der Ebene, ∞^6 reelle, ∞^{12} complexe KV etc.

[2]) Vgl. auch É. Laguerre a. a. O. p. 247.

[3]) Analoge Begriffsbildungen für die Zwecke der projektiven Geometrie finden sich schon bei C. Juel, Diss. Kopenhagen 1885, Acta Math. 14 p. 1—30, und C. Segre, Atti Acc. Torino t. 25 p. 276, 430; t. 26 p. 35, 592 (1889—91).

Punkte nämlich, die durch die Paare einer direkten reellen *KV* repräsentirt werden, genügen der Gleichung:

$$\overline{x - iy} = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d}. \tag{5}$$

Sowie man nun die ∞^2 complexen Punkte, die durch eine Gleichung der Form

$$f(x, y) = 0 \text{ oder } \varphi(x + iy, x - iy) = 0$$

definirt werden, als eine „Curve" bezeichnet, ebenso nennen wir den Inbegriff aller complexen Punkte x, y, die einer Relation der Form

$$\varphi(x + iy, \overline{x - iy}) = 0$$

genügen, ein „Punktfeld", insbesondere ein circulares, wenn diese Gleichung die Form (5) hat; doch wollen wir der Kürze halber das Wort Punktfeld stets in diesem speziellen Sinne gebrauchen.

Jeder direkten reellen *KV* entspricht so ein ganz bestimmtes Punktfeld, und umgekehrt; der identischen Transformation insbesondere ist das Feld der reellen Punkte

$$\overline{x - iy} = x + iy$$

zugeordnet. Da das reelle Punktfeld genau ∞^6 Kreisverwandtschaften gestattet, nämlich alle reellen, so können die Punktfelder der Ebene, wie man leicht erkennt, auch definirt werden als der Inbegriff der ∞^6 Lagen, die das reelle Punktfeld bei beliebiger complexer *KV* annimmt.

Das Doppelverhältnis von 4 reellen Punkten der Ebene ist gleich demjenigen der 4 von ihnen auslaufenden Minimalstrahlen des ersten Systems, und gleich dem conjugirten Wert des Doppelverhältnisses der 4 durch sie gehenden Minimalgeraden des zweiten Systems. Demnach lässt sich die Eigenart der Punktfelder und complexen Kreise auch so aussprechen: Bezieht man die beiden Büschel von Minimalgeraden projektiv aufeinander, d. h. so, dass je 4 Strahlen des ersten Büschels dasselbe Doppelverhältnis haben wie die entsprechenden des

zweiten, so schneiden sich entsprechende Strahlen, wie bekannt, in den Punkten eines complexen Kreises; bezieht man aber die zwei Büschel „conjugirt-projektiv", nämlich so, dass die Doppelverhältnisse entsprechender Quodrupel conjugirte Werte haben, so ist das Erzeugnis ein Punktfeld. Bemerken wir noch, dass das Doppelverhältnis von 4 Punkten $[A_i B_i]$ eines complexen Kreises gleich dem Doppelverhältnis der 4 reellen Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$ oder gleich dem conjugirten Wert des Doppelverhältnisses $(B_1 B_2 B_3 B_4)$ zu setzen ist.

Ein Punktfeld oder ein complexer Kreis artet dann und nur dann in ein Paar von Minimalgeraden aus, wenn die zugehörige KV singulär ist; die singulären Punkte der letzteren sind die reellen Punkte jener beiden Minimalgeraden.

23. Unter der „Inversion an dem complexen Kreis $\mathfrak{Q}$" verstehen wir diejenige involutorische indirekte KV, die alle Punkte des Kreises $\mathfrak{Q}$ einzeln fest lässt; sie hat die Form

$$z' = \frac{-\bar{d}\tilde{z} + \bar{b}}{\bar{c}\tilde{z} - \bar{a}}; \quad \tilde{z}' = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

wenn $\mathfrak{Q}$ selbst durch (3) definirt ist. Der dem Punkt $[AB]$ hinsichtlich des Kreises $\mathfrak{Q}$ inverse Punkt $[A'B']$ wird also nach der Vorschrift

$$A\{\mathfrak{Q}\}B'; \quad A'\{\mathfrak{Q}\}B$$

gefunden; einem reellen Punkte A entspricht demnach derjenige complexe, dessen Repräsentanten dem A rückwärts bezw. vorwärts entsprechen, mit andern Worten: das reelle Punktfeld verwandelt sich durch Spiegelung an dem complexen Kreise $\mathfrak{Q}$ in das Punktfeld $\mathfrak{Q}^2$. Ist $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, so bleiben bei der Inversion an $\mathfrak{Q}$ zwei reelle Punkte fest, nämlich die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$; ist $\mathfrak{Q}$ elliptisch, so gibt es zwei reelle Punkte, die sich vermöge jener Inversion entsprechen: die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$.

Sind die Punkte M, N' durch die Angaben

$$\infty\{\mathfrak{Q}\}N', \quad M\{\mathfrak{Q}\}\infty$$

definirt, so ist der Punkt $[MN']$ der inverse zu dem Punkte ∞, d. h. also das Centrum des Kreises $\mathfrak{Q}$, und man bestätigt leicht,[1]) dass sein Abstand von allen Punkten des Kreises constant ist.

Von der „Spiegelung an einem Punktfeld", die der Inversion an einem complexen Kreise analog ist, soll in § IV die Rede sein.

24. Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei Punktfelder oder zwei complexe Kreise, also die Kreisverwandtschaften

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}^{-1}; \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{P}$$

beide direkt, bezeichnen wir ferner mit AB bezw. $A'B'$ die Fixpunkte von $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$, so hat man

$$(6) \qquad AB\,\{\mathfrak{P}\}\,A'B'; \quad AB\,\{\mathfrak{Q}\}\,A'B',$$

und es sind AA' und BB' die einzigen Paare entsprechender Punkte, die den beiden gegebenen Verwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ gemeinsam sind, also $[AA']$ und $[BB']$ die Schnittpunkte der gegebenen Punktfelder bezw. Kreise. Sind ferner $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei Punktfelder, so entspricht dem Punkte $[AB]$ bezw. $[BA]$ sowohl in $\mathfrak{P}$ als auch in $\mathfrak{Q}$ der Punkt $[A'B']$ bezw. $[B'A']$ und es sind dies die einzigen complexen Punkte, die durch $\mathfrak{P}$ auf gleiche Art transformirt werden wie durch $\mathfrak{Q}$. Bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ complexe Kreise, so gilt analoges, nur dass jetzt $[AB]$ sowohl durch $\mathfrak{P}$ als durch $\mathfrak{Q}$ in $[B'A']$ und ebenso $[BA]$ in $[A'B']$ übergeführt wird.

Ist $\mathfrak{R}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{R}'$ parabolisch, also A mit B und A' mit B' identisch, so sagen wir, die Punktfelder bezw. Kreise $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ berühren sich im Punkte $[AA']$.

25. Es bedeute jetzt $\mathfrak{P}$ ein Punktfeld, $\mathfrak{Q}$ einen complexen Kreis; dann sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ indirekte KV, und zwar beide hyperbolisch oder beide elliptisch; von dem Fall, dass sie Inversionen darstellen, wollen wir vorläufig absehen.

Sind die Verwandtschaften $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ hyperbolisch, so gilt für ihre Fixpunkte AB bezw. $A'B'$ wieder die Beziehung (6), also schneidet das Punktfeld $\mathfrak{P}$ den Kreis $\mathfrak{Q}$ in zwei Punkten

---

[1]) É. Laguerre a. a. O. p. 247.

$[AA']$ und $[BB']$, d. h. AA', BB' sind die gemeinsamen Paare von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Dagegen gibt es jetzt kein Paar complexer Punkte, die sich sowohl in $\mathfrak{P}$ als in $\mathfrak{Q}$ entsprächen.

Sind $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ elliptisch, und AB, $A'B'$ ihre Gegenpunkte, so sind AA' und BB' Paare von $\mathfrak{P}$, $\cdot AB'$ und BA' Paare von $\mathfrak{Q}$ und es gibt keine andern vier Punkte dieser Eigenschaft. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ haben jetzt kein reelles Punktepaar gemeinsam, und das Punktfeld schneidet den Kreis überhaupt nicht. Dagegen existiren nunmehr zwei complexe Punkte $[AB]$, $[BA]$, die von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise, nämlich in $[A'B']$ bezw. $[B'A']$ transformirt werden.

Für den Fall, dass $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ parabolisch, also A mit A' und B mit B' identisch sind, sagen wir wiederum: das Punktfeld $\mathfrak{P}$ berührt den Kreis $\mathfrak{Q}$ im Punkte $[AA']$.

Versteht man im Vorigen unter $\mathfrak{P}$ das reelle Punktfeld, so entspringt die schon aus Nr. 15 bekannte Thatsache: Der Kreis $\mathfrak{Q}$ enthält, jenachdem $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch oder elliptisch ist, zwei reelle Punkte (die Fixpunkte) oder zwei conjugirt imaginäre Punkte, die durch die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ repräsentirt werden.

26. Besitzt die eine der Transformationen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ der Nr. 24 und infolgedessen auch die andere die Periode zwei, so nennen wir die Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und ebenso die zugeordneten Punktfelder resp. Kreise „orthogonal" oder „harmonisch[1]"; z. B. werden die Möbiusinvolutionen und die Inversionen aus der Gesamtheit der reellen KV dadurch ausgeschieden, dass sie zu dem reellen Punktfeld harmonisch liegen sollen. Die harmonische Beziehung soll uns in § IV ausführlich beschäftigen; hier betrachten wir nur den Fall, dass $\mathfrak{P}$ ein Punktfeld, $\mathfrak{Q}$ einen Kreis, also $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ Inversionen bedeuten. Sind die Kreise der letzteren, die wir mit K, K' bezeichnen, beide einteilig, und ABC.. Punkte der Peripherie von K, ferner $A'B'C'$.. die ihnen vermöge $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte, so liegen die letzteren auf K' und es sind AA', BB'.. auch Paare von $\mathfrak{Q}$. Die Peripherien von K und K' werden also

[1]) Nach H. Wiener, Lpz. Ber. 42 (1890) p. 262.

durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise projektiv bezogen; diese KV haben sonach ∞^1 Paare reeller entsprechender Punkte gemein, mit andern Worten: das Punktfeld $\mathfrak{P}$ schneidet den Kreis $\mathfrak{Q}$ in ∞^1 complexen Punkten. Die von letzteren gebildete Mannigfaltigkeit bezeichnet man passend als eine „Kreisspur"; eine solche entsteht aus den ∞^1 reellen Punkten eines einteiligen Kreises durch beliebige complexe KV.

Sind die Kreise der Inversionen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ nullteilig, so hat das Punktfeld $\mathfrak{P}$ mit dem Kreis $\mathfrak{Q}$ keinen Punkt gemein.

Bedeuten A, B zugeordnete Punkte der Inversion $\mathfrak{R}$, ferner $A' B'$ die ihnen in $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte, so hat man

$$A B \{\mathfrak{Q}\} B' A',$$

und $A' B'$ ist ein Paar der Inversion $\mathfrak{R}'$, also wird der complexe Punkt $[AB]$ sowohl durch $\mathfrak{P}$ als durch $\mathfrak{Q}$ in den Punkt $[A' B']$ übergeführt. Die reellen Kreise K, K' sind demnach so aufeinander bezogen, dass nicht nur ihre etwaigen reellen, sondern auch ihre ∞^2 complexen Punkte sich vermöge $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise entsprechen, und man erhält auf diese Weise offenbar auch alle Paare entsprechender complexer Punkte, die den Verwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gemeinsam sind. Sind die Kreise K, K' identisch, so bleibt K vermöge $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ invariant, $\mathfrak{P}$ ist also zweispiegelig, K ein Bahnkreis von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{R}$.

III. Vertauschbarkeit und Inversibilität der Kreisverwandtschaften.

27. Die reellen Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heissen vertauschbar, wenn sie der Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q} \text{ oder } \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P}$$

genügen; wir sagen ferner, $\mathfrak{Q}$ ist durch $\mathfrak{P}$ „inversibel" oder „$\mathfrak{P}$ invertirt $\mathfrak{Q}$", wenn die Beziehung

$$(2) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1}$$

gilt. Ist $\mathfrak{P}$ eine direkte KV, so führt sie das Punktfeld (bezw. den Kreis) $\mathfrak{Q}$ unter der ersten Annahme in sich, unter der

zweiten in das conjugirte Gebilde über; ist dagegen $\mathfrak{P}$ indirekt, so findet das Umgekehrte statt. Ein Punktfeld (oder Kreis) $\mathfrak{Q}$ gestattet also dann und nur dann die indirekte Transformation $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{P}$ inversibel ist.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Wirkung reeller Kreisverwandtschaften auf complexe Punkte untersucht; hier soll ihre Wirkung auf complexe Kreise und Punktfelder studirt werden, d. h. wir bestimmen erstens alle Kreisverwandtschaften, die ein gegebenes Punktfeld oder einen complexen Kreis invariant lassen, bezw. in das conjugirte Gebilde überführen, zweitens alle Punktfelder und complexen Kreise, die bei einer gegebenen KV invariant bleiben oder in das conjugirte Gebilde übergehen. Dazu brauchen wir nur alle Fälle aufzuzählen, in der die Relation (1) oder (2) stattfindet.

28. Soll $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sein, so muss $\mathfrak{P}$ jedes Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ wieder in ein solches Paar überführen. Ist nun $\mathfrak{P}$ eine direkte KV, $\mathfrak{Q}$ eine indirekte hyperbolische KV, so muss $\mathfrak{P}$ die Fixkreise π, π' und ebenso die Fixpunkte $M_1 M_2$ von $\mathfrak{Q}$ entweder vertauschen oder festlassen. Bedeutet jetzt AA' ein auf π liegendes Paar von $\mathfrak{Q}$ und hat man $AA' \{\mathfrak{P}\} BB'$, so liegen, wenn $\mathfrak{P}$ die Fixkreise $\pi\pi'$ vertauscht, die Punkte BB' auf dem Kreise π'. Blieben nun die Punkte $M_1 M_2$ bei $\mathfrak{P}$ fest, so wären die reellen Doppelverhältnisse

$$(AA' M_1 M_2), \ (BB' M_1 M_2) \tag{3}$$

nach Nr. 17 sowohl gleich als entgegengesetzt, was nicht möglich ist. Würden andererseits M_1 und M_2 durch $\mathfrak{P}$ vertauscht, so wären jene Doppelverhältnisse sowohl reciprok als entgegengesetzt, was ebenfalls nicht stattfinden kann. Also muss $\mathfrak{P}$ die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$, aber auch die Fixpunkte $M_1 M_2$ stehen lassen; denn andernfalls wären die Doppelverhältnisse (3) gleich und reciprok, also harmonisch, d. h. $\mathfrak{Q}$ wäre eine Inversion. Umgekehrt, lässt $\mathfrak{P}$ die Fixkreise und Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ in Ruhe, so führt sie $\mathfrak{Q}$ in sich über.

Ist $\mathfrak{Q}$ eine indirekte elliptische KV, so weiss man von vorneherein, dass $\mathfrak{P}$ den einteiligen Fixkreis π von $\mathfrak{Q}$ fest-

lassen muss, und erkennt ähnlich wie oben, dass auch die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ bei $\mathfrak{P}$ festbleiben, da $\mathfrak{Q}$ andernfalls eine Inversion wäre. Also findet man schliesslich: Die direkten KV, die eine allgemeine indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ in sich überführen, bilden eine eingliedrige Gruppe[1]) zweispiegeliger Verwandtschaften, deren Bahnkreisbüschel die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ enthält.

29. Sollen die indirekten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sein, so muss $\mathfrak{P}'$, falls $\mathfrak{Q}$ zwei einteilige Fixkreise π, π', also reelle Fixpunkte $M_1 M_2$ besitzt, diese Kreise vertauschen oder festlassen. Ersteres ist aber ausgeschlossen; denn sind $A A'$ wieder entsprechende auf π gelegene Punkte von $\mathfrak{Q}$ und hätte man

$$A A' M_1 M_2 \{\mathfrak{P}'\} B B' M_1 M_2 \text{ oder } A A' M_1 M_2 \{\mathfrak{P}'\} B B' M_2 M_1,$$

so dass B und B' auf π' liegen, so gäbe es auch eine direkte KV, die dasselbe leisten, also $\mathfrak{Q}$ ebenfalls in sich überführen würde, was nach der vorigen Nr. nicht möglich ist. Darnach hat $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}$ die Fixkreise gemein, entsteht also aus einer Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}$ der oben definirten eingliedrigen Gruppe durch Multiplikation mit der Inversion J bezw. J', die π bezw. π' zur Direktrix hat. Da aber das Produkt JJ' oder $J'J$ selbst jener eingliedrigen Gruppe angehört, ferner J und J' mit allen Transformationen derselben vertauschbar sind, so lassen sich die indirekten KV, die $\mathfrak{Q}$ in sich überführen, auf jede der 4 Arten

$$(4) \qquad J\mathfrak{P},\ J'\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}J,\ \mathfrak{P}J'$$

schreiben, worin $\mathfrak{P}$ die ∞^1 Transformationen jener eingliedrigen Gruppe durchläuft, und ganz dasselbe gilt offenbar auch für den Fall, dass π' nullteilig, also $\mathfrak{Q}$ elliptisch ist. Natürlich ist $\mathfrak{Q}$ selbst in der Schaar (4) enthalten.

J und J' sind offenbar die einzigen Inversionen, die $\mathfrak{Q}$ in sich überführen; man kann daher die Fixkreise einer indirekten

---

[1]) Vgl. hierüber Klein-Fricke a. a. O.

KV $\mathfrak{Q}$ auch als die Potenzkreise der complexen Kreise $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^{-1}$ bezeichnen.

30. Die Annahme, dass $\mathfrak{Q}$ eine Inversion bedeutet, erledigt sich sehr einfach; es genügt, das Resultat auszusprechen: Die direkten *KV*, die mit der Inversion $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sind, bilden eine dreigliedrige Gruppe, bestehend aus allen elliptischen Transformationen, deren Fixpunkte hinsichtlich $\mathfrak{Q}$ invers sind; ist $\mathfrak{Q}$ einteilig, so gibt es noch eine zweite dreigliedrige Gruppe dieser Art, bestehend aus den hyperbolischen Transformationen, deren Fixpunkte auf dem Kreis $\mathfrak{Q}$ liegen. Die indirekten mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbaren Transformationen entstehen aus den genannten durch vorherige oder nachherige Multiplikation mit $\mathfrak{Q}$.

31. Da die Vertauschbarkeit zweier *KV* eine reciproke Beziehung ist, so haben wir durch die Entwickelungen der Nr. 28 gleichzeitig die Aufgabe erledigt, alle indirekten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, die mit einer direkten *KV* $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sind: Gilt die Relation (1) und bedeutet $\mathfrak{Q}$ eine direkte, $\mathfrak{P}$ eine indirekte *KV*, so ist 1) entweder $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, $\mathfrak{P}$ eine hyperbolische indirekte *KV*, die mit $\mathfrak{Q}$ die Fixpunkte gemein hat, oder eine Inversion, deren einteilige Direktrix die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthält, oder 2) $\mathfrak{Q}$ ist eine elliptische direkte, $\mathfrak{P}$ eine elliptische indirekte *KV*, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ zu Gegenpunkten hat, im Speziellen eine Inversion, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

Eine Möbiusinvolution ist darnach mit allen indirekten *KV* vertauschbar, die ihre Fixpunkte zu Gegenpunkten oder zu Fixpunkten haben.

32. Auch der noch übrige Fall zweier vertauschbarer direkter *KV* erledigt sich aufs leichteste:[1]) Zwei direkte *KV* sind dann und nur dann vertauschbar, wenn sie entweder die Fixpunkte gemein haben, oder wenn sie Möbiusinvolutionen sind, von denen jede die Fixpunkte der andern vertauscht.[2])

---

[1]) C. Segre, Journ. f. Math. 100 p. 317—330.

[2]) Zwei solche Involutionen sind nach Nr. 36 harmonisch; ihre Fixpunkte liegen ebenfalls harmonisch.

Die Theorie der vertauschbaren KV ist damit vollständig erledigt.

33. Etwas umständlicher ist die Diskussion der Gleichung (2); wir begnügen uns das Resultat mitzuteilen. Damit die Relation

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1} \tag{2}$$

stattfinde, ist notwendig und hinreichend, dass einer der folgenden Fälle realisirt sei:

1) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte KV, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

2) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte elliptische KV, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, die mit $\mathfrak{Q}$ die Fixpunkte gemein hat, z. B. eine Inversion, deren Direktrix die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthält.

3) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte hyperbolische KV, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ zu Gegenpunkten hat, z. B. eine Inversion, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

4) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Fixpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, deren Fixpunkte harmonisch zu $M_1 M_2$ auf dem einen oder andern Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ liegen.

5) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Fixpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Inversion, die M_1 und M_2 vertauscht.

6) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Gegenpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, deren Fixpunkte harmonisch zu $M_1 M_2$ auf dem einteiligen Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ liegen.

7) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Gegenpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Inversion an einem durch $M_1 M_2$ gehenden einteiligen Kreise.

Der Fall, dass $\mathfrak{Q}$ eine Inversion oder Möbiusinvolution bedeutet, ist bei dieser Aufzählung nicht berücksichtigt, da unter dieser Annahme die Gleichung (2) mit (1) identisch wird.

34. Die vollständige Beantwortung der beiden in Nr. 27 aufgeworfenen Fragen ergibt sich aus den Nrn. 28—33 durch leichte Veränderung des Wortlauts; wir wollen in dieser Richtung nur noch folgende Thatsachen hervorheben, die sich übrigens leicht auch unmittelbar verificiren lassen: Bei einer

allgemeinen direkten KV bleiben überhaupt keine reellen oder complexen Kreise invariant, bei einer hyperbolischen bezw. elliptischen direkten KV $\mathfrak{P}$ nur diejenigen ∞^2 Kreise, die die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ zu Fix- bezw. Gegenpunkten haben, bei einer indirekten KV, die keine Inversion ist, nur deren reelle Fixkreise, endlich bei einer Inversion $\mathfrak{P}$ alle Kreise, deren Fixpunkte auf dem Kreise $\mathfrak{P}$, oder deren Gegenpunkte hinsichtlich $\mathfrak{P}$ invers liegen.

Durch die Entwickelungen dieses Paragraphen ist gleichzeitig die Aufgabe gelöst, alle Transformationen zu finden, die zwei äquivalente Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ineinander überführen; ist nämlich $\mathfrak{Q}$ eine bestimmte KV, die dies leistet, so erhält man die allgemeinste in der Form $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}'$, wo $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$ die allgemeinste KV bedeutet, die $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{P}'$ invariant lässt.

IV. Harmonische und associirte Kreisverwandtschaften; Büschel und Halbbüschel von Punktfeldern und complexen Kreisen.

35. In Nr. 26 nannten wir zwei gleichartige Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch, wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution ist. Sind $a\,b\,c\,d$ bezw. $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ die Coefficienten der zu $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{Q}$ gehörigen linearen Transformationen der complexen Variabeln z, so lautet die Bedingung für die harmonische Lage

$$(1) \qquad a\delta - b\gamma - c\beta + d\alpha = 0;$$

sie zerlegt sich in 2 reelle Gleichungen, es gibt also zu einer gegebenen KV ∞^4 mit ihr gleichartige harmonische Kreisverwandtschaften.

Ist dagegen $\mathfrak{P}$ eine direkte, $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV, so muss das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ eine Inversion sein, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch liegen sollen; die Bedingungen hiefür lauten:

$$\frac{-\bar{\delta}\bar{a}+\bar{\beta}\bar{c}}{\bar{\gamma}\bar{a}-\bar{a}\bar{c}}+\frac{\gamma b-a d}{\gamma a-a c}=0;$$

$$\frac{\bar{\beta}\bar{d}-\bar{\delta}\bar{b}}{\bar{\gamma}\bar{a}-\bar{a}\bar{c}}=\frac{\beta d-\delta b}{\gamma a-a c},$$

was mit 3 reellen Gleichungen äquivalent ist; es gibt also zu einer gegebenen KV ∞^3 ungleichartige harmonische KV.

Da die Bedingung (1), auf 2 complexe Kreise angewandt, deren Orthogonalität ausspricht, so bezeichnen wir allgemein 2 harmonische KV als orthogonal und die Gesamtheit der ∞^4 zu einer KV harmonischen gleichartigen KV als ein Netz.

Sind die Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch und bedeutet AA' ein Paar von $\mathfrak{P}$, während die Punkte BB' durch die Angabe

$$A\,\{\mathfrak{Q}\}\,B',\quad B\,\{\mathfrak{Q}\}\,A' \tag{2}$$

bestimmt sind, so bilden auch B und B' ein Paar von $\mathfrak{P}$. Umgekehrt, sind die KV $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig und existiren in $\mathfrak{P}$ zwei verschiedene Paare AA', BB' derart, dass AB' und BA' Paare von $\mathfrak{Q}$ sind, so liegen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch, da ja $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ die Punkte A, B vertauscht.

Bedeutet S_1 den ersten, S_2 den zweiten singulären Punkt einer singulären KV $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$, wie man leicht erkennt, dann und nur dann harmonisch, wenn S_1, S_2 ein Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ bedeuten.

36. Zwei Möbiusinvolutionen sind dann und nur dann harmonisch, wenn ihre Fixpunkte harmonisch liegen, zwei Inversionen, wenn die zugehörigen Kreise sich rechtwinklig schneiden; eine Möbiusinvolution und eine Inversion, wenn letztere die Fixpunkte der ersteren entweder vertauscht oder festlässt. In allen diesen Fällen sind die betreffenden KV natürlich auch vertauschbar, und jede ist durch die andere inversibel.

Soll die Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$ zu der KV $\mathfrak{Q}$ harmonisch sein, so hat man:

$$\mathfrak{J}\mathfrak{Q}\mathfrak{J}=\mathfrak{Q}^{-1};$$

nach Nr. 33 folgt also: Eine Möbiusinvolution ist dann und nur dann zu einer direkten KV harmonisch, wenn sie deren Fixpunkte vertauscht; jede direkte KV kann also auf ∞^2 Arten als Produkt zweier Möbiusinvolutionen dargestellt werden.[1])

Jede indirekte KV bestimmt ∞^1 zu ihr harmonische Möbiusinvolutionen; sie wurden in Nr. 33 unter 4) und 6) angegeben.

Zu einer direkten hyperbolischen (bezw. elliptischen) KV mit den Fixpunkten (bezw. Gegenpunkten) $M_1 M_2$, die keine Involution ist, gibt es ∞^1 harmonische Inversionen, deren Kreise das Büschel mit den Grenzpunkten (bezw. Grundpunkten) $M_1 M_2$ bilden; zu einer Möbiusinvolution gibt es zwei Schaaren von ∞^1 harmonischen Inversionen.

Eine indirekte $KV\ \mathfrak{Q}$, die keine Inversion ist, besitzt ∞^1 zu ihr harmonische Inversionen, deren Kreise das zu den Fixkreisen von $\mathfrak{Q}$ orthogonale reelle Büschel bilden. Sind A, A' ein Paar von $\mathfrak{Q}$, $M_1 M_2$ die Fixpunkte, so liegt der Punkt B', in den A durch eine jener ∞^1 Inversionen übergeht, auf dem Kreis $M_1 M_2 A$, ebenso der Punkt B, in den A' durch dieselbe Inversion transformirt wird, auf dem Kreise $M_1 M_2 A'$; daraus folgt: Schneidet ein beliebiger durch AA' gelegter Kreis den Kreis $M_1 M_2 A$ in B', den Kreis $M_1 M_2 A'$ in B, so ist BB' ein neues Paar von $\mathfrak{Q}$. Hieraus ergibt sich eine einfache Construktion der Punkte, die einem gegebenen Punkte A in $\mathfrak{Q}$ vor- und rückwärts entsprechen, und zwar gilt das Vorige auch in dem Fall, dass die Punkte $M_1 M_2$ conjugirt imaginär, $\mathfrak{Q}$ also elliptisch ist.

37. Es möge hier auf diejenigen Kreisverwandtschaften, die zu ihrer inversen harmonisch sind, also eine Gleichung der Form $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$ erfüllen, und allgemeiner auf die Lösung der Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene (natürlich direkte) KV bedeutet, mit ein paar Worten eingegangen werden. Soll die $KV\ \mathfrak{Q}$ direkt sein, so hat sie mit $\mathfrak{R}$ die Fixpunkte gemein, und ihre Invariante hat einen der Werte

---

[1]) Vgl. Segre a. a. O.

$\pm\sqrt{\varkappa}$, wo $\varkappa$ diejenige von $\mathfrak{R}$ bedeutet; es gibt also 2 verschiedene KV, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$, der genannten Beschaffenheit, die vertauschbar und harmonisch sind, so zwar, dass $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}^{-1}$ mit der Fixpunktsinvolution von $\mathfrak{P}$ identisch ist. Soll insbesondere $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$ sein, so haben $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ bezw. die Invarianten $e^{i\frac{\pi}{2}}$ und $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, sind also elliptische Transformationen der Periode 4. Bedeutet andererseits $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV, so muss $\mathfrak{R}$ zweispiegelig sein. Ist $\mathfrak{R}$ zunächst hyperbolisch und seine (reelle) Invariante $\varkappa > 0$, so existirt eine Schaar von ∞^1 indirekten hyperbolischen KV obiger Eigenschaft; und zwar kann man für die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ zwei beliebige orthogonale Kreise des Bahnkreisbüschels von $\mathfrak{P}$ wählen, während die Invariante von $\mathfrak{Q}$ den Wert $|\sqrt{\varkappa}|$ besitzt. Ist zweitens $\mathfrak{R}$ elliptisch, so gibt es stets zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 elliptischen indirekten KV, die die Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$ erfüllen, und zwar kann der einteilige Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Bahnkreisbüschels von $\mathfrak{R}$ beliebig gewählt werden, während die Invariante von $\mathfrak{Q}$ den Wert $\pm e^{\frac{i\lambda}{2}}$ hat, wo $e^{i\lambda}$ diejenige von $\mathfrak{R}$ bedeutet, und zwar ist jede KV der ersten Schaar zu jeder der zweiten harmonisch. Insbesondere gibt es also auch 2 verschiedene Schaaren von Lösungen der Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$.

38. Nach Nr. 35 haben alle Kreisverwandtschaften, die dem durch $\mathfrak{Q}$ bestimmten Netze angehören und ein gegebenes Paar AA' enthalten, auch das Paar BB' gemein, das durch die Formeln (2) definirt wird. Die Punkttransformation, welche jeden complexen Punkt $[AA']$ in $[BB']$ verwandelt, ist natürlich involutorisch und lässt alle Paare von $\mathfrak{Q}$ in Ruhe; für den Fall, dass $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV $\mathfrak{Q}$ bedeutet, ist sie mit der Inversion an dem Kreise $\mathfrak{Q}$ identisch. Wenn nun $\mathfrak{Q}$ eine direkte KV vorstellt, wollen wir jenen Uebergang als die „Spiegelung (oder Inversion) an dem Punktfeld $\mathfrak{Q}$“ bezeichnen.

Bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei indirekte reelle KV und stehen die reellen Punkte $AA'BB'$ in der Beziehung

$$A\{\mathfrak{Q}\}B,\quad A'\{\mathfrak{P}\}B',$$

so nennen wir den Uebergang von dem Punkte $[AA']$ zu $[BB']$ eine „uneigentliche direkte KV“; sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei direkte reelle KV, und hat man

$$A\{\mathfrak{Q}\}B', \quad A'\{\mathfrak{P}\}B,$$

so heisst die Transformation, vermöge deren der Punkt $[AA']$ in $[BB']$ übergeht, eine „uneigentliche indirekte KV“; ersetzt man $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{Q}^{-1}$, so erhält man als Spezialfall die Spiegelung an dem Punktfeld $\mathfrak{Q}$. Die Spiegelung an dem reellen Punktfeld ist also nichts anderes als der Uebergang von einem complexen Punkt zu seinem conjugirt imaginären.

Eine uneigentliche direkte (bezw. indirekte) KV entsteht demnach, wenn man jedes der beiden Büschel von Minimalgeraden conjugirt-projektiv auf sich (bezw. auf das andere) bezieht und dem complexen Schnittpunkt zweier Minimalgeraden den Schnittpunkt der bezw. entsprechenden Minimalgeraden zuweist.

39. Sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei gleichartige reelle KV, also beide direkt oder beide indirekt, ferner AA', BB' ihre gemeinsamen Paare, so bezeichnen wir den Inbegriff der ∞^2 Kreisverwandtschaften, die mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig sind und die Paare AA', BB' gemein haben, als das „Büschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$“ und zwar als ein „Feldbüschel“ oder „Kreisbüschel“, je nachdem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ direkt oder indirekt sind. Der Definition des Büschels können statt $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ irgend zwei verschiedene Verwandtschaften des Büschels zu Grunde gelegt werden. Die Punkte $[AA']$, $[BB']$ heissen die Grundpunkte, ferner $[AB']$ und $[BA']$ die Grenzpunkte des Büschels. Das letztere enthält nur zwei singuläre KV; ihre singulären Punkte sind A, B' bezw. B, A'.

Ein reelles Büschel, das also zu jeder KV gleichzeitig die inverse enthält, entsteht, wenn entweder A mit A' und B mit B' identisch, d. h. die Grundpunkte reell, oder wenn A mit B' und B mit A' identisch, also die Grenzpunkte reell werden. Ein reelles Feldbüschel insbesondere besteht entweder aus ∞^1 direkten KV mit gemeinsamen Fixpunkten, oder aus ∞^1 Involutionen, die ein gemeinsames Paar enthalten.

Ist A mit B, A' mit B' identisch, so erhält man ein „Berührungsbüschel", bestehend aus ∞^2 Kreisverwandtschaften, die sich im Punkte $[AA']$ berühren.

Von zwei harmonischen Punktfeldern geht nach Nr. 38 jedes durch Spiegelung an dem andern in sich über, und analoges gilt auch für harmonische Kreise. Ist also die KV $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig und harmonisch, so sind die Punkte $[AA']$ und $[BB']$ hinsichtlich $\mathfrak{P}'$ invers, $\mathfrak{P}'$ enthält also die Paare AB', BA'; und umgekehrt. Es gibt demnach ∞^2 Kreisverwandtschaften, die zu allen KV des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ harmonisch liegen; sie bilden das zu letzterem „adjungirte Büschel", das $[AB']$ und $[BA']$ zu Grundpunkten, $[AA']$ und $[BB']$ zu Grenzpunkten hat. Das adjungirte Büschel eines Berührungsbüschels ist wieder ein solches und hat denselben doppelt zählenden Grundpunkt.

40. Um diejenige KV $\mathfrak{P}'$ des zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ adjungirten Büschels zu finden, die ein gegebenes Paar C, C' enthält, invertire man den Punkt $[CC']$ an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, wodurch die Punkte $[DD']$ und $[EE']$ erhalten werden; dann sind CC', DD', EE' 3 Paare von $\mathfrak{P}'$. Ist CC' ein Paar von $\mathfrak{P}$, so invertire man den Punkt $[CC']$ an $\mathfrak{Q}$, wodurch $[EE']$, und den letzteren Punkt an $\mathfrak{P}$, wodurch $[FF']$ entstehe; dann sind CC', EE', FF' 3 Paare von $\mathfrak{P}'$. Diese Construktion versagt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ harmonisch liegt, weil dann auch das Paar EE' in $\mathfrak{P}$ enthalten, also mit FF' identisch ist, und es bietet sich dann die weiter unten zu erledigende Aufgabe, eine zu $\mathfrak{P}$ harmonische gleichartige KV zu bestimmen, die 2 gegebene Paare von $\mathfrak{P}$ enthält. Ist endlich CC' eines der gemeinsamen Paare von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, etwa mit AA' identisch, so muss $\mathfrak{P}'$ die singuläre KV sein, deren singuläres Paar A und A' sind; diese KV sowie diejenige, die B, B' zu singulären Punkten hat, sind in der That die einzigen singulären KV des zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ adjungirten Büschels.

Die Construktion derjenigen KV, die einem gegebenen Büschel angehört und ein gegebenes Paar enthält, lässt sich

auf die vorige zurückführen, indem man zunächst zwei beliebige KV des adjungirten Büschels bestimmt.

Die Aufgabe, eine mit $\mathfrak{Q}$ gleichartige und harmonische $KV\ \mathfrak{P}'$ zu bestimmen, die zwei gegebene Paare CC', DD' enthält, erledigt sich dadurch, dass man durch Inversionen an $\mathfrak{Q}$ aus den gegebenen Paaren neue ableitet; diese Construktion versagt nur dann, wenn jene Paare beide auch in $\mathfrak{Q}$ enthalten sind. In diesem Falle ermittle man zunächst zwei beliebige KV, die mit $\mathfrak{Q}$ gleichartig und harmonisch sind, sowie das Paar CC' enthalten; sie gehören zu einem Berührungsbüschel mit dem Grundpunkt $[CC']$. Ferner bestimme man zwei beliebige $KV\ \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$ des dazu adjungirten Berührungsbüschels, sowie diejenige $KV\ \mathfrak{P}'$, die das Paar DD' enthält und zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ harmonisch ist. Diese letztere Construktion ist nunmehr stets ausführbar, da sich $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ so wählen lassen, dass keine derselben das Paar DD' enthält.

Um schliesslich diejenige Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}'$ zu bestimmen, die zu drei gegebenen KV: $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ harmonisch ist, verstehe man unter CC' ein beliebiges Paar von $\mathfrak{R}$, ermittele nach dem Obigen die Kreisverwandtschaft $\mathfrak{S}$ des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, die das Paar CC' enthält, und suche das zweite gemeinsame Paar DD' von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$. Dann sind die Punkte $[CC']$ und $[DD']$ hinsichtlich $\mathfrak{P}'$ invers, d. h. CD' und DC' sind Paare von $\mathfrak{P}'$, und man findet auf diesem Wege beliebig viele Paare der gesuchten KV.

Wir bemerken noch, dass alle in dieser Nr. behandelten Aufgaben lediglich lineare Constructionen erfordern.

41. Es sei ein Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ gegeben; bedeutet $\mathfrak{P}$ eine beliebige KV desselben, so kann die allgemeinste KV des Büschels in jeder der beiden Formen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P};\quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\mathfrak{R}' \tag{3}$$

geschrieben werden, worin $\mathfrak{R}$ (bezw. $\mathfrak{R}'$) das reelle Büschel der ∞^1 direkten KV mit den Fixpunkten AB (bezw. $A'B'$) durchläuft; die allgemeinste Transformation $\mathfrak{Q}'$ des adjungirten Büschels kann dann auf folgende beide Arten dargestellt werden:

(4) $$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{J}\mathfrak{P}; \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}\mathfrak{J}';$$

dabei durchläuft $\mathfrak{J}$ alle Möbiusinvolutionen, die das Paar AB enthalten, d. h. zur Fixpunktsinvolution von $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$ harmonisch sind, ebenso $\mathfrak{J}'$ alle Möbiusinvolutionen, die das Paar $A'B'$ enthalten. Nach (3) haben alle Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ die Eigenschaft, jede KV des reellen Feldbüschels $\mathfrak{R}$ in eine KV des Büschels $\mathfrak{R}'$ zu transformiren, welch letztere immer dieselbe ist, wie auch $\mathfrak{P}$ innerhalb des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ gewählt sein mag. Insbesondere wird die Involution $\mathfrak{J}$ mit den Fixpunkten AB in $\mathfrak{J}'$ verwandelt;[1]) diese Wirkung haben aber auch alle KV des adjungirten Büschels. Umgekehrt gibt es stets zwei adjungirte Feldbüschel und zwei adjungirte Kreisbüschel derart, dass alle ihnen angehörenden KV zwei vorgegebene Möbiusinvolutionen ineinander überführen.

Die Entwickelungen dieser Nr. gelten in leicht ersichtlicher Weise auch, wenn A mit B, A' mit B' identisch ist, d. h. wenn es sich um ein Berührungsbüschel handelt.

42. Bedeutet $\mathfrak{P}$ eine direkte KV mit den Fixpunkten $M_1 M_2$, die in dem Feldbüschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ enthalten ist, so entsprechen sich M_1 und M_2 vermöge der im adjungirten Büschel vorkommenden Involution $\mathfrak{j}$, die durch die Paare AB', BA' definirt ist; umgekehrt, bilden $M_1 M_2$ ein Paar von $\mathfrak{j}$, so gibt es in dem Feldbüschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ stets eine und nur eine direkte KV mit den Fixpunkten $M_1 M_2$.

Der erste Teil dieser Behauptung folgt daraus, dass $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{P}$ harmonisch ist, also die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ vertauscht, der zweite aus der Beziehung

$$M_1 M_2 A A' \{\mathfrak{j}\}\ M_2 M_1 B' B,$$

[1]) Nur wenn $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch sind, gibt es mehr als ein Paar $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$, so dass gleichzeitig $\mathfrak{P}\mathfrak{J}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{J}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{J}\mathfrak{Q}^{-1}$, und zwar bedeutet hier $\mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$, $\mathfrak{J}'$ eine zu $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{Q}$ harmonische Involution; für den Inhalt dieser Nr. vgl. übrigens C. Segre a. a. O.

welche lehrt, dass das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 A A')$ gleich $(M_1 M_2 B B')$ ist. Natürlich sind ebenso die Fixpunktepaare der KV des adjungirten Feldbüschels mit den Paaren derjenigen Involution $\mathfrak{i}$ identisch, die A mit A' und B mit B' vertauscht.

In einem Feldbüschel gibt es nach dem Gesagten nur zwei parabolische Verwandtschaften; ihre doppelt zählenden Fixpunkte coincidiren bezw. mit den beiden Fixpunkten von $\mathfrak{j}$.

Für den Fall eines reellen Büschels und eines Berührungsbüschels wird die obige Schlussweise natürlich hinfällig; doch bedarf nur der zweite dieser Fälle einer nähern Erläuterung. Es handelt sich hier darum, die in den beiden adjungirten Büscheln enthaltenen Möbiusinvolutionen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ zu construiren. Sei also ein Berührungsbüschel gegeben durch den doppelt zählenden Grundpunkt $[AA']$ und eine direkte KV $\mathfrak{P}$, die das Paar AA' und die Fixpunkte $M_1 M_2$ besitzt. Da $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{P}$ harmonisch ist und gleichfalls das Paar AA' enthält, so liegen die Fixpunkte CC' von $\mathfrak{j}$ zu $M_1 M_2$ und zu AA' gleichzeitig harmonisch, sind also eindeutig festgelegt. Die Involution $\mathfrak{i}$ ist dann dadurch definirt, dass ihre Fixpunkte zu AA' und zu CC' harmonisch sind. Ist das Berührungsbüschel reell, also A mit A' identisch, so coincidiren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ in die singuläre Involution mit dem singulären Punkt A, d. h. jeder beliebige Punkt der Ebene bildet mit A zusammen das Fixpunktepaar je einer KV der beiden adjungirten Büschel.

43. Wir wollen jetzt die zweispiegeligen Verwandtschaften bestimmen, die in einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ enthalten sind. Die beiden Fixpunkte P, P' einer dem Büschel angehörigen hyperbolischen KV liegen sowohl mit AA' als mit BB' cyclisch. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{t}$ die involutorische Transformation, die jedem Punkte P' den zweiten Schnittpunkt der Kreise $P'AA'$ und $P'BB'$ zuweist, so folgt: Es gibt in dem vorgelegten Feldbüschel ∞^1 hyperbolische Transformationen; ihre Fixpunktepaare sind identisch mit den gemeinsamen Paaren der Transformation $\mathfrak{t}$ und der Möbiusinvolution $\mathfrak{j}$, d. h. also mit denjenigen Punktepaaren

von j, die mit AA' (und infolgedessen auch mit BB') cyclisch liegen.

Um den geometrischen Ort dieser ∞^1 Paare zu finden, verlege man durch eine Inversion den einen Fixpunkt von j in's Unendliche; dann ist A zu B', A' zu B symmetrisch hinsichtlich des andern Fixpunkts 0, den wir als Anfangspunkt eines cartesischen Coordinatensystems x, y wählen. Die Gleichung des Kreisbüschels mit den Grundpunkten AA' habe die Form:

$$(5)\quad (1+\lambda)(x^2+y^2)+\pi+\lambda\pi'-2(\alpha+\lambda\alpha')x-2(\beta+\lambda\beta')y=0,$$

worin λ den Parameter bedeutet; das ihm vermöge j entsprechende Büschel wird erhalten, indem man x durch $-x$, y durch $-y$ ersetzt, und aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von λ die Curve:

$$(6)\quad 0=(x^2+y^2+\pi)(\alpha'x+\beta'y)-(x^2+y^2+\pi')(\alpha x+\beta y),$$

also eine circulare Curve 3.O. Soll diese zerfallen, so muss sich, da sie hinsichtlich 0 symmetrisch ist, eine durch 0 gehende Gerade $y=\varrho x$ von ihr ablösen. Substituiren wir diesen Wert für y in (6) und setzen das Resultat identisch null, so zeigt sich, dass unsere C_3 dann und nur dann zerfällt, wenn die Punkte $AA'BB'$ entweder auf einem Kreise K mit dem Centrum 0 oder auf einer durch 0 gehenden Geraden g liegen. Im ersten Fall zerfällt die C_3 in den Kreis K und die gemeinsame Mittelsenkrechte der Strecken AB, $A'B'$; im zweiten artet die C_3 aus in die Gerade g und den Kreis mit dem Centrum 0, der A von B und A' von B' harmonisch trennt. Daraus folgt:

Die Fixpunktepaare der hyperbolischen Transformationen, die einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ angehören, erfüllen eine bicirculare C_4 (eventuell eine circulare C_3); dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, zerfällt diese Curve, und zwar in den Kreis K und den dazu orthogonalen Kreis, der A von B und A' von B' harmonisch trennt.

44. Die Fixpunkte PP' einer elliptischen Transformation, die dem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ an-

gehört, liegen zu AA' und zu BB' orthocyclisch. Nennt man also $\mathfrak{k}'$ die involutorische Transformation, die jedem Punkte P' den zweiten Schnittpunkt der durch P' gehenden Kreise zuweist, die A von A' bezw. B von B' harmonisch trennen, so sind die Fixpunktepaare der ∞^1 dem Büschel angehörenden elliptischen Transformationen identisch mit den gemeinsamen Paaren der beiden Verwandtschaften $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}'$. Verlegt man den einen Fixpunkt von $\mathfrak{j}$ ins Unendliche und wählt den Coordinatenanfang wie in der vorigen Nr., versteht man ferner unter α, β bezw. α', β' die Coordinaten von A bezw. A', und unter π, π' die Grössen $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, so liefert die Gleichung (5) das reelle Kreisbüschel mit den Grenzpunkten AA', also Gleichung (6) den gesuchten Ort, der von den Schnittpunkten entsprechender Kreise des Büschels (5) und des zu ihm hinsichtlich 0 symmetrischen Büschels erfüllt wird. Wie oben schliesst man jetzt:

Die Fixpunktepaare des ∞^1 elliptischen KV, die in einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$ und $[BB']$ vorkommen, erfüllen eine bicirculare C_4 (eventuell eine circulare C_3); dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, zerfällt diese C_4 und zwar in den reellen Kreis K', der A von B' und B von A' harmonisch trennt, sowie in den dazu orthogonalen reellen Kreis K'', hinsichtlich dessen A und A', sowie B und B' inverse Punkte sind; von diesen Kreisen ist natürlich mindestens e i n e r einteilig.

45. Sind P, Q die Fixpunkte einer i n d i r e k t e n hyperbolischen KV des complexen Kreisbüschels mit den Grundpunkten $[AA]$, $[BB']$, so gilt nach Nr. 18 die Beziehung:

$$P\{\mathfrak{j}\mathfrak{k}'\}Q,$$

d. h. Q entsteht aus P, indem man zunächst P vermöge $\mathfrak{j}$ in P', sodann diesen letzteren Punkt mittels $\mathfrak{k}'$ in Q überführt. Offenbar ist $\mathfrak{k}'$ dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, eine Kreisverwandtschaft, nämlich die Inversion an K, und es ist dann das Produkt $\mathfrak{j}\mathfrak{k}'$ gleich der Inversion j, die A mit B' und B mit A' vertauscht;

andernfalls stellt dies Produkt eine höhere birationale und augenscheinlich involutorische Transformation dar.

Die Fixpunktepaare der indirekten hyperbolischen KV des Kreisbüschels mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ sind nach Nr. 18 identisch mit den Gegenpunktepaaren der indirekten elliptischen Transformationen des adjungirten Büschels. Bedeutet also wiederum $\mathfrak{i}$ die Involution, die A mit A' und B mit B' vertauscht, ferner $\mathfrak{t}''$ diejenige involutorische Verwandtschaft, die jedem Punkt P' den zweiten Schnittpunkt der durch ihn gehenden Kreise zuweist, die A von B' bezw. B von A' harmonisch trennen, so sind irgend zwei Punkte P, P', die in der Beziehung

$$P\{\mathfrak{i}\mathfrak{t}''\}P'$$

stehen, Gegenpunkte einer indirekten elliptischen KV, die dem Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ angehört, und umgekehrt.

In jedem von zwei adjungirten Kreisbüscheln sind ∞^1 parabolische indirekte KV enthalten; der Ort der Fixpunkte der letzteren ist für beide Büschel die in Nr. 44 genannte Curve C_4. Bei cyclischer Lage der Punkte $AA'BB'$ zerfällt diese Curve in die oben definirten reellen Kreise K, K''; doch ist für das Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ nur der Kreis K'', sofern er einteilig ist, Fixpunktsort der in dem Büschel enthaltenen parabolischen Substitutionen, während K' den Fixkreis der dem Büschel angehörigen Inversion darstellt: für das adjungirte Büschel vertauschen die Kreise K', K'' ihre Rollen. Die Transformationen $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$ werden nunmehr identisch mit der Inversion an dem Kreise K; also ist $\mathfrak{j}\mathfrak{t}'$ die Inversion an K', und $\mathfrak{i}\mathfrak{t}''$ die Inversion an K''.

In den drei letzten Nummern wurde vorausgesetzt, dass die vier Punkte $AA'BB'$ sämtlich voneinander verschieden sind. Die Fälle, in denen zwei oder mehrere dieser Punkte coincidiren, geben zu trivialen Ausartungen der in Nr. 43—45 besprochenen Punktörter Anlass, mit Ausnahme des Falles, dass ein Berührungsbüschel vorliegt; wir gedenken die Theorie

dieser speciellen Büschel an anderer Stelle ausführlich zu behandeln.

46. Soll zu zwei gleichartigen *K V*: $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ eine mit beiden ungleichartige und harmonisch liegende Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ existiren, soll man also haben:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1} = J, \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}^{-1} = J',$$

worin J, J' Inversionen bedeuten, so folgt

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = J'J, \tag{7}$$

d. h. das Produkt $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ ist ebenso wie $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'$ eine zweispiegelige Verwandtschaft. Da ferner in der Gleichung (7) die Transformation J innerhalb des reellen Kreisbüschels (J, J') beliebig gewählt werden kann, worauf J' eindeutig bestimmt ist, so folgt aus der Zweispiegeligkeit von $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ auch umgekehrt die Existenz einfach unendlich vieler zu $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ harmonischer, mit ihnen ungleichartiger Kreisverwandtschaften:

$$\mathfrak{Q} = J\mathfrak{P} = J'\mathfrak{P}'. \tag{8}$$

47. Wir wollen zwei gleichartige Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, für die das Produkt $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ zweispiegelig ist, als „associirt", ferner die ∞^1 Transformationen $\mathfrak{Q}$ als „das zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ harmonische „Halbbüschel" bezeichnen. Irgend zwei Transformationen $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ des letzteren sind natürlich ihrerseits associirt, und die mit ihnen ungleichartigen, harmonisch liegenden *K V* bilden ein Halbbüschel, dem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ angehören. Diese beiden Halbbüschel kann man als harmonisch bezeichnen, insofern jede Transformation $\mathfrak{R}$ des einen zu jeder Transformation $\mathfrak{S}$ des andern harmonisch ist. In der That, es sei $\mathfrak{Q}_1$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{Q}_1 = J_1\mathfrak{P} = J_1'\mathfrak{P}' \tag{9}$$

definirt, wo J_1, J_1' Inversionen des reellen Kreisbüschels (J, J') sind. Ferner bedeute $\mathfrak{R}$ eine mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ ungleichartige und harmonisch liegende *K V*, so dass also

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R}^{-1} = i, \quad \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}^{-1} = i', \tag{10}$$

endlich $\mathfrak{S}$ eine Transformation des Halbbüschels $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1)$, die also Beziehungen der Form

$$(11) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{S}^{-1} = i_1; \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{S}^{-1} = i_1'$$

genügt, so folgt aus (8)—(10) zunächst

$$(12) \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1^{-1} = i\,i' = J J_1; \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = i_1' i_1 = J J',$$

so dass die Inversionen $J, J', J_1, i, i', i_1, i_1'$ alle demselben reellen Kreisbüschel angehören. Ferner hat man aus (10) und (11)

$$\mathfrak{R} = i\mathfrak{Q}; \quad \mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1} i_1;$$
$$\mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1} = i\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} i_1 = i J i_1;$$

da aber das Produkt dreier Inversionen desselben Büschels wieder eine Inversion liefert, so ist unsere Behauptung erwiesen.

48. Die harmonische Lage zweier gleichartiger *KV* ist ein Specialfall der Associirtheit. Ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}'$ harmonisch, so kann in der Gleichung (7) die Inversion J zwei verschiedenen adjungirten Kreisbüscheln entnommen werden, und es existiren demnach zwei verschiedene zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ harmonische Halbbüschel, und $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ gehören ihrerseits zwei verschiedenen Halbbüscheln gleichzeitig an. Zwei associirte nicht harmonische Verwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sind dagegen stets in einem und nur einem Halbbüschel enthalten, und zwar hat die allgemeinste Transformation desselben die Form $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{R}$ alle ∞^1 zweispiegeligen *KV* derjenigen eingliedrigen Gruppe durchläuft, der auch die Verwandtschaft $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ angehört. Eine solche eingliedrige Gruppe, sowie das reelle Büschel von Inversionen, die zu den ∞^1 Niveaukreisen jener Gruppe gehören, liefern sonach den einfachsten Typus harmonischer Halbbüschel.

Multiplicirt man alle Transformationen eines Halbbüschels vorn oder hinten mit ein und derselben Kreisverwandtschaft, so entsteht wieder ein Halbbüschel.

49. Jedes Halbbüschel ist in einem ganz bestimmten Büschel enthalten. Umgekehrt, jede Transformation des Büschels

$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ gehört zwei und nur zwei Halbbüscheln β, β' an, die ganz innerhalb des gegebenen Büschels liegen; sie sind beide durch die Gleichung $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P}$ gegeben, wo $\mathfrak{R}$ das einemal alle ∞^1 elliptischen, das andremal die hyperbolischen zweispiegeligen Verwandtschaften mit den Fixpunkten A, B durchläuft. Bedeutet $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ ein Feldbüschel, so ist das zu β harmonische Halbbüschel indirekter Kreisverwandtschaften in dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$, das zu β' harmonische Halbbüschel in dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten $[AB']$, $[BA']$ enthalten. Die Berührungsbüschel nehmen auch hier eine Ausnahmestellung ein.

50. Ist eine Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}'$ zu einer mit ihr gleichartigen KV $\mathfrak{P}$ und einer ungleichartigen KV $\mathfrak{Q}$ harmonisch, d. h. bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{J}; \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}^{-1} = J; \quad \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}' = J',$$

worin $\mathfrak{J}$ eine Möbiusinvolution, J und J' Inversionen bedeuten, so ist $\mathfrak{J}$ wegen

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}J'\mathfrak{P}^{-1} = J''$$

eine zu der indirekten Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ harmonische Möbiusinvolution, und umgekehrt. Wir nehmen zunächst an, dass diese indirekte KV keine Inversion, d. h. dass $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht harmonisch seien. Je nachdem nun $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ zwei einteilige Fixkreise oder nur einen besitzt, gibt es nach Nr. 33 zwei Schaaren von je ∞^1 Möbiusinvolutionen der verlangten Art oder nur eine, und jede solche Schaar stellt ein Halbbüschel dar. Nach dem Schlusssatz der Nr. 48 folgt jetzt: Die Kreisverwandtschaften, die zu zwei ungleichartigen nicht harmonischen KV $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig orthogonal sind, bilden vier bezw. zwei Halbbüschel, je nachdem das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ dem hyperbolischen oder elliptischen Typus angehört; zwei dieser Halbbüschel (bezw. eines) sind mit $\mathfrak{P}$, zwei (bezw. eines) mit $\mathfrak{Q}$ gleichartig.

Ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ harmonisch, also $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ eine Inversion, so kann man für $\mathfrak{J}$ eine beliebige der ∞^2 Involutionen wählen, deren Fixpunkte durch jene Inversion vertauscht werden, oder auch, falls die Direktrix K der letzteren einteilig ist, eine der ∞^2 Involutionen, deren Fixpunkte auf K liegen, und es treten in dem vorigen Satze an Stelle der Halbbüschel Systeme von je ∞^2 Kreisverwandtschaften, die zweckmässig als „Halbnetze" bezeichnet werden.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 16. November 1901.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnete die Festsitzung mit folgender Ansprache:

Wenn die Königl. bayer. Akademie der Wissenschaften alljährlich im November zu Ehren ihres Protektors, des regierenden Fürsten von Bayern, eine Festsitzung abhält, so erfüllt sie damit eine Pflicht der Dankbarkeit, denn der Huld und der Unterstützung ihrer erlauchten Protektoren verdankt sie nicht nur ihre Existenz, sondern auch ihre ganze Entwicklung und ihre heutige Prosperität. Mit Begeisterung hat darum auch die Akademie im verflossenen Frühling das 80 jährige Geburtsfest unseres gütigen und geliebten Landesherrn, des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern mit gefeiert und auch heute gedenken wir dankerfüllt der vielfachen Kundgebungen von Wohlwollen, deren sich die Akademie der Wissenschaften unter seiner Regierung zu erfreuen hatte.

Einen neuen Beweis seines Interesses für wissenschaftliche Forschungen hat unser hoher Protektor dadurch geliefert, dass er unserem Mitglied Professor Furtwängler Geldmittel zu archäologischen Ausgrabungen in Aegina zur Verfügung stellte.

Die Vervollständigung der herrlichen Giebelgruppe in der hiesigen Glyptothek durch neue Untersuchungen auf der Insel Aegina war schon ein Lieblingswunsch König Ludwig I., der leider zu Lebzeiten des grossen Kunstmäcens nicht mehr zur Ausführung kommen sollte. Der Entschluss Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten, die Ausgrabungen aufzunehmen, wurde darum von Kunstfreunden und Archäologen dankbarst begrüsst. Der Erfolg der von Professor Furtwängler geleiteten, im Frühling ds. Js. begonnenen und in den letzten Wochen zu Ende geführten Arbeiten hat die anfänglich gehegten Erwartungen weit übertroffen. Eine überraschend grosse Menge von Skulpturen, welche einst das Heiligthum in Aegina schmückten, wurden gefunden. Es kamen insbesondere acht Köpfe und zahlreiche Glieder von Marmorfiguren zu Tage. Ferner wurde die Geschichte der heiligen Stätte in unerwarteter Weise aufgeklärt. Es ergab sich, dass der jetzt noch in Ruinen stehende Tempel mit der ihn umgebenden Terrasse, dem neu entdeckten Altar und dem zur Terrasse heraufführenden Propylon eine Neuanlage ist, die der Zeit der Perserkriege entstammt und sich auf den Resten älterer, ja zum Teil sehr alter Bauten erhebt. Es zeigte sich, dass der Kultus an dieser Stelle ununterbrochen bis in die sogenannte mykenische Epoche zurückreicht. Durch architektonische Schönheit hervorragend sind die Bruchstücke eines alten Tempels des sechsten Jahrhunderts. Zahlreich, mannichfaltig und bedeutend waren kleinere Kunstgegenstände aus den früheren Jahrhunderten des Heiligthums. Vor Allem wichtig war aber, dass es auch gelang die bisher unbekannte Gottheit festzustellen, welcher das Heiligthum gehörte. Es war weder Zeus noch Athene, an die früher fälschlich gedacht worden war, sondern Aphaia, eine mit kretischer Kultur zusammenhängende, der griechischen Frühzeit angehörige und nur in Aegina bekannte Göttin. Dies Resultat ist religionsgeschichtlich von grosser Bedeutung. Endlich wurden in näherer und fernerer Umgebung des Tempels eine Reihe von Bauten freigelegt, die alle der besten klassischen Epoche angehören.

Zu den statutenmässigen Obliegenheiten der Akademie gehört die Begutachtung von wissenschaftlichen Unternehmungen, die im allgemeinen Interesse des Staates durchgeführt werden sollen. In dieser Hinsicht bot sich im vergangenen Jahre eine Aufgabe von ungewöhnlicher Bedeutung. Schon zu wiederholten Malen wurde die Eröffnung der im Speyerer Dome befindlichen und im Jahre 1689 teilweise durch die Franzosen durchwühlten Kaisergräber angeregt, scheiterte aber stets an der Ungunst der Verhältnisse. Durch Herrn Gymnasialprofessor Dr. Praun erhielt die Frage wieder einen neuen Anstoss. Nachdem die kirchliche Oberbehörde ihre Zustimmung zu einer Wiedereröffnung der Grabstätten unserer hervorragendsten Kaiser des Mittelalters erklärt hatte, forderte die kgl. Staatsregierung die Akademie zu einem Gutachten über die wissenschaftliche Bedeutung dieser Untersuchungen auf. Im Einvernehmen mit der historischen Commission erklärte die Akademie, dass es sich bei der Eröffnung der Kaisergräber im Dom zu Speyer nicht nur um eine hochbedeutsame wichtige Frage, sondern auch um eine Pflicht deutschnationaler Pietät handle.

Nach allerhöchster Genehmigung wurde eine Commission mit der Durchführung der Eröffnung der Grabstätten im Speyerer Dom betraut und die Ausgrabungsarbeiten auch ohne Störung zwischen dem 16. August und 3. September vorigen Jahres durchgeführt. Von der Akademie beteiligten sich die Herren Grauert und Ranke, vom Generalkonservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates Herr Dr. Birkner, Assistent der prähistorischen Sammlung, an dieser Arbeit.

Wie aus Zeitungsnachrichten und einer in den Sitzungsberichten der Akademie erschienenen Abhandlung des Herrn Herrn Kollegen Grauert bekannt ist, ergaben die Ausgrabungen nicht nur Aufschlüsse über die Anlage, Erhaltung und teilweise Zerstörung der Kaisergräber, sondern auch wichtige Anhaltspunkte über die Persönlichkeit der einzelnen Kaiser, Könige und Kaiserinnen, sowie über die Gewänder und Kultur der damaligen Zeit. Die irdischen Ueberreste von vier Kaisern

und zwei Kaiserinnen aus dem Geschlecht der Salier, ferner von Philipp von Schwaben, Rudolf von Habsburg, Albrecht von Oesterreich, Adolf von Nassau, von Beatrix der Gemahlin Friedrich Barbarossa's und ihrer Tochter, der kleinen Prinzessin Agnes konnten festgestellt werden. Nur vier dieser Gräber sind von den Franzosen geöffnet und teilweise zerstört worden, die übrigen wurden seit der ersten Bestattung unberührt gefunden.

Durch eine sorgfältige anthropologische Untersuchung gelang es, die menschlichen Skeletteile zu sichten und das Zusammengehörige wieder zu vereinigen, so dass jetzt die Leichenreste der Kaiser Konrad II., Heinrich III. und Heinrich IV., sowie der Kaiserinnen Bertha und Gisela in den Original-Steinsarkophagen, die Skelete von Heinrich V., Philipp von Schwaben, Rudolf von Habsburg, Albrecht von Oesterreich, Adolf von Nassau, der Kaiserin Beatrix und ihrer Tochter Agnes in provisorischen Holzsärgen im Untergeschoss der Sakristei des Domes aufbewahrt sind.

Es ist beabsichtigt, die aufgefundenen Leichen in einer zu erbauenden Gruft in würdiger Weise beizusetzen und über die wissenschaftlichen Ergebnisse der Ausgrabungen durch die Akademie ein grösseres, reich ausgestattetes Werk zu veröffentlichen, wofür die kgl. Staatsregierung ein besonderes Postulat von 20,000 M. in das Budget der 26. Finanzperiode eingestellt hat.

Die regelmässigen Arbeiten der Akademie wurden im vergangenen Jahre in normaler Weise fortgesetzt.

Die Sitzungsberichte und Denkschriften, die Monumenta boica, die Publikationen der historischen Commission und die Annalen der Sternwarte legen Zeugnis ab von der wissenschaftlichen Thätigkeit ihrer Mitglieder. Es stellen diese Schriften freilich nur einen Teil der Arbeitsleistung derselben dar; wollte man alle in Zeitschriften oder in selbständigen Werken veröffentlichten Geistesprodukte unserer Akademiker in unsere eigenen Publikationen aufnehmen, so müsste unser Druckkostenetat mindestens auf das dreifache erhöht werden.

Neben der Akademie entfaltet die historische Commission eine rege Thätigkeit. Sie veröffentlichte im Jahre 1900/01 den III. Band der Jahrbücher des deutschen Reichs unter Heinrich IV. und Heinrich V. (1077—1084) durch Meyer von Knonau, den III. Band der deutschen Reichstagsakten, jüngere Reihe, durch Adolf Wrede, ferner den 12. Band der deutschen Reichstagsakten, ältere Reihe, durch Gustav Beckmann und die drei ersten Lieferungen der Nachträge zur allgemeinen deutschen Biographie.

Durch eine Anzahl regelmässiger staatlicher Zuwendungen und eigene Stiftungen ist die Akademie in der günstigen Lage, sowohl grössere und kostspieligere Arbeiten ihrer eigenen Mitglieder zu unterstützen, als auch andere wissenschaftliche Unternehmungen anzuregen und zu fördern. So erhielt Herr Privatdozent Dr. Lauterborn in Heidelberg aus der Position für naturwissenschaftliche Erforschung des Königreichs im vergangenen Jahr eine dritte Rate von 900 M. für seine Untersuchungen über die thierischen Organismen des Rheines und seiner Nebenflüsse innerhalb des bayerischen Gebietes; Herr Professor Dr. Hofer einen Zuschuss für Beobachtungen über die Verteilung der Thierwelt in den oberbayerischen Seen. Aus dem Erlös der akademischen Schriften erhielten Unterstützungen Herr Dr. Scherman für die Bearbeitung der orientalischen Biographie, Herr Dr. Bulle für sein Werk „Basen griechischer Statuen“, Herr Professor Dr. Riggauer für die Herausgabe eines Werkes über die „Münzen und Medaillen des Gesammthauses Wittelsbach“, und endlich Professor Dr. Solereder für sein Werk „anatomische Charakteristik der Dikotyledonen-Familien“.

Von der Commission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns konnten mit höchster Genehmigung Subventionen verteilt werden an eine Anzahl von Vereinen und Privaten, durch deren eifrige Arbeit die prähistorische Forschung in allen Teilen Bayerns wesentlich gefördert wurde.

Auch das Kuratorium der Liebig-Stiftung trat in diesem Sommer nach mehrjähriger Unterbrechung wieder zusammen

und beschloss aus den Renten dieses ursprünglich 15,200 fl. betragenden und jetzt auf etwa 50,000 M. angewachsenen Fonds die goldene Liebig-Medaille zu verleihen dem Vorstand der kgl. sächsischen landwirthschaftlichen Versuchsstation Möckern. Geh. Hofrat Professor Dr. O. Kellner in Anerkennung seiner vorzüglichen Leistungen auf dem Gebiete der landwirthschaftlichen Fütterungslehre, insbesondere in Hinsicht auf seine grundlegenden Untersuchungen über den Nahrungs- und Energiebedarf, sowie den Stoff- und Energieumsatz der landwirthschaftlichen Nutzthiere. Dem Privatdozenten Dr. Alfred Mitscherlich in Kiel wurde ausserdem zur Fortsetzung seiner „Untersuchungen über die physikalischen Bodeneigenschaften“ und zur Ausführung von Vegetationsversuchen, welche die Beziehungen zwischen Ertragsfähigkeit und Benetzungswärme des Bodens weiter darlegen sollen, eine Gabe von 1000 M. zugesprochen.

Es gereicht mir zur besonderen Freude mitteilen zu dürfen, dass die Münchener Bürger-Stiftung, welche wir unserem unvergesslichen früheren Präsidenten von Pettenkofer verdanken, durch eine hochherzige Schenkung der Brüder des verstorbenen Kommerzienrates Johann Sedlmayr um 25,000 M. vermehrt wurde, so dass dieselbe jetzt die Höhe von 115,100 M. erreicht hat.

Fast die ganzen Renten der Münchener Bürger-Stiftung, sowie der Cramer-Klett-Stiftung für das Jahr 1901 wurden, abgesehen von einer Unterstützung an den ornithologischen Verein für Forschungen über die Wanderung der Vogelarten, dem Münchener Verein für Luftschiffahrt zur Anschaffung eines neuen Ballons und Ausführung wissenschaftlicher Auffahrten zugewiesen. Bereits vor fünf Jahren hatte die Akademie demselben Verein eine grössere Summe zum Ankauf des Kugelballons „Akademie“ überwiesen, mit welchem über 40 wissenschaftliche Hochfahrten unternommen worden sind. Ihre Ergebnisse erstrecken sich vorzugsweise auf meteorologische, geophysikalische und photogrammatische Fragen und fanden die vollste Anerkennung der wissenschaftlichen Kreise, häufig auch das Interesse des grösseren Publikums.

Der im Bau begriffene neue Ballon des Vereins für Luftschiffahrt wird ein Volumen von 1440 cbm fassen, sodass bei Wasserstofffüllung zwei Personen über 6000 m hoch steigen können. Der Ballon wird zunächst der Meteorologie dienen und die vertikalen Ausdehnungen der atmosphärischen Vorgänge zu ermitteln trachten, da sich die Gründe dafür häufen, dass die Witterungsvorgänge auf der Erde vielfach in den höheren Schichten des Luftraumes erzeugt werden und nur Teilerscheinungen der grossen atmosphärischen Circulation sind, wie denn die anhaltende Winterkälte nur in den untersten 100 Metern der Atmosphäre herrscht, welche auch allein im Sommer von der nächtlichen Abkühlung betroffen werden. Ferner sollen die Methoden der photographischen Aufnahmen des Geländes vom Ballon aus zur Ergänzung der Landkarten verbessert werden. Sie haben besondere Bedeutung im Kriegsfalle und bei kompliziertem Gelände, bei Sumpflandschaften und Mündungsdeltas. Die dabei im Ballon gesammelten Erfahrungen sollen auch die Leistungsfähigkeit des Registrierdrachens vergrössern, von dessen Thätigkeit reiche Früchte u. a. auch für unsere Kolonien erhofft werden dürfen. Endlich ist der Ballon auch dazu bestimmt, das Problem der Luftelektrizität weiter aufzuhellen. Es hat sich nämlich als wahrscheinlich erwiesen, dass in der freien Atmosphäre immer eine grosse Menge frei beweglicher elektrisch geladener kleinster Teilchen vorhanden sind, welche elektrisch geladene Körper durch ihre Eigenladung zu neutralisieren vermögen. In 4 Ballonfahrten bis zu 4000 m hat Herr Professor Ebert als Erster bereits erfolgreiche luftelektrische und magnetische Messungen im freien Luftmeere vorgenommen und wird seine Forschungen nunmehr auch in einer Höhe bis zu 6000 m mit dem neuen Ballon fortsetzen. Von den magnetischen Höhenbeobachtungen, welche durch solche Hochfahrten besonders gefördert werden, darf auch insofern ein praktischer Nutzen erwartet werden, als sie voraussichtlich bei trübem Wetter zur Orientierung im Luftmeere gebraucht werden können.

Von den Studien, welche durch die Zinsen der Münchener Bürger-Stiftung pro 1900 ermöglicht worden sind, verdienen jene unseres Mitgliedes Hermann Ebert hervorgehoben zu werden. Man hat beobachtet, dass die Gesammtwassermasse des Genfer Sees, unabhängig von den ab- und zuströmenden Wassermengen, regelmässige pendelartige Schwingungen ausführt, derart, dass sich in Perioden von 73 Minuten die Wasser gegen die westliche Seite des Sees bei Vevey andrängen und dort den Wasserspiegel zuweilen um mehr als Meterhöhe heben, um dann wieder gegen das Ostende, gegen den Rhôneausfluss bei Genf zurückzufluten.

Durch einen geistreichen, aus den Mitteln der Münchener Bürger-Stiftung angeschafften selbstregistrierenden Flutmesser (Limnometer) untersuchte Herr Ebert den Starnberger See auf diese pendelartigen Schwingungen und fand, dass dasselbe Phänomen, durch die Grösse, die Gestalt und das Tiefenrelief unseres Sees entsprechend verändert, sich auch am Starnberger See zeigt. Während 12½ Minuten hebt sich das Wasser bei Starnberg um einige Centimeter, während es sich bei Seeshaupt senkt, um in den nächsten 12½ Minuten bei Seeshaupt anzusteigen. Der Flutmesser, dem Professor Ebert aus eigenen Mitteln noch einen zweiten hinzufügte, ist seit dem 7. Juli vorigen Jahres in Thätigkeit. Es sollen sämmtliche bayerische Seen, zunächst der Chiemsee, untersucht werden, um die für die Erklärung des vielleicht auf meteorologischen Faktoren beruhenden Phänomens notwendige grosse Anzahl von Beobachtungen zu sammeln. Vermuthlich hängen mit dieser Umlegung der grossen Wassermassen innerhalb weniger Minuten die heftigen Unterströmungen zusammen, die unter dem Namen des den Netzen so gefährlichen „Rinnens" allen Kennern des Sees bekannt sind, und welche bereits von Westenrieder in seiner Beschreibung des Starnberger Sees erwähnt werden.

Die Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher chemischer Forschungen wurde im Oktober 1900 durch ihren Begründer, Professor Dr. Wilhelm Königs, um 15,000 M. und im April 1901 durch eine abermalige Schenkung von

5000 M., an welcher sich die Geschwister des Herrn Königs beteiligten, vermehrt. Die Renten aus dieser Stiftung erhielt Herr Professor Dr. Hofmann für Studien über seltenere chemische Elemente, die noch nicht vollendet sind, aber bereits hochinteressante Ergebnisse geliefert haben.

Ueber die Verwendung der Mittel aus der Savigny-, der Zographos- und der Thereianos-Stiftung habe ich bereits früher berichtet.

Neben ihren eigenen Arbeiten hat unsere Akademie die Pflege jener Aufgaben nicht ausser Acht gelassen, welche sie nicht allein, sondern nur in Verbindung mit anderen gelehrten Gesellschaften zu leisten im Stande ist. So wurde die Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, an deren Herausgabe sich neben München die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien und die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften beteiligen, wesentlich gefördert.

Auch der Thesaurus linguae latinae, das gemeinsame Unternehmen der fünf deutschen Akademien, hat seine ersten schweren Anfänge hinter sich. Noch im Sommer des Jahres 1900 wurden die beiden ersten Lieferungen abgeschlossen, deren Herstellung die Probe bildete für die Zweckmässigkeit der Vorbereitungsarbeiten und für die neugeschaffene Arbeitsorganisation. Nach der Sitzung der akademischen Commission im Oktober 1900, an welcher die Herren Excellenz v. Hartel-Wien, Geheimrat Bücheler-Bonn, Geheimrat Diels-Berlin, Professor Leo-Göttingen, Professor Brugmann-Leipzig, Geheimrat v. Wölfflin-München und der Generalredaktor Prof. Vollmer-München teilgenommen haben, wurden drei Monate der Ergänzung des Zettelmaterials, besonders auch für die Eigennamen, gewidmet und dann im Februar ds. Js. die Artikelarbeit wieder aufgenommen. Im Laufe des Sommers konnten zwei weitere Lieferungen erscheinen, die fünfte ist im Manuskript abgeschlossen.

Durch das Entgegenkommen Seiner Excellenz des Herrn Staatsministers Dr. von Landmann konnten die Arbeitsräume im Wilhelminum erweitert und zweckmässig hergerichtet

werden; es war das dringend nötig, denn es arbeiten dort ausser dem Generalredaktor 12 Assistenten und mehrere Hilfsarbeiter.

Einen sehr schätzenswerthen Förderer hat der Thesaurus in den letzten Wochen durch den Tod des Geheimrats Dr. Alfred Pernice in Berlin verloren. Der Verstorbene hat mit unermüdlichem Fleisse gelesen und wo immer Juristisches in Frage kam, aus der Fülle seines Wissens nachgeholfen und gebessert.

Wie gross das Bedürfnis nach dem wissenschaftlichen Lexikon der lateinischen Sprache war, hat die grosse Zahl der Subskriptionen dargethan. Ausser den fünf Akademien, welche Bayern, Preussen, Sachsen und Oesterreich vertreten, haben auch noch die Regierungen von Baden, Württemberg und Elsass-Lothringen ihr Interesse an dem Werke durch namhafte Geldbeiträge bekundet.

Es bleibt nur zu wünschen, dass die gewaltige Arbeit ungestörten Fortgang nehmen könne.

Das Kartell der deutschen und österreichischen Akademien hat am 23. und 24. Mai ds. Js. in Leipzig eine Zusammenkunft veranstaltet, bei welcher mehrere wichtige Fragen zur Erörterung kamen. Die seit einer Reihe von Jahren vom Kartell geförderten Erdbebenforschungen sind durch die Bildung einer internationalen seismologischen Association in neue Bahnen gelenkt worden. Die deutsche Reichsregierung ist dieser Association beigetreten und hat in Strassburg i/E. eine seismische Centralstation errichtet. In der deutschen Reichs-Commission für seismische Forschungen ist Bayern durch den derzeitigen Präsidenten der Akademie vertreten.

Unter diesen Umständen hat das Kartell beschlossen, die eigenen Studien auf diesem Gebiete derart zu gestalten, dass sie sich mit dem Arbeitsprogramm der internationalen seismologischen Association im Einklang halten. Zu diesem Behufe hat die Akademie auf Grund eines Gutachtens ihres Mitgliedes Professor Günther einen Antrag an die kgl. Staatsregierung gerichtet, worin sie um die Bewilligung der Mittel

zur Gründung und Ausstattung von drei seismischen Stationen in Bayern gebeten hat.

Eine andere in ihrer Tragweite wahrscheinlich noch wichtigere Frage wurde von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften in Anregung gebracht. Es ist über die in der Atmosphäre nachweislich vorhandenen elektrischen Strömungen bis jetzt noch ausserordentlich wenig bekannt und namentlich fehlt es noch fast ganz an Beobachtungen über die Intensität und Zerstreuung dieser Ströme. Nach dem Muster der von den Herren Elster und Geitel in Wolfenbüttel construirten Apparate wurde von Herrn Mechaniker Günther in Braunschweig ein neuer Apparat hergestellt, welcher befriedigend fungiert und eine unmittelbare Vergleichung aller Beobachtungen gewährleistet. Es sollen nun an günstig gelegenen Orten, namentlich im Gebirge, in Binnenseen und offenen Ebenen derartige selbstregistrierende Apparate aufgestellt werden. In Bayern beschäftigen sich mit der Zerstreuung der Luftelektrizität bereits zwei Stationen in München und Schaufling, weitere Stationen sind projektiert auf dem Peissenberg, der Zugspitze und an 6 anderen Orten in Deutschland und Oesterreich. Neben der Zerstreuung soll auch das Potentialgefälle und die Niederschlags-Elektrizität an diesen Stationen gemessen werden. Ebenso sind über die Beziehungen der erdmagnetischen Strömungen zur Luftelektrizität regelmässige Beobachtungen wünschenswerth. Die kartellierten Akademien wollen diese Studien zunächst der freien Initiative der beteiligten Forscher überlassen, allein schon jetzt wird ein planmässiges und einheitliches Vorgehen empfohlen. Besonderes Gewicht wird auch auf Beobachtungen im Luftballon und vor Allem an den Tagen der internationalen Auffahrten gelegt.

Die Lösung der in Leipzig angeregten Frage kann freilich nur durch das Zusammenwirken aller Kulturvölker gelöst werden. Und dies führt mich auf die internationale Association der Akademien und gelehrten Gesellschaften. Dieser im Jahre 1900 begründete Verband hielt im April 1901 zu Paris seine erste allgemeine Versammlung ab. Von den 18 dem Verband

angehörigen Corporationen waren 17 und zwar meist durch eine grössere Anzahl von Delegierten vertreten. München hatte die Herren v. Dyck, Krumbacher und Lindemann entsandt. Nicht weniger als 17 Anträge lagen der Versammlung zur Berathung vor. Einige auf die Geschäftsordnung und Statuten bezügliche Vorschläge fanden ihre definitive Erledigung und ebenso wurde der Antrag der Berliner Akademie auf Erleichterung des internationalen Austauschs von Manuskripten angenommen und beschlossen, die Vorschläge der Association zur Kenntnis der beteiligten Regierungen zu bringen. Auch der Antrag der Royal Society in London, einen Bogen des 30. Meridians im tropischen Afrika zu messen, um dadurch eine genauere Kenntnis von der Grösse und Gestalt der Erde zu erlangen, wurde den Regierungen von England, des deutschen Reichs und des Congostaates empfehlend zur Kenntnis gebracht.

Die Mehrzahl der übrigen Anträge wurden zur genaueren Prüfung und Vorbereitung besonderen Fachcommissionen zugewiesen und kommen in der nächsten Hauptversammlung, welche im Jahre 1903 in London stattfindet, zur definitiven Erledigung. Von diesen Anträgen erwähne ich nur eine von der Pariser und Berliner Akademie beabsichtigte, auf circa 140 Bände geschätzte kritische Ausgabe sämmtlicher, zum Teil noch unveröffentlichter Werke von Leibniz, ferner die von der Münchener Akademie befürwortete Ausgabe eines Corpus der griechischen Urkunden des Mittelalters und der neueren Zeit, die Herausgabe einer Realencyclopädie des Islam, eine neue Ausgabe des Mahabarata unter Mitwirkung der ostindischen Regierung, den Plan betreffend, die Organisation der Publikationen über antike Numismatik. Sollten die in Paris beratenen Anträge, wie zu erwarten ist, im Jahre 1903 genehmigt werden, so eröffnet sich dem internationalen wissenschaftlichen Grossbetrieb ein weites und fruchtbares Feld.

Nachdem ich im Vorhergehenden eine flüchtige Uebersicht der vielgestaltigen Thätigkeit unserer Akademie zu geben versucht habe, möchte ich zum Schluss es wagen, die sich

unwillkürlich aufdrängenden Fragen zu beantworten: Wird durch diese Fülle von Arbeit die wissenschaftliche Erkenntnis wesentlich gefördert und übt der Fortschritt der Wissenschaft einen segensreichen Einfluss auf die geistige und sittliche Entwickelung und das materielle Wohlbefinden der Menschheit aus?

Wenn wir die grosse Anzahl der in den Schriften unserer Akademie veröffentlichten Abhandlungen überblicken, so finden wir kaum eine einzige darunter, die nicht irgend eine neue Thatsache oder neuen Gedanken feststellte. In dieser Vermehrung des positiven Wissens beruht aber der wesentlichste Fortschritt der Wissenschaft. Wohl gibt es noch andere und höhere Geistesarbeit, als die neue Thatsachen aufzufinden und zu begründen, nämlich die, das vorhandene Wissen unter allgemeinen Gesichtspunkten zusammenzufassen und daraus Gesetze abzuleiten, die uns in Stand setzen, auch über noch unerforschte Gebiete Vermuthungen aufzustellen und sie durch zielbewusste Forschung aufzuklären. Freilich liegt hier die Gefahr der Entgleisung nur allzu nahe. Die Geschichte jeder Wissenschaft zeigt uns, dass auch die genialsten und für die Forschung fruchtbarsten Theorien und Systeme durch die Entdeckung neuer, unerwarteter Thatsachen umgestürzt wurden. Irrthümer, aus falscher Interpretation des thatsächlichen Wissens hervorgegangen, beherrschten oft viele Jahrzehnte hindurch eine Wissenschaft und führte sie auf Abwege. So vollzieht sich der wissenschaftliche Fortschritt nicht in gerader, sondern in vielfach verschlungener Zickzacklinie. Perioden des Aufschwungs wechseln mit solchen des Stillstandes und sogar des Rückschrittes. Welche Schuttmassen von zertrümmerten Theorien mussten die Naturwissenschaften aus dem Wege räumen, bis sie ihre heutige Höhe erreichten. Aber auch in den Geisteswissenschaften haben sich Anschauungen und Methoden durch die Vermehrung der positiven Kenntnisse gewaltig geändert. Wie viele Theorien und Systeme sind auch hier zusammengebrochen, die einst die Gedanken und Forschungsweise der Fachgelehrten beherrschten!

Obwohl uns die allmähliche Ausbildung der organischen

Wesen in den aufeinander folgenden geologischen Perioden im Grossen und Ganzen ein Streben nach Vervollkommnung erkennen lässt, so haben doch zu verschiedenen Zeiten einzelne Formen eine kaum zu überschreitende Höhe erreicht. Auch die dem menschlichen Genius erreichbare Höhe scheint von einzelnen auserwählten Individuen zu allen Zeiten erklommen worden zu sein. Die grossen Philosophen, Forscher, Künstler, Dichter, Staatsmänner und Kriegshelden des Alterthums stehen wohl in keiner Weise hinter den hervorragendsten Männern der Jetztzeit zurück, aber sie erheben sich als vereinzelte Erscheinungen hoch über ihre Umgebung, während heutzutage das geistige Niveau der Kulturvölker um ein beträchtliches gestiegen ist. Wissenschaftliche Kenntnisse sind heute bis in die tiefen Schichten der Menschheit eingedrungen, unsere ganze Lebensauffassung ist von wissenschaftlicher Erkenntnis durchtränkt.

Mit dem Fortschritt der Wissenschaft haben sich nicht nur die ethischen und moralischen Anschauungen gehoben, die Intoleranz und der Aberglaube gemindert, sondern durch den tiefgreifenden Einfluss der Naturwissenschaften haben sich auch unsere materiellen Lebensbedingungen in fast staunenswerther Weise umgestaltet.

Freilich nicht immer lässt sich eine wissenschaftliche Entdeckung sofort für das praktische Leben ummünzen, sie liegt häufig viele Jahre hindurch brach, bis endlich ihr Werth erkannt wird.

Die Anstalten, an welchen wissenschaftliche Forschung ohne Rücksicht auf ihre praktische Verwerthbarkeit und ohne Zweckmässigkeits-Erwägungen gefördert wird, sind die eigentlichen Werkstätten des wissenschaftlichen Fortschrittes. An der Erhaltung und Kräftigung solcher Anstalten hat darum nicht nur die Wissenschaft, sondern auch der Staat, ja die ganze Menschheit das lebhafteste Interesse.

Sodann verkündigten die Classensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, die der mathematisch-physikalischen Classe.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätiget:

I. zu ordentlichen Mitgliedern:

Die bisherigen ausserordentlichen Mitglieder:

Dr. Carl v. Linde, ordentlicher Professor an der hiesigen technischen Hochschule;

Dr. Johannes Rückert, ordentlicher Professor der Anatomie an der hiesigen Universität;

II. zum ausserordentlichen Mitgliede:

Dr. Johannes Thiele, ausserordentlicher Professor der Chemie an der hiesigen Universität;

III. zum correspondirenden Mitgliede:

Dr. Ewald Hering, ordentlicher Professor der Physiologie an der Universität Leipzig.

Hierauf hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe, Geheimrath Carl v. Voit, die Festrede: „Max v. Pettenkofer zum Gedächtniss", welche in den Schriften der Akademie veröffentlicht wird.

Sitzung vom 7. Dezember 1901.

1. Herr H. Seeliger überreicht zwei Abhandlungen des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. Arthur Korn:

a) „Ueber die natürliche elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktor-Oberfläche;"

b) „Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion."

2. Herr Ferd. Lindemann hält zwei Vorträge:

a) „Zur Theorie der Linienspektra;"

b) „Ueber die Gleichung $x^n = y^n + z^n$."

3. Herr Joh. Ranke macht eine Mittheilung: „Ueber den doppelten Zwischenkiefer des Menschen."

4. Herr Alfr. Pringsheim spricht: „Ueber Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze."

Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Die natürliche Belegung H einer stetig gekrümmten Oberfläche ω ist durch die Bedingungen definiert:

$$1)\qquad \begin{cases} \int\limits_\omega H \frac{d\omega}{r} = \text{const.} = \Gamma \text{ (im Innern von } \omega), \\ \int\limits_\omega H\, d\omega = 1. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $d\omega$ irgend ein Element der Fläche ω und r die Entfernung

$$d\omega \rightarrow (x y z),$$

wenn $(x y z)$ irgend einen variabeln Punkt vorstellt. Die Funktion H ist stets positiv, da Γ positiv,[1]) somit

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_\omega H \frac{d\omega}{r} \right|_a \equiv 4\,\pi\, H \quad (\nu \text{ innere Normale})$$

ebenfalls positiv sein muss.

---

[1]) Setzt man

$$V = \int\limits_\omega H \frac{d\omega}{r},$$

so ist:

$$\int\limits_a \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = 4\pi\Gamma \int\limits_\omega H\, d\omega,$$

$$= 4\pi\Gamma.$$

Ich will in dieser Abhandlung beweisen,[1]) dass H auch nicht $= 0$ sein kann, ein Resultat, das für das Studium der Niveauflächen $\int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} =$ const. von Wichtigkeit ist:

Die natürliche Belegung jeder stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω[2]) ist an jedem Punkte von ω grösser als eine von null verschiedene, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Zahl.

Wir brauchen zum Beweise den folgenden Hilfssatz:

Es sei in der xy Ebene (R) ein Kreis mit dem Radius R um den Anfangspunkt O; $p(x, o)$ ein Punkt der x Axe mit dem Centralabstande $x = r_0$ $(< R)$; $p'(r_0' o)$ der demselben in Bezug auf den Kreis konjugierte Punkt. Wir machen $Oq = \frac{r_0}{3}$, erreichten in q die Senkrechte zur x Axe, welche den Kreis in C und C' schneiden möge, bezeichnen mit N_1 N_2 die Schnittpunkte der Graden Cp und $C'p$ mit dem Kreise und mit BB' die Schnittpunkte der y Axe mit dem Kreise, dann wird die Funktion:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\cos(r\nu)}{r^2} - \frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right\},$$

in der r die Entfernung und Richtung von einem variabeln Punkte des Kreises

$$(\xi\eta) \rightarrow p,$$

r' die Entfernung und Richtung

$$(\xi\eta) \rightarrow p',$$

---

[1]) Den analogen Beweis in der Ebene habe ich in meinem Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348—354 gegeben.

[2]) Wie bei dem analogen Satze in der Ebene (Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348—354) schliessen wir Singularitäten der Fläche ω aus, indem wir stillschweigend voraussetzen, dass die abteilungsweise Monotonität von $\cos(\nu x)$ $\cos(\nu y)$ $\cos(\nu z)$ nicht blos für ω, sondern für jede Fläche gilt, welche durch eine Transformation nach reciproken Radien aus ω entsteht.

ν die innere Normale des Kreises in $(\xi\eta)$ vorstellt, (als Funktion von $(\xi\eta)$ betrachtet) auf dem Bogen $\widehat{N_1 B B' N_2}$ stets positiv sein und zwar

$$\geqq \frac{r_0}{16 R^4}$$

auf dem Teile BB' dieses Bogens.

Die Funktion:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r'}\right)$$

ist für jeden beliebigen Punkt $(\xi\eta)$ des Kreises $= 0$.

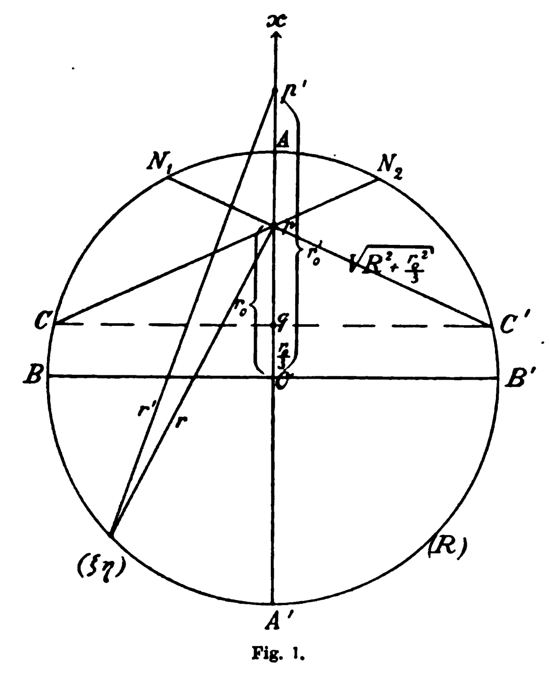


Fig. 1.

Es ist in der That:[1])

$$\frac{r'}{r} = \frac{r_0'}{R} = \frac{R}{r_0},$$

[1]) Man vergleiche Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 349 u. 287.

somit:

$$2)\qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r'}\right)=0,$$

ferner:

$$-\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=-\left(\frac{\cos(r\nu)}{r}-\frac{\cos(r'\nu)}{r'}\right)\frac{1}{r},$$

$$=\frac{r_0^2-R^2}{Rr^3};^{1)}$$

hieraus folgt durch Differentiation nach x (d. i. r_0):

$$3)\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=\frac{2r_0}{Rr^3}+3\cos(rx)\frac{R^2-r_0^2}{Rr^4},\\ \qquad\qquad =\frac{r^2(r_0^2+3R^2)-3(R^2-r_0^2)^2}{2Rr_0r^5},\end{cases}$$

mit Rücksicht darauf, dass:

$$R^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(rx),$$

somit:

$$\cos(rx)=\frac{r^2+r_0^2-R^2}{2rr_0}.$$

Die rechte Seite in 3) kann nur verschwinden, falls:

$$r=\frac{R^2-r_0^2}{\sqrt{R^2+\frac{r_0^2}{3}}}$$

oder:

$$r\cdot\sqrt{R^2+\frac{r_0^2}{3}}=(R+r_0)(R-r_0)=pA'\cdot pA,$$

(wenn A und A' die Schnittpunkte der x Axe mit dem Kreise vorstellen), also nur in den Punkten N_1 und N_2; nur in diesen Punkten kann der Ausdruck 3) das Zeichen wechseln. Lassen wir $(\xi\eta)$ nach A rücken ($r=R-r_0$), so wird die rechte Seite

---

[1]) Man vergleiche die erste Formel ib. S. 350.

$$= -\frac{3R + r_0}{R(R - r_0)^3}, \text{ also negativ,}$$

lassen wir $(\xi\eta)$ nach A' rücken $(r = R + r_0)$, so wird die rechte Seite:

$$= \frac{3R - r_0}{R(R + r_0)^3}, \text{ also positiv,}$$

es ist somit die rechte Seite stets positiv auf dem Bogen $N_1 A' N_2$, negativ auf dem Bogen $N_1 A N_2$. Beschränken wir uns auf den Bogen $B A' B'$, so ist die rechte Seite, da dann stets $r > R$:

$$\overline{\gtrless} \frac{R^2(r_0^2 + 3R^2) - 3(R^2 - r_0^2)^2}{2Rr_0r^5} = \frac{(7R^2 - 3r_0^2)r_0}{2Rr^5},$$

oder da $r < 2R$, $7R^2 - 3r_0^2 > 4R^2$, auch:

$$\overline{\gtrless} \frac{r_0}{16R^4}.$$

Damit ist der Hilfssatz in allen seinen Teilen bewiesen.[1])

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über. Es sei p irgend ein Punkt der gegebenen Fläche ω; wir nehmen die innere Normale der Fläche in p zur x Axe, markieren auf der äusseren Normalen einen Punkt O in der Entfernung r_0 von p und schlagen um O als Centrum eine Kugel mit dem Radius $r_0 + \varepsilon$. Irgend eine von der x Axe begrenzte Halbebene wird aus der Kugelfläche den Halbkreis ABA' und aus ω ein Kurvenstück $pQ..$ ausschneiden; wir werden dadurch, dass wir r_0 und ε genügend klein machen, stets erreichen können, dass dieses Kurvenstück von dem Halbkreis ABA' nur in einem Punkte Q getroffen wird, oder jedenfalls in einer endlichen Zahl von Punkten $Q_1 Q_2 \ldots$;[2])

---

[1]) Der Satz ist ein Analogon des von C. Neumann für die Untersuchung in der Ebene abgeleiteten Hilfssatzes (C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, Abh. der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1887 S. 699, man vgl. mein Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348).

[2]) Infolge der Voraussetzung Anm. S. 426.

wir beschränken uns auf den ersteren Fall, die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall ist ohne jede Schwierigkeit. Wir konstruieren endlich in der dem obigen Hilfssatze entsprechenden Weise (man vgl. die Figur) den dem Punkt p zugeordneten Punkt N auf dem Halbkreise ABA', und es wird für unseren Beweis ganz gleichgültig sein, ob N auf dem Teile AQ oder auf dem Teile QBA' dieses Halbkreises liegt.[1])

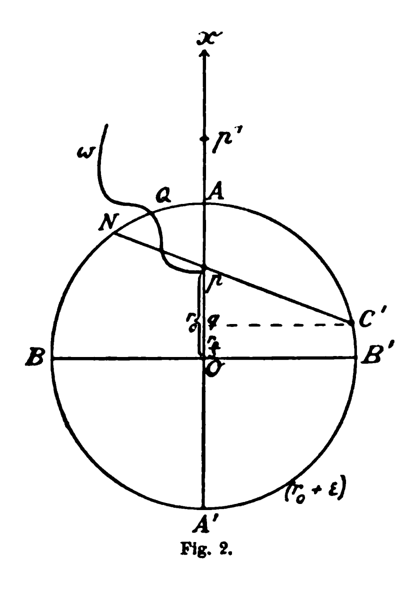


Fig. 2.

Es ist nun:

$$4) \qquad V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

eine Potentialfunktion des von ω und der Kugelfläche begrenzten Gebietes, dessen Querschnitt von $pQNBA'p$ begrenzt wird; es ist somit für jeden Punkt dieses Gebietes:

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{Qp} \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{Qp} \Gamma \frac{\cos(rn)}{r^2}\, d\omega$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{QBA'} \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{QBA'} V \frac{\cos(rn)}{r^2}\, d\omega,$$

wenn der Index Qp die Integration über den der Fläche ω angehörenden Teil der Grenzfläche[2]) andeutet und der Index QBA' die Integration über den Teil der Grenzfläche, welcher der Kugelfläche angehört. Wir können die letzte Gleichung auch so schreiben:

---

[1]) Ist ω überall konvex, so liegt N stets auf dem Teile AQ (bei genügend kleinem r_0 und $\frac{\varepsilon}{r_0}$).

[2]) n die in das Gebiet hineingehende Normale.

$$
5\text{a)}\left\{\begin{aligned}
V-\Gamma= & -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}\frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}(V-\Gamma)\frac{\cos(rn)}{r^2}d\omega \\
& -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r}.
\end{aligned}\right.
$$

Dagegen ist für das Aussengebiet der durch die Abkürzungen Qp und QBA' bezeichneten Flächen:

$$
5\text{b)}\left\{\begin{aligned}
0= & -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}\frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r'}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}(V-\Gamma)\frac{\cos(r'n)}{r'^2}d\omega \\
& -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r'}.
\end{aligned}\right.
$$

Wir bilden die erste Formel für den Punkt p, die zweite für den zu p in bezug auf die Kugelfläche konjugierten Punkt p',[1]) subtrahieren die zweite von der ersten, nachdem wir dieselbe noch mit $\frac{R}{r_0}$ multipliciert haben, dann folgt:

$$
6)\left\{\begin{aligned}
\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p^{2)}= & -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}\frac{\partial V}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right)d\omega \\
& +\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}(V-\Gamma)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)d\omega \\
& +\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right)d\omega,
\end{aligned}\right.
$$

somit unter Berücksichtigung unseres Hilfssatzes:

---

[1]) Durch genügende Verkleinerung von ε können wir stets erreichen, dass p' in dem Aussengebiete liegt, für welche die Formel 5b) gilt.

[2]) Indem wir zunächst den Punkt p variabel annehmen; erst nach der Differentiation soll derselbe unendlich nahe an ω heranrücken.

$$
7) \quad \left\{
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p \gtreqless & \frac{V_0 r_0}{32 (r_0 + \varepsilon)^2} \\
& - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{QN} (\Gamma - V) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos (r\nu)}{r^2} - \frac{R}{r_0} \frac{\cos (r'\nu)}{r'^2} \right) d\omega \\
& + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{Qp} \frac{\partial V}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{r'} \right) d\omega,
\end{aligned}
\right.
$$

wenn V_0 den kleinsten Wert von $\Gamma - V$ auf dem durch BA' dargestellten Teile der Kugelfläche darstellt. Von der Fläche QN ist in der zweiten Zeile nur der zwischen dem Pole A und dem Breitenkreise N gelegene Teil zu berücksichtigen.[1])

Wir wollen zeigen, dass wir die dritte Zeile

$$
= (\text{endliche Konstante}) \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p + E_1
$$

machen können, wo E_1 durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Es folgt dies leicht, da $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ an ω eindeutig und stetig ist, ferner bei genügend kleinem ε:

$$
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{r'} \right) = - \frac{\cos (r\nu)}{r^2} - \frac{\cos (r'\nu)}{r'^2} \frac{R^2}{r_0^2} + \frac{\varrho}{r} \cdot a,
$$

wo ϱ die Entfernung $d\omega \longrightarrow p$ und a eine endliche Grösse vorstellt, unter Berücksichtigung des Satzes IVa S. 33 meines Lehrbuches der Potentialtheorie I und der Bemerkung, dass das Integral:

$$
\int\limits_{Qp} \frac{\varrho}{r^2} d\omega
$$

durch Verkleinerung von ε unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann (da $\varrho \gtreqless$ endl. Konst. r).

---

[1]) Bei überall konvexen Flächen fällt also die zweite Zeile fort.

Die zweite Zeile in der Formel 8) formen wir um, indem wir bedenken, dass:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=-\frac{\cos(\nu x)-3\cos(rx)\cos(r\nu)}{r^3}$$

$$-\frac{R^3}{r_0^3}\frac{\cos(\nu x)-3\cos(r'x)\cos(r'\nu)}{r'^3};$$

somit ist dieselbe, da wir $\cos(\nu x)$ durch Verkleinerung von ε beliebig nahe an (-1) heranrücken lassen können:

$$\gtreqless \frac{3}{4\pi}\int\limits_{QN}(\Gamma-V)\left[\frac{\cos(rx)\cos(r\nu)}{r^3}+\frac{R^3}{r_0^3}\frac{\cos(r'x)\cos(r'\nu)}{r'^3}\right]d\omega,$$

oder, da wir in der Gleichung:

$$\Gamma-V=r\left(-\frac{\partial V}{\partial \nu}\cos(r\nu)^{1)}+\varepsilon'\right)$$

auf QN die Grössen ε' und $\cos(r\nu)$ durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken können,

$$\gtreqless E_2,$$

wo E_2 durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann; wir erhalten somit:

$$\text{8)}\qquad \text{endl. Konst.}\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p \gtreqless \frac{V_0 r_0}{32(r_0+\varepsilon)^2}+E_1+E_2$$

und durch Uebergang zur Grenze ($\varepsilon=0$):

$$\text{9)}\qquad \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p \gtreqless \frac{4\pi}{N},$$

wo:

$$\text{10)}\qquad N=\text{endl. Konst.}\,\frac{128\,\pi\, r_0}{V_0}$$

---

[1]) ν innere Normale der Kugelfläche.

eine endliche Konstante vorstellt, da jetzt V_0 den kleinsten Wert von $\Gamma - V$ auf der Halbkugel BA' im Falle $\varepsilon = 0$ repräsentiert, somit der Ungleichung:

$$V_0 > 0$$

in strengem Sinne genügt (Zusatz 4 zu VII S. 203 meines Lehrbuches der Potentialtheorie I). Wegen der Identität:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = 4\pi H$$

folgt jetzt:

11) $$H \gtrless \frac{1}{N}$$

und damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Es sei ω die stetig gekrümmte Oberfläche eines (auch aus einer endlichen Zahl räumlich getrennter Teile zusammengesetzten) magnetisierbaren Mediums τ, und es seien innerhalb des Aussenraumes irgend welche feste magnetische Ursachen gegeben, deren Potential wir mit V bezeichnen wollen. Das Gesammtpotential jener festen magnetischen Ursachen und der durch sie in τ inducierten magnetischen Verteilung ist dann:

$$1) \qquad Q = \varkappa \int\limits_{\omega} \frac{\partial (Q + V)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r},$$

wenn $d\omega$ irgend ein Element der Oberfläche ω (mit der inneren Normalen ν) und r die Entfernung von $d\omega \rightarrow$ einem variablen Punkt $(x y z)$ des Innen- oder Aussenraumes vorstellt, auf den sich die Formel (1) bezieht; $\varkappa$ ist eine dem magnetisierbaren Medium eigentümliche Konstante, positiv für die sogenannten magnetischen, negativ für die sogenannten diamagnetischen Medien.

Man kann die Aufgabe für die unbekannte Funktion Q auch so formulieren:

Es ist eine Potentialfunktion Q_i des Innenraumes und eine Potentialfunktion Q_a des Aussenraumes so zu bestimmen, dass:

$$2) \qquad \left.\begin{array}{r} (1 + 4\pi\varkappa) \dfrac{\partial Q_i}{\partial \nu} - \dfrac{\partial Q_a}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa \dfrac{\partial V}{\partial \nu} = 0, \\ Q_a = Q_i \end{array}\right\} \text{ an } \omega.$$

Man mag die alten Fernwirkungstheorieen oder eine der neueren Theorien des Elektromagnetismus zu grunde legen, immer wird man zu diesem mathematischen Problem geführt.

Dieses Problem bildet einen speciellen Fall des allgemeinen Problemes, eine Potentialfunktion U_i des Innenraumes und eine Potentialfunktion U_a des Aussenraumes so zu bestimmen, dass:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial U_a}{\partial \nu} - \frac{\partial U_i}{\partial \nu} = \lambda\left(\frac{\partial U_a}{\partial \nu} + \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\right) - 2f, \\ U_a = U_i \end{array}\right\} \text{ an } \omega,$$

wo λ eine gegebene reelle Zahl und f eine eindeutige und stetige, gegebene Funktion der Stelle auf ω vorstellt.[1])

Ist in dem Problem 3)

$$4)\qquad \text{abs. } \lambda < 1,$$

so ist, nach den Untersuchungen in Nr. 5 meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie, die Existenz einer und nur einer Lösung U gesichert, und die Lösung ist darstellbar durch die Reihe:

$$5)\qquad U = \mathfrak{B}_0 + \lambda\mathfrak{B}_1 + \lambda^2\mathfrak{B}_2 + \ldots,$$

wenn:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}_0 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega} f\,\frac{d\omega}{r}, \\ \mathfrak{B}_j = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\left[\frac{\partial \mathfrak{B}_{j-1,a}}{\partial \nu} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{j-1,i}}{\partial \nu}\right]\frac{d\omega}{r}\cdot (j = 1, 2\ldots). \end{array}\right.$$

U besitzt in ganzer Erstreckung des Innenraumes sowohl als auch in ganzer Erstreckung des Aussenraumes eindeutige und stetige Ableitungen nach x, y, z.

Wir können nun das Problem der magnetischen Induktion leicht auf ein Problem von der Form 3) zurückführen und durch die Gleichungen 5) 6) somit zu einer allgemeinen

---

[1]) Von der wir überdies voraussetzen, dass $\int\limits_{\omega} f\,\frac{d\omega}{r}$ Potentialfunktion des Innen- und Aussenraumes ist.

Lösung des Problemes gelangen. Diese Untersuchung bietet zugleich einen interessanten Fall der Anwendung der Poincaré'schen Fundamentalfunktionen. —

Um das Problem 2) auf die Form 3) zu bringen, konstruieren wir das Potential der Fläche ω mit der Dichte H:

$$\Phi = \int_\omega H \frac{d\omega}{r} \tag{7}$$

in solcher Weise, dass im ganzen Innenraum von ω:

$$\Phi \equiv \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} V \text{ (im Innern von } \omega), \tag{8}$$

und wir setzen:

$$U = Q + \Phi, \tag{9}$$

dann lassen sich die Formeln 2) in der folgenden Art und Weise schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U_a}{\partial \nu} - \frac{\partial U_i}{\partial \nu} = \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial U_a}{\partial \nu} + \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\right) + \frac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right), \\ &\qquad U_a = U_i \end{aligned}\right. \tag{10}$$

an ω.

Damit ist die gewünschte Form 3) erhalten; überdies ist für magnetische Medien $\varkappa > 0$, somit:

$$\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} < 1, \tag{11}$$

die Formeln 5) 6) geben uns daher die Lösung U, wenn man in denselben:

$$f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right) \tag{12}$$

setzt, in Gestalt einer unendlichen Reihe, die rascher konvergiert, als eine geometrische Reihe mit dem $j$ten Gliede:

$$\left(\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\right)^j$$

und hierauf nach 9):

13) $$Q = U - \Phi.$$

Nachdem so zunächst die Existenz der Lösung allgemein bewiesen ist, gehen wir zu der Entwickelung nach Poincaré'schen Fundamentalfunktionen über. Es ist nach Satz Vb S. 58 in Nr. 5 meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie:

14) $$U = C_0 \Phi_0 + C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + \dots$$

innerhalb des Innen- und Aussenraumes von ω, wenn Φ_0 Φ_1 $\Phi_2 \dots$ die Poincaré'schen Fundamentalfunktionen [1]) sind, welche den Polen:

$$\lambda = \lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots$$

der Lösung des Problemes:

$$\frac{\partial u_a}{\partial \nu} - \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \lambda \left(\frac{\partial u_a}{\partial \nu} + \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{1 + 2\pi\varkappa} \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} \right),$$

$$u_a = u_i$$

an ω

entsprechen. Die Konstanten C_0 C_1 C_2 ... in der Entwickelung 14) sind dabei durch die Formeln gegeben:

15)[2]) $$C_j = -\int_\omega U \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} d\omega = \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1} \int_\omega U \frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} d\omega.$$

---

[1]) Die Potentialfunktionen Φ_{ji} Φ_{ja} des Innen- resp. Aussenraumes von ω haben die wichtigen Eigenschaften ($j = 1, 2 \dots$):

a) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} - \dfrac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} = \lambda_j \left(\dfrac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \dfrac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} \right), \\ \Phi_{ja} = \Phi_{ji} \end{array} \right| \text{ an } \omega;$$

b) $$\int_i \left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 1,$$

während Φ_0 das Potential der natürlichen Belegung vorstellt.

[2]) für $j = 1, 2 \dots$; während:

$$C_0 = \frac{1}{4\pi} \int_\omega \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} d\omega.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung 10) können wir zeigen, dass wir zur Bestimmung der C_j die Lösung U des Problems 10) gar nicht zu kennen brauchen. Es ist nach der ersten Gleichung 10):

$$\frac{\partial U_a}{\partial \nu} = (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial U_i}{\partial \nu} + \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right),$$

somit:

$$C_j \equiv \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega U \frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu}\, d\omega \equiv \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi_j \frac{\partial U_a}{\partial \nu}\, d\omega,$$

$$= (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi_j \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\, d\omega + \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi_j \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right) d\omega,$$

$$= -(1 + 4\pi\varkappa)\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\, C_j + \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi \left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right) d\omega,$$

oder:

$$C_j = \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int\limits_\omega \Phi \left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right) d\omega,$$

$$= -\frac{2}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int\limits_\omega \Phi \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\, d\omega,$$

oder schliesslich:

$$16) \quad C_j{}^{1)} = -\frac{2}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int\limits_\omega \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\, \Phi_j\, d\omega.$$

Wir können somit die Lösung Q des Problemes der magnetischen Induktion allgemein innerhalb des Innenraumes und Aussenraumes von ω in der Form darstellen:

$$17) \qquad Q = -\Phi + C_0 \Phi_0 + C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + \ldots,$$

---

[1]) für $j = 1, 2 \ldots$; während nach wie vor:

$$16') \qquad C_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}\, d\omega.$$

wo Φ die Lösung des Dirichlet'schen Problemes für den Innen- resp. Aussenraum mit den Randwerten

$$\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\, V \text{ an } \omega$$

vorstellt und die Konstanten $C_0 C_1 C_2 \ldots$ durch die Gleichungen 16) (und 16') bestimmt sind.

Im Falle der Kugel, in dem die Poincaré'schen Fundamentalfunktionen mit den Laplace'schen Funktionen

$$\frac{Y_j}{r^{j+1}} \text{ resp. } Y_j \cdot r^j$$

proportional werden, führt uns die Gleichung 17) auf die bekannte Lösung in der Form einer nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe.

Zur Theorie der Spectrallinien.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 16. Dezember.*)

Das Auftreten discreter Linien im Spectrum eines glühenden Gases erklärt man wohl allgemein (zunächst nach Analogie mit akustischen Vorgängen) durch sogenannte Eigenschwingungen der Moleküle. Wie aber diese Schwingungen zu Stande kommen, darüber scheint keine feste Ansicht zu herrschen; ob das Molekül als ganzes, oder die einzelnen Atome desselben oder endlich das Innere des kugelförmig gedachten Atoms diese Schwingungen ausführt, vermag man nicht zu sagen.

Letztere Ansicht hat besonders Lord Kelvin vertreten;[1] er construirt ein aus concentrischen Kugelschalen bestehendes Modell eines Atoms; diese Kugelschalen sind durch elastische Kräfte an einander und an den umgebenden Lichtäther gebunden. Die Schwingungen des Aethers theilen sich diesen Kugelschalen mit; solche von gewisser Wellenlänge werden gänzlich absorbirt und bedingen das Auftreten der Linien im Spectrum. Man hat hierbei für das Innere des Moleküls eine sehr grosse Anzahl von Constanten zur Verfügung, und kann es mittelst derselben natürlich (wenn auch bisher ein numerischer Versuch nicht gemacht wurde) so einrichten, dass die Rechnung sich den Erscheinungen ungefähr anpasst.

Die innere Construction eines Atoms würde hiernach so complicirt ausfallen, dass man sich nur ungern zur Annahme

---

[1] Sir William Thomson: Lectures of molecular dynamics and the ware theory of light, Baltimore 1884.

dieser Hypothese entschliessen kann, wenngleich es wohl die einzige ist, welche die Erscheinungen im Spectrum eines Gases rein mechanisch verständlich macht.

Helmholtz hat für den Brechungs-Exponenten in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge ähnliche Ausdrücke aufgestellt,[1]) wie Lord Kelvin; aber er setzt dabei eine Reibung zwischen dem Lichtäther und der Oberfläche des Atoms voraus, also einen Vorgang, bei dem lebendige Kraft verloren ging.

In der elektrischen Lichttheorie[2]) geht man von der Annahme verschiedener Gattungen von Jonen aus, die das Atom begleiten und deren jedes eine ihm eigenthümliche Eigenschwingung besitzt, also von einer noch complicirteren Vorstellung, als wie sie dem Thomson'schen mechanischen Modelle zu Grunde liegt.

Schon früher habe ich der Ueberzeugung Ausdruck gegeben,[3]) es sei die Hypothese von Lord Kelvin nur als Ersatz für die Thatsache anzusehen, dass die Wellenlängen der Linien eines Spectrums als Wurzeln einer transscendenten Gleichung aufzufassen sind, die von der inneren Natur des Atoms abhängt; es war mir aber erst nach vielen vergeblichen Versuchen möglich, dieser Ueberzeugung eine mathematische Unterlage zu geben und sie durch Vergleichung mit der Erfahrung zu prüfen.

Im Folgenden gehe ich bei den entsprechenden Ableitungen von der elastischen Lichttheorie aus, da die in den Grenzbedingungen liegenden Schwierigkeiten, welche dieser Theorie entgegenstehen, gerade beim vorliegenden Probleme fortfallen (vgl. § 2). Ich denke mir eine im Lichtäther ruhende homogene Kugel, deren Inneres beliebige transversale und longitu-

---

[1]) Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd, 1, p. 213 ff.

[2]) Vgl. z. B. p. 356 ff. in Drude's Lehrbuch der Optik. Leipzig 1900.

[3]) Ueber Molekularphysik. Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., Jahrgang 19, 1888. Einen grossen Theil dieser meiner älteren Entwicklungen würde ich jetzt natürlich ganz anders fassen, insbesondere alles, was über den Magnetismus gesagt ist. Ich hoffe, darauf bald zurückkommen zu können.

dinale Oscillationen ausführt und frage, wie sich diese Oscillationen auf den Lichtäther übertragen, und zwar speciell unter der Annahme, dass vom Mittelpunkte der Kugel aus nach allen Seiten volle Symmetrie herrsche. Für die zulässigen Wellenlängen ergeben sich dabei verschiedene transscendente Gleichungen, deren Wurzeln nicht allgemein angegeben werden können. Es lassen sich aber aus ihnen Beziehungen zwischen den Spectren verschiedener Elemente unter gewissen vereinfachenden Annahmen ableiten, die ich sodann an einer Reihe von Beispielen geprüft und als annähernd erfüllt befunden habe (§ 7 — § 13).

Dabei habe ich den von verschiedenen Autoren im Spectrum gewisser Elemente bemerkten „Serien“ besondere Beachtung geschenkt und zum Schlusse (§ 14) erörtert, wie man etwa das Auftreten dieser Serien (unter gewissen Annahmen über die vorkommenden Constanten) als eine Eigenschaft der Wurzeln der betreffenden transscendenten Gleichungen zu erkennen vermag.

Das Auftreten der Serien, welche man sonst durch andere Hypothesen zu erklären versucht hat,[1]) ist hierdurch wenn nicht völlig aufgeklärt, so doch mit den nachfolgenden theoretischen Erörterungen in Einklang gebracht.

Besonderes Gewicht lege ich auf die Einfachheit der gemachten Voraussetzungen. Jedenfalls dürfte es gerechtfertigt erscheinen zu versuchen, wie weit man mittelst dieser einfachen Annahmen den beobachteten Erscheinungen mathematisch gerecht werden kann.

§ 1. Darstellung elastischer Schwingungen.

Die elastischen Schwingungen eines kugelförmig begrenzten Raumes hat Clebsch eingehend studirt, und die Lösung auf die Anwendung der Kugelfunctionen und Bessel'schen Func-

---

[1]) Vgl. Riecke, Zur Kritik der Serienschwingungen eines Linienspectrums. Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 1, 1900.

tionen zurückgeführt.[1]) Seine Untersuchungen beziehen sich zunächst auf den äussern Raum der Kugel, sind aber leicht in analoger Weise für das Innere durchzuführen. Die Theorie der Bessel'schen Functionen war damals noch wenig entwickelt; deshalb ist die Bezeichnungsweise nicht übersichtlich.

Die elastischen Schwingungen des Innern einer Kugel hat Clebsch unter der Annahme gleichförmig vertheilter Druckkräfte ebenfalls eingehend behandelt, und zwar besonders die betreffenden longitudinalen Schwingungen.[2])

Bezeichnet man mit u, v, w die Verrückungen eines Punktes mit den Coordinaten x, y, z, so lassen sich nach Clebsch diese allgemeinsten Verrückungen als Summen von vier speciellen Werthsystemen darstellen, so dass

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\
v &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \\
w &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Hierbei bestimmen u_1, v_1, w_1 eine sogenannte longitudinale Schwingung, indem

$$u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial P}{\partial z}, \tag{2}$$

wobei P der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta P = b^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

genügt. Die Grössen $u_2, v_2, w_2, \ldots.$ gehören zu transversalen Schwingungen; es ist

$$
\begin{aligned}
u_2 &= 0, & v_2 &= -\frac{\partial U}{\partial z}, & w_2 &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\
u_3 &= \frac{\partial V}{\partial z}, & v_3 &= 0, & w_3 &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\
u_4 &= -\frac{\partial W}{\partial y}, & v_4 &= \frac{\partial W}{\partial x}, & w_4 &= 0;
\end{aligned} \tag{4}
$$

---

[1]) Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. Crelle's Journal, Bd. 61, 1861.

[2]) Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862, p. 50 ff.

und die Functionen U, V, W sind Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi. \tag{5}$$

Die Constanten a^2 und b^2 sind die Elasticitäts-Constanten des betrachteten elastischen Mediums. Für jede transversale Schwingung ist die räumliche Dilatation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Die allgemeinste Schwingung setzt sich so aus einer longitudinalen Schwingung (2) und drei speciellen transversalen Schwingungen (4) zusammen.

§ 2. Die longitudinalen Schwingungen der Kugel.

Wir führen mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\psi & (0 < r < \varrho) \\ y &= r \sin\vartheta \sin\psi & (0 < \psi < 2\pi) \\ z &= r \cos\vartheta & (0 < \vartheta < \pi) \end{aligned} \tag{7}$$

Polarcoordinaten ein und bezeichnen mit ϱ den Radius der Kugelfläche, welche das schwingende Medium begrenzt. Dann erscheint nach der von Henneberg gegebenen Darstellung, der wir hier folgen, die allgemeinste Lösung der Gleichung (3) in der Form

$$\begin{aligned} P = \sum_n \sum_m \sum_q \{&\text{cosin}\, nbt\, [A_{mnq} \,\text{cosin}\, m\psi + A'_{mnq} \sin m\psi] \\ &+ \sin nbt\, [B_{mnq} \,\text{cosin}\, m\psi + B'_{mnq} \sin m\psi]\} \\ &P_m^q(\cos\vartheta)\, R_{q+\frac{1}{2}}(nr). \end{aligned} \tag{8}$$

Hierbei bedeuten A_{mnq}, A'_{mnq}, B_{mnq}, B'_{mnq} Constante, die durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind; $P_m^q(\cos\vartheta)$

---

[1] Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel ohne Einwirkung von äusseren Kräften. Annali di matematica pura ed applicata, Serie II, t. 9, 1879.

bezeichnet in bekannter Weise eine Kugelfunction, d. h. eine Lösung der Gleichung

$$(9) \qquad \frac{d^2 P_m^q}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d P_m^q}{d\vartheta} + \left[q(q+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_m^q = 0;$$

und $R_{q+\frac{1}{2}}$ ist eine Bessel'sche Function,[1]) d. h. eine Lösung der Gleichung

$$(10) \qquad \frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R}{d r} + \left[n^2 - \frac{q(q+1)}{r^2}\right] R = 0,$$

und zwar diejenige, welche für $r = \varrho$ nicht unendlich wird.

In der Summe (7) ist mit m ein ganzzahliger Index bezeichnet; die Indices n und q können ebenfalls ganze Zahlen sein, können aber als Wurzeln transscendenter Gleichungen bestimmt werden.

Für uns ist der Fall von Wichtigkeit, wo die Function P nur von der Zeit t und dem Radius r abhängt. Um dies zu erreichen, haben wir $m = 0$ mal $q = 0$ zu nehmen.

$$(11) \qquad P = \sum_n [A_n \operatorname{cosin} n b t + B_n \sin n b t]\, R_{\frac{1}{2}}(n r).$$

Die Verrückung in Richtung des Radius ist gleich

$$(12) \qquad \frac{\partial P}{\partial r};$$

der auf die Kugeloberfläche ausgeübte normale Druck ist gleich

$$2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (b^2 - 2a^2)\Delta P$$

$$(13) \qquad = 2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (b^2 - 2a^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

$$= -\sum_n [A_n \cos n b t + B_n \sin n b t]\left[\frac{4a^2}{r^2}\frac{dR}{dr} + n^2 b^2 R\right],$$

---

[1]) Es ist $R_{q+\frac{1}{2}}$ die von Heine mit ψ_q bez. Ψ_q bezeichnete Function (bis auf einen constanten Factor).

wenn hierin r durch ϱ ersetzt wird, und wieder $n\varrho$ das Argument der Function R ist.

Besonders ausgezeichnet sind diejenigen Schwingungen, bei denen die Oberfläche der Kugel in absoluter Ruhe bleibt, d. h. bei denen die Bedingung

$$\text{(14)} \qquad \frac{d R_{q+\frac{1}{2}}(n\varrho)}{d\varrho} = 0 \text{ oder } R'_{q+\frac{1}{2}}(n\varrho) = 0$$

erfüllt ist. Ist dann ausserdem

$$\text{(15)} \qquad n^2\varrho^2 - q(q+1) = 0,$$

so verschwindet auch der auf die Oberfläche ausgeübte Druck.[1]) Die aus (14) und (15) folgende Gleichung

$$\text{(16)} \qquad R'_{q+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{q(q+1)}\right) = 0$$

stellt dann eine transscendente Gleichung für q dar; und zu jeder Wurzel derselben gehört nach (15) ein Werth von n, durch welchen nach (8) die Schwingungsdauer T_n der betreffenden Oscillation bestimmt wird:

$$\text{(17)} \qquad T_n = \frac{2\pi}{nb}.$$

In Folge der Bedingungen (14) und (15) reducirt sich, da φ nicht vorkommt, die Doppelsumme (8) auf eine einfache Summe. Die hier auftretende Gleichung (16) ist bisher nicht näher untersucht worden.

In dem Falle $q = 0$ wird

$$R_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin n\varrho}{n\varrho}.$$

Derselbe ist von Clebsch und Henneberg a. a. O. eingehend behandelt. Die transscendente Gleichung (13) lautet dann

---

[1]) Der Druck würde auch verschwinden, wenn $R(n\varrho)$ und $R'(n\varrho)$ gleichzeitig verschwinden; dann aber würden nach (10) sämmtliche Differentialquotienten von $R(n\varrho)$ gleich Null sein; dieser Fall ist deshalb auszuschliessen.

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{cotang} n\varrho = \frac{k^2 - n^2\varrho^2}{k^2 n\varrho}, \qquad k^2 = \frac{4b^2}{a^2}.$$

Die Wurzeln $n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots.$ liegen in folgenden Intervallen

$$0 < n_0 < n_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \frac{3\pi}{2\varrho} < n_2 < \frac{2\pi}{\varrho}, \quad \frac{5\pi}{2\varrho} < n_3 < \frac{3\pi}{\varrho}, \ldots.$$

Sie nähern sich mit wachsendem Index dem ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{\varrho}$, und zwar um so mehr, je kleiner k^2 ist. Der Druck auf die Oberfläche ist natürlich jetzt nicht gleich Null.

§ 3. Die transversalen Schwingungen der Kugel.

Es genügt hier, von den drei Functionen U, V, W, welche durch (4) eingeführt wurden und der Gleichung (5) genügen, eine zu betrachten. Beschränken wir uns wieder auf solche Schwingungen, die nur von r, nicht von ϑ und ψ abhängen, so wird, wie in (11):

$$\text{(19)} \qquad U = \sum_n \left[C_n \operatorname{cosin} nat + D_n \sin nat\right] R_{\frac{1}{2}}(nr),$$

wenn mit R wieder ein Integral der Gleichung (10) bezeichnet wird. Die entsprechenden Verrückungen berechnen sich darnach gemäss den Gleichungen (4); sie bestehen in kleinen Oscillationen nur die ruhende x-Axe; jede zum Mittelpunkte concentrische Kugelschale bewegt sich nur in sich.

Der Normaldruck auf die Oberfläche der Kugel ist gleich Null. Innerhalb der Oberfläche selbst aber treten in Folge der Schwingung Druckkräfte auf, welche durch die beiden zu einander rechtwinkligen Componenten

$$\text{(20)} \qquad -a^2 \sin\vartheta \sin\psi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad -a^2 \cos\vartheta \cos\psi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

für $r = \varrho$ gemessen werden (vgl. Henneberg a. a. O.).

Sollen diese Druckkräfte insbesondere verschwinden, so muss $R''(n\varrho) = 0$ sein, d. h. nach (10): es muss die Gleichung

$$\text{(21)} \qquad 2n\varrho R'(n\varrho) + \left[n^2\varrho^2 - q(q+1)\right] R(n\varrho) = 0$$

erfüllt sein. Besonders ausgezeichnet ist der Fall, wo wieder die Begingungen (14) und (15) gleichzeitig erfüllt sind, und wo in Folge dessen auch die Gleichung (21) Gültigkeit hat. Dann bleibt jeder Punkt der Oberfläche in absoluter Ruhe. Die Schwingung im Innern der Kugel ist dann aber, da q von Null verschieden ist, auch von ϑ abhängig.

Besonders einfach ist der Fall $q = 0$; dann wird

$$R_{\frac{1}{2}}(nr) = \frac{\sin nr}{nr}. \tag{22}$$

Soll jetzt der Druck gleich Null sein, so ergibt sich die Gleichung (vgl. Henneberg a. a. O.)

$$\text{cotang}\, n\varrho = \frac{2 - n^2 \varrho^2}{2 n \varrho}. \tag{23}$$

Soll aber die Oberfläche in Ruhe bleiben, so muss

$$\text{tang}\, n\varrho = n\varrho \tag{23a}$$

werden; also wieder zwei transscendente Gleichungen für n. Die Wurzeln $n_0, n_1, n_2, \ldots$ nähern sich bezw. den geraden und ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2\varrho}$.

§ 4. Wirkung einer schwingenden Kugel auf den Lichtäther.

Wegen der in der Elasticitäts-Theorie des Lichtes vorausgesetzten Incompressibilität des Aethers können am Lichtäther nur transversale Wellen existiren. Die allgemeinste Schwingung desselben ist daher nach (1) und (4) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{z}{r}\frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{y}{r}\frac{\partial W_1}{\partial r}, \\ v &= \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{x}{r}\frac{\partial W_1}{\partial r} - \frac{z}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}, \\ w &= \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{y}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{x}{r}\frac{\partial V_1}{\partial r} \end{aligned} \tag{24}$$

dargestellt, wo U_1, V_1 W_1 der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_1^2 \Delta \varphi \tag{25}$$

genügen. Sollen sich die Schwingungen der Kugel nach aussen in den Lichtäther fortsetzen, so haben wir den letztern als einen Raum zu behandeln, der im Endlichen durch die Kugelfläche $r = \varrho$ begrenzt wird. Die Functionen U_1, V_1, W_1 werden daher genau wie vorhin bestimmt; nur die Constanten sind andere. Es ist z. B.

$$U_1 = \sum_m \sum_n \sum_q \{\text{cosin}\, n_1 a_1 t\, [E_{mnq} \cos m\psi + E'_{mnq} \sin m\psi] + \sin n_1 a_1 t\, [F_{mnq} \cos m\psi + F'_{mnq} \sin m\psi]\} R^{(1)}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r)\, P^q_m (\cos \vartheta).$$

Die Function $R^{(1)}_{q+\frac{1}{2}}$ ist hierbei als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R^{(1)}}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d R^{(1)}}{d r} + \left[n_1^2 - \frac{q(q+1)}{2}\right] R = 0 \tag{26}$$

definirt; und zwar ist dasjenige partikuläre Integral zu wählen, welches den von innen nach aussen sich ausbreitenden Wellen entspricht, nicht dasjenige, welches unendlich ferne Erregungs-Centren voraussetzen würde.

Soll auch hier völlige Symmetrie herrschen, d. h. U_1 nur von r abhängen, so muss wieder $q = 0$ und $m = 0$ genommen werden; und wir erhalten

$$U_1 = \sum [E_n \,\text{cosin}\, (n_1 a_1 t) + F_n \sin (n_1 a_1 t)]\, R^{(1)}_{\frac{1}{2}}(n r), \tag{27}$$

wo

$$R^{(1)}_{\frac{1}{2}}(n \varrho) = \frac{A \sin n_1 \varrho + B \,\text{cosin}\, n_1 \varrho}{n_1 \varrho}.$$

Nun ist

$$2 \sin n_1 r \,\text{cosin}\, n_1 a_1 t = \sin n_1 (r + a_1 t) + \sin n_1 (r - a_1 t),$$
$$2 \sin n_1 r \sin n_1 a_1 t = \text{cosin}\, n_1 (r - a_1 t) - \text{cosin}\, n_1 (r + a_1 t),$$
$$2 \,\text{cosin}\, n_1 r \,\text{cosin}\, n_1 a_1 t = \text{cosin}\, n_1 (r - a_1 t) + \text{cosin}\, n_1 (r + a_1 t),$$
$$2 \,\text{cosin}\, n_1 r \sin n_1 a_1 t = \sin n_1 (r + a_1 t) - \sin n_1 (r - a_1 t).$$

Um obiger Forderung zu genügen, sind die Constanten A und B so zu bestimmen,[1]) dass alle Glieder, welche $(r + a_1 t)$ im Argumente enthalten, fortfallen. Es wird demnach

$$(27\text{a})\quad U_1 = \sum_{n_1} \frac{1}{r} \left[G_n \operatorname{cosin} n_1 (r - a_1 t) + H_n \sin n_1 (r - a_1 t)\right].$$

Entsprechende Formeln mit anderen Constanten G_n, H_n gelten für die Functionen V_1 und W_1.

Für die Art und Weise, wie sich die Schwingungen der Kugel in den Lichtäther übertragen, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Die Schwingung im Innern der Kugel ist transversal. Um die Amplituden der inneren und der äusseren Schwingung in Uebereinstimmung zu bringen, genügt es, die Gleichungen

$$(28)\qquad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}$$

für $r = \varrho$ zu befriedigen. Beschränken wir uns wieder auf U und U_1, so ergibt sich

$$(29)\qquad \begin{aligned} n C_n R'_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= n_1 G_n S'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) + n_1 H_n R'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho), \\ n D_n R'_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= n_1 G_n R'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) - n_1 H_n S'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho), \end{aligned}$$

wo nun

$$(29)\qquad R_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \frac{\sin n\varrho}{n\varrho}, \quad S_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \frac{\operatorname{cosin} n\varrho}{n\varrho}.$$

Damit die Schwingungsdauern übereinstimmen, muss ferner

$$(30)\qquad n a = n_1 a_1$$

genommen werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Functionen $R_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho)$ und $R_{\frac{1}{2}}(n\varrho)$ sich nur durch das Argument von einander unterscheiden; denn die Differentialgleichung (10) wird unabhängig von n, wenn man nr an Stelle von r als unabhängige Variable einführt.

---

[1]) Vgl. darüber die Bemerkungen von Clebsch in § 6 der citirten Abhandlung aus Bd. 61 von Crelle's Journal.

Sollen auch die Druckkräfte sich an der Kugeloberfläche das Gleichgewicht halten, so muss nach (20) ausserdem

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} = 0$$

für $r = \varrho$ sein. Oder

$$(31) \quad \begin{aligned} a^2 n^2 C_n R''_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= a_1^2 n_1^2 G_n S''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) + a_1^2 n_1^2 H_n R''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho), \\ a^2 n^2 D_n R'_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= a_1^2 n_1^2 G_n R''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) - a_1^2 n_1^2 H_n S''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho). \end{aligned}$$

Wegen der Relation (30) fallen die Factoren $a^2 n^2$ und $a_1^2 n_1^2$ heraus. Die Elimination der Coëfficienten C_n, D_n, G_n, H_n führt, wenn wir zur Abkürzung den Index $\frac{1}{2}$ fortlassen, zu der Relation

$$(32) \quad \begin{vmatrix} a_1 R'(n\varrho) & 0 & a S'(n_1\varrho) & a R'(n_1\varrho) \\ 0 & a_1 R'(n\varrho) & a R'(n_1\varrho) & -a S'(n_1\varrho) \\ R''(n\varrho) & 0 & S''(n_1\varrho) & R''(n_1\varrho) \\ 0 & R''(n\varrho) & R''(n_1\varrho) & -S''(n_1\varrho) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese transscendente Gleichung bestimmt diejenigen Zahlen n $\left(\text{bezw. } n_1 = n\frac{a}{a_1}\right)$, für welche die Gleichungen (29) und (31) mit einander verträglich sind, und somit die Schwingungsdauern bezw. Wellenlängen der möglichen Oscillationen.

Die Auswerthung der Determinante führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} &[a_1 R'(n\varrho) S''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) S'(n_1\varrho)]^2 \\ &+ [a_1 R'(n\varrho) R''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) R'(n_1\varrho)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung (32) zerfällt daher in die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 R'(n\varrho) S''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) S'(n_1\varrho) + i a_1 R'(n\varrho) R''(n_1\varrho) \\ - i a R''(n\varrho) R'(n_1\varrho) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 R'(n\varrho) S''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) S'(n_1\varrho) - i a_1 R'(n\varrho) R''(n_1\varrho) \\ + i a R''(n\varrho) R'(n_1\varrho) = 0; \end{aligned}$$

und diese lassen sich in der folgenden Form schreiben

$$(33)\qquad \frac{a\,R''(n\varrho)}{a_1\,R'(n\varrho)} = \frac{S''(n_1\varrho) \pm i\,R''(n_1\varrho)}{S'(n_1\varrho) \pm i\,R'(n_1\varrho)}.$$

Hierin ist $i = \sqrt{-1}$ zu nehmen, ferner nach (10):

$$R''(n\varrho) = -\frac{2}{n\varrho}\,R'(n\varrho) - R(n\varrho),$$

$$R''(n_1\varrho) = -\frac{2}{n_1\varrho}\,R'(n_1\varrho) - R(n_1\varrho),$$

$$S''(n_1\varrho) = -\frac{2}{n_1\varrho}\,S'(n_1\varrho) - S(n_1\varrho).$$

Setzt man rechts die Werthe (29) ein und formt sodann die Relation (33) um, so ergibt sich, je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen wählt, an Stelle von (32) zur Bestimmung von n_1 eine der beiden folgenden Bedingungsgleichungen

$$(34)\qquad \frac{a}{a_1}\left(\frac{2}{n\varrho} + \frac{n\varrho}{n\varrho\cdot\operatorname{cotg} n\varrho - 1}\right) = \frac{2}{n_1\varrho} + \frac{n_1\varrho}{\pm i n_1\varrho - 1}.$$

Die Wurzeln der einen dieser beiden Gleichungen sind conjugirt imaginär zu denen der andern; um reelle Resultate zu erhalten, müssen immer zwei conjugirte Werthe gleichzeitig benutzt werden. Setzen wir $n_1 = \mu_1 + i\nu_1$, $n = \mu + i\nu$, so wird die Schwingungsdauer:

$$(34\text{a})\qquad T = \frac{2\pi}{\mu_1 a_1} = \frac{2\pi}{\mu a}.$$

Der imaginäre Theil ν_1 bedingt das Hinzutreten von Exponentialfactoren $e^{\pm\nu(r-a_1t)}$. Indem man in (27a) auch den Constanten G_n und H_n complexe Werthe beilegt, kann man erreichen, dass nur Exponentialfactoren mit negativen Exponenten vorkommen. Ihr Auftreten zeigt an, dass für negative Werthe von $(r - a_1 t)$ die Schwingung mit wachsender Zeit allmählig verlöscht; für positive Werthe von $(r - a_1 t)$

kommen die Formeln nicht in Betracht, da sich die Lichtschwingung zur Zeit t noch nicht über die Stelle $r - a_1 t = 0$ hinaus fortgesetzt hat.

Für grosse Werthe von n_1, d. h. für kleine Schwingungsdauern und Wellenlängen (wie sie beim Lichte auftreten), reducirt sich die Gleichung (34) auf

$$\operatorname{tang}(n\varrho) = \mp i \frac{a_1}{a}.$$

Eine Wurzel ist rein imaginär; bezeichnen wir sie mit $\pm \beta i$, so wird

$$n\varrho = \pm \beta i + g\pi, \tag{34b}$$

wo g eine ganze Zahl bezeichnet. Der reelle Theil der Wurzeln von (34) nähert sich also mit wachsender Grösse den ganzen Vielfachen von π, der imaginäre Theil einer gewissen endlichen Grenze.

Zweiter Fall. Die Schwingungen im Innern der Kugel sind longitudinal.

Da diese Schwingung ausserhalb der Kugel sich als transversale fortsetzen soll, und bei letzterer eine Verrückung in Richtung des Radius nicht eintritt, so muss für $r = \varrho$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \tag{35}$$

sein; da ferner die transversale Schwingung auch keinen Druck in Richtung des Radius ausübt, so muss auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = 0 \text{ für } r = \varrho \tag{36}$$

bestehen. Die innerhalb der Kugeloberfläche erzeugten Druckkräfte werden durch die Ausdrücke

$$2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \varphi} \text{ und } 2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \vartheta} \tag{37}$$

gemessen. Wird P in der Form (8) angenommen, so werden sie in Folge der Bedingung (35), die sich auf (14) reducirt, von selbst gleich Null,

Wenn die Gleichungen (14) und (15) zugleich bestehen, ist die Bedingung (36) ebenfalls erfüllt.

Die longitudinale Schwingung des Kugelinnern ist in diesem Falle auch von φ und ψ abhängig.

Innerhalb der Kugeloberfläche selbst existiren weder Verrückungen noch Druckkräfte; der Lichtäther bleibt also bei dieser Art von Schwingungen in Ruhe.

Dritter Fall. Das Innere der Kugel bleibt in Ruhe.

Ebenso kann umgekehrt der Lichtäther oscilliren, das Innere der Kugel aber ruhen. Wir haben die Gleichungen (14) und (15) als erfüllt vorauszusetzen, so dass an der Kugeloberfläche Amplituden und Druckkräfte gleichzeitig verschwinden.

Es ist nur jetzt für die Lichtäther-Schwingung die Function $R_{q+\frac{1}{2}}$ unter den Integralen der Gleichung (10) in der Weise auszuwählen, wie es für den Fall $q = 0$ in § 3 näher erörtert wurde.

§ 5. Anwendung auf die Schwingungen eines Atoms.

Jedes Element ist durch sein Spectrum, d. h. durch eine gewisse Anzahl ihm eigenthümlicher Wellenlängen bezw. Schwingungsdauern charakterisirt. Man pflegt sie als Eigenschwingungen des Elementes zu bezeichnen, ohne doch genau definiren zu können, wie diese sogenannten Eigenschwingungen zu Stande kommen.

Bei der elastischen Lichttheorie ergeben sich bekanntlich Schwierigkeiten, wenn man die Grenzbedingungen, d. h. das Verhalten an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien charakterisiren soll. Die Forderung gleicher Amplituden und gleicher Druckkräfte führt zu Bedingungsgleichungen, die im Allgemeinen nicht mit einander verträglich sind.[1]) Diese Unverträglichkeit ist aber nur vorhanden, wenn man die Tren-

---

[1]) Vgl. Kirchhoff, Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel; Gesammelte Abhandlungen, p. 352 ff.; sowie Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Leipzig 1891, p. 285 ff.

nungsfläche, wie es gewöhnlich geschieht, als eben annimmt, und wenn man von den durch die Verschiedenheit der Wellenlängen bedingten Unterschieden absieht. Denn die vorstehenden Untersuchungen haben gezeigt, dass bei kugelförmiger Grenzfläche für gewisse Wellenlängen, die durch transscendente Gleichungen bestimmt werden, die Grenzbedingungen der elastischen Lichttheorie vollkommen erfüllt werden können.

Es liegt nahe, dieses Resultat an der Hand der Erfahrung zu prüfen; und da bieten die Spectren der einatomigen Gase ein überreiches Material.

Im gasförmigen Zustande sind die Atome verhältnissmässig weit von einander entfernt, so dass es erlaubt sein wird, ein einzelnes Atom für sich zu betrachten und mit unserer schwingenden Kugel vom Radius ϱ zu identificiren. Bei den heftigen Bewegungen, welche im Gase stattfinden, wird jedes Atom in schneller Folge von allen Seiten durch andere Atome getroffen; diese Stosskräfte werden elastische Schwingungen im Innern des Atoms hervorrufen, die sich dem Lichtäther mittheilen und die Linien des Spectrums erzeugen. Eine so erzeugte Schwingung wird von allen drei Veränderlichen r, φ, ψ abhängen; da wir aber nicht ein einzelnes Atom beobachten, sondern nur den durchschnittlichen Zustand einer sehr grossen Anzahl von Atomen, und da durchschnittlich bei den Bewegungen der Atome keine Richtung ausgezeichnet ist, vielmehr jedes in jeder Richtung von anderen getroffen wird, so können wir annehmen, dass durchschnittlich volle Symmetrie nach allen Richtungen herrsche, so dass die Grössen u, v, w nur vom Radius abhängen, und somit die obigen Betrachtungen Anwendung finden.

Die Linien des Spectrums zerfallen demnach in verschiedene Gruppen, deren jede durch eine Gleichung mit unendlich vielen Wurzeln charakterisirt ist. Die Intensität jeder Schwingung ist durch den zugehörigen Coëfficienten C_n, D_n, etc. der unendlichen Reihe bedingt. Die Convergenz der Reihe verlangt, dass diese Coëfficienten mit wachsendem n (d. h. mit

abnehmender Wellenlänge) unbegrenzt abnehmen; es ist daher natürlich, dass nur eine beschränkte Zahl von Spectrallinien beobachtet werden kann.

Jede Linie sollte eigentlich unendlich schmal und somit nicht sichtbar sein. Wenn die Linien thatsächlich doch beobachtet werden können, so hat dies seinen Grund darin, dass die gemachten Voraussetzungen immer nur annähernd erfüllt sind. Je weniger Spielraum das einzelne Atom hat, um so mehr verbreitern sich die Linien, bis sie sich zu Banden zusammenschliessen.

Erste Gruppe. Sie ist charakterisirt durch die Gleichung (34). Im Aether und im Innern der Kugel finden die Schwingungen transversal statt. Die entsprechenden Verrückungen sind durch die Gleichungen (24) dargestellt; sie bestehen in kleinen Rotationen um einen Durchmesser der Kugel, dessen Lage von den Werthen der Functionen U_1, V_1, W_1 abhängt. Diese Axe wird in schneller Folge alle möglichen Lagen in der Kugel annehmen, wodurch dann die Symmetrie hergestellt wird. Die einer Wurzel n der Gleichung (34) entsprechende Schwingungsdauer ist durch die Gleichung (34 a) dargestellt.

Zweite Gruppe. Es bestehen die Gleichungen (14) und (15). Der Lichtäther bleibt in Ruhe; die Schwingung in der Kugel ist longitudinal.

Da die Beobachtung immer ausserhalb der Kugel stattfindet, wird eine entsprechende Linie im Spectrum des Atoms nicht auftreten. Wenn wir uns aber vorstellen, dass durch die heftigen Bewegungen der Atome im glühenden Gase das Gleichgewicht der umgebenden Aetherhülle gestört ist, und dass hier Oscillationen von den verschiedensten Wellenlängen hervorgerufen werden könnten, so werden diejenigen Schwingungen, welche dieser Gruppe angehören, durch die entsprechenden Oscillationen im Innern der Kugel ausgelöscht werden. Die Linien dieser Gruppe werden daher, wenn sie überhaupt beobachtet werden, nur als dunkle Linien auf hellerem Grunde erscheinen.

Dritte Gruppe. Das Innere der Kugel ruht, der Lichtäther oscillirt, und zwar entsprechend den Gleichungen (14) und (15). Durch die in Folge der Bewegungen der Atome entstehenden Störungen des Gleichgewichtes (wie sie soeben bei der zweiten Gruppe angenommen wurden) im Lichtäther werden Oscillationen der verschiedensten Art entstehen können; aber von der Kugel aus radial verlaufend können nur solche hervorgehen, deren Wellenlänge durch die angegebenen Bedingungsgleichungen bestimmt sind. Andere Wellen mit anderer Schwingungsdauer werden sich tangential von der Kugel aus verbreiten.

Die Verrückungen u, v, w werden vom Winkel ϑ abhängig, wodurch scheinbar die Symmetrie gestört wird. Bedenkt man aber, dass wir oben nur eine der drei Functionen U_1, V_1, W_1 betrachteten, so erhellt, dass durch gleichzeitige Berücksichtigung der drei Functionen die Symmetrie nach allen Richtungen wieder herzustellen ist. Die transversale Schwingung besteht in Oscillationen um einen Durchmesser der Kugel als Axe, der seine Richtung schnell verändert.

Das Auftreten dieser Art von Strahlen kann vielleicht dazu dienen, die Erscheinung der Fluorescenz verständlich zu machen.

Vierte Gruppe. Im Innern der Kugel finden transversale Schwingungen statt; der Lichtäther bleibt in Ruhe. Es bestehen wieder die Gleichungen (14) und (15), wenn für $R_{q+\frac{1}{2}}$ diejenige specielle Lösung der Gleichung (10) gewählt wird, welche für $r = 0$ endlich bleibt. Die entsprechenden Linien des Spectrums sind stets dunkel, wenn sie überhaupt erscheinen.

Fünfte Gruppe. Es erscheint nicht nothwendig, an der Forderung, dass die Druckkräfte an der Oberfläche des Atoms übereinstimmen, absolut festzuhalten. Bestehen Differenzen der Druckkräfte, so wird das Atom in Folge derselben eine fortschreitende oder rotirende Bewegung annehmen. Da nun beim glühenden Gase die Atome schon bewegt sind, liegt kein Grund vor, diese Annahme auszuschliessen. Hält man

an der Symmetrie und an der Ruhe der äusseren Oberfläche fest, so werden die transversalen Schwingungen dieser Art durch die Gleichung (23a) bestimmt.

Sechste Gruppe. In gleichem Sinne sind im Innern der Kugel die durch (18) definirten Oscillationen zu berücksichtigen. Da der Druck an der Oberfläche nicht Null ist, werden sich diese longitudinalen Schwingungen mit gleicher Schwingungsdauer als transversale Wellen in den Lichtäther fortsetzen.

Regelmässig werden die Linien der ersten und dritten Gruppe im Spectrum erscheinen, vielleicht auch die der fünften und sechsten Gruppe.

Jedenfalls aber besteht das Spectrum eines einatomigen Gases aus einer Reihe verschiedener Einzel-Spectra, die sich über einander lagern, und deren jedes durch eine besondere transscendente Gleichung bestimmt wird; es ist natürlich, dass dabei an einzelnen Stellen des Spectrums starke Verdichtungen auftreten. Unter verschiedenen Umständen können verschiedene Gruppen erscheinen; und das ist mit den Beobachtungen (besonders deutlich beim Wasserstoff) in Uebereinstimmung.

Da über die Grösse des Radius ϱ keine Voraussetzung gemacht wurde, so kann das, was hier über sehr kleine leuchtende Kugeln gesagt wurde, ebenso auf erheblich grössere Kugeln, z. B. auf leuchtende Himmelskörper angewandt werden. Jedem kugelförmigen Himmelskörper käme hiernach ein ihm eigenthümliches Spectrum zu, das nur abhängt von seiner Grösse und von den Elasticitäts-Constanten seines Innern. Ein solcher Körper ist allerdings nicht continuirlich mit Masse erfüllt, vielmehr vom Lichtäther durchdrungen, nicht scharf gegen diesen Aether begrenzt; aber in sehr grosser Entfernung wird man ihn doch wie unser Atom behandeln dürfen, so dass sein Spectrum theils durch die Einzelspectra der in seiner Atmosphäre glühenden Elemente, theils durch die ihm als oscillirender Kugel zukommenden Linien gebildet wird.

§ 6. Beziehungen zwischen den Spectren verschiedener Atome.

Hiernach ist das Spectrum eines einatomigen Gases im Allgemeinen von so complicirtem Bau, dass es kaum möglich erscheint, die einzelnen Gruppen von Linien von einander zu trennen und mit den Wurzeln der zugehörigen Gleichungen rechnerisch in Beziehung zu setzen; die Aufgabe ist überdies dadurch erschwert, dass die Constanten, von denen jene Gleichungen abhängen (ϱ, b, a_1) nicht bekannt sind.

Wenngleich ich daher die dargelegte Auffassung der Linien-Spectra (allerdings damals nur für die fünfte und sechste Gruppe) schon vor etwa 10 Jahren in Königsberg i. Pr. einem engeren Kreise vorgetragen habe, konnte ich die Untersuchung wegen dieser Schwierigkeiten nicht weiter führen. Erst vor etwa zwei Jahren bemerkte ich, dass in folgender Weise eine indirecte Prüfung der Theorie möglich ist.

Nimmt man zwei verschiedene einatomige Gase, so unterscheiden sich die betr. transscendenten Gleichungen nur durch die Constanten a, b und ϱ von einander, und in manchen Gruppen in sehr einfacher Weise.

So lautet z. B. die Gleichung für die sechste Gruppe

$$\operatorname{cotang} n\varrho = \frac{k^2 - n^2\varrho^2}{k^2 n\varrho}$$

und die entsprechende Gleichung für ein zweites Atom

$$\operatorname{cotang} n'\varrho' = \frac{k'^2 - n'^2\varrho'^2}{k'^2 n'\varrho'}.$$

Nimmt man nun an, dass für beide Atome k und k' wenig von einander verschieden seien, so stehen die Wurzeln beider Gleichungen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Radien

$$\frac{n}{n'} = \frac{\varrho'}{\varrho}, \tag{38}$$

und die Schwingungsdauern verhalten sich direct wie die Radien; es ist nemlich, wenn b von b' wenig verschieden ist, nach (17) annähernd

$$\frac{T_n}{T_{n'}} = \frac{n'}{n} = \frac{\varrho}{\varrho'}. \tag{39}$$

Für die Gleichung (23) ist diese Relation bei zwei verschiedenen Atomen genau erfüllt. Wenn k aber nur annähernd gleich k' ist, so besteht die Relation (38) auch nur näherungsweise richtig.

Aehnlich ist es bei der Gleichung (34). Sind hier für zwei verschiedene Atome die Constanten a und a' einander gleich, so ist nach (30)

$$n\,a = n_1 a_1, \qquad n'\,a' = n_1' a_1',$$

also für $a = a'$:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{n'}{n_1'}.$$

Nun kann die Gleichung (34) in der Form

$$a\,f(n\,\varrho) = a_1 F\left(\frac{a}{a_1} n\,\varrho\right)$$

geschrieben werden; ebenso ist für das zweite Atom

$$a' f(n'\varrho') = a_1 F\left(\frac{a'}{a_1} n'\varrho'\right);$$

oder folgt für $a = a'$ wieder

$$\frac{n}{n'} = \frac{\varrho'}{\varrho}.$$

Und wenn nur annähernd $a = a'$ ist, so ist diese Beziehung (38) näherungsweise erfüllt.

Die Radien der Atome sind nicht bekannt, wohl aber ihre Atomgewichte, die mit G und G' bezeichnet seien. Bedeutet ferner δ bezw. δ' die Dichte im Innern des Atoms, so ist

$$G = \tfrac{4}{3}\,g\,\delta\,\varrho^3\,\pi,$$
$$G' = \tfrac{4}{3}\,g\,\delta'\varrho'^3\pi,$$

wo g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet; hieraus erhalten wir

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \sqrt[3]{\frac{G\,\delta'}{G'\,\delta}}. \tag{40}$$

Wenn also auch δ' von δ wenig verschieden ist, so besteht näherungsweise die Relation

$$\frac{n}{n'} = \sqrt[3]{\frac{G'}{G}}, \quad \frac{T}{T'} = \sqrt[3]{\frac{G}{G'}}, \tag{41}$$

d. h. die Wellenlängen der Spectra von zwei verschiedenen einatomigen Gasen verhalten (unter den gemachten Voraussetzungen) sich angenähert, wie die Cubikwurzeln aus den Atomgewichten.

Zu der Annahme, dass die inneren Constanten a, b, δ eines Atoms bei verschiedenen Elementen denselben Werth haben, dass sich also diese Atome nur durch die Grösse (d. i. durch den Werth von ϱ) unterscheiden, kann man durch Vorstellungen über die Einheit der Materie geführt werden. Dadurch wurde ich zu dem Versuche veranlasst, ob nicht die Relation (40) wirklich bei verschiedenen Elementen erfüllt ist; ich habe für eine Reihe von Beispielen gemäss der Formel (40) aus den beobachteten Spectrallinien eines Elementes die entsprechenden eines andern Elementes berechnet, und die Resultate mit den Beobachtungen an diesem andern Elemente verglichen.

Es zeigte sich, dass die Gleichung (40) in vielen Fällen näherungsweise erfüllt ist, dass also in der That die Grössen a, b, δ von den Grössen a', b', δ' sich wenig unterscheiden.

In anderen Fällen ist die allgemeinere Gleichung

$$\frac{T}{T'} = A\sqrt[3]{\frac{G}{G'}} \tag{42}$$

zur Anwendung zu bringen, wo A eine Constante bedeutet, die nach (40) näherungsweise

$$= \sqrt[3]{\frac{\delta'}{\delta}}$$

zu setzen wäre.

Im Falle der Gleichung (34), also bei der ersten der in § 5 unterschiedenen Gruppen, wird man auch näherungsweise

$$\frac{T}{T'} = B \sqrt[3]{\frac{G}{G'}} \tag{43}$$

nehmen dürfen, wenn a von a' wenig verschieden ist; dabei hat man näherungsweise

$$B = A \cdot \frac{a}{a'}.$$

Wenn es nicht anders bemerkt ist, sind alle in den folgenden Tabellen benutzten Beobachtungen den Abhandlungen von Kayser und Runge entnommen.[1]) Ein besonderes Interesse bietet die Einordnung der Spectrallinien in gewisse Serien, wie sie Balmer beim Wasserstoff, Rydberg und die beiden genannten Autoren bei anderen Elementen vornahmen. Auf diese Serien ist deshalb bei den folgenden Rechnungen besonders Rücksicht genommen (vgl. unten § 14).

An einigen Stellen sind den berechneten Linien beobachtete gegenübergestellt, die sich weiter als wahrscheinlich zulässig ist, von dem Ergebnisse der Rechnung entfernen; ich habe sie aufgeführt, um darauf hinzuweisen, wo die nächste beobachtete Linie liegt.

§ 7. Magnesium und Calcium.

Im Spectrum des Magnesiums unterscheiden Kayser und Runge zwei Serien, die sie wegen ihrer Eigenschaften Neben-Serien nennen; diese Eigenschaften sind nämlich analog denjenigen der bei den Alkalien auftretenden Neben-Serien, welche dort einer Haupt-Serie an die Seite treten, während eine solche Haupt-Serie beim Magnesium nicht auftritt. Jede Neben-Serie besteht aus drei Triplets von Linien, die wenig von einander verschieden sind.

[1]) Kayser und Runge: In den Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften und zwar: I. Eisen, 1888; II. Kohle, 1889; III. Alkalien, 1890; IV. Elemente der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe, 1891; V. Kupfer, Silber und Gold, 1892; VI. Aluminium, Indium, Thallium, 1892.

Die betreffende Wellenlänge λ wird in Angström'schen Einheiten durch folgende Formeln gegeben:

1. Neben-Serie: $\lambda^{-1} \cdot 10^8 = 39796{,}10 - 130398\,n^{-2} - 1432090\,n^{-4}$.

$\lambda^{-1} \cdot 10^8 = 39836{,}79 - 130398\,n^{-2} - 1432090\,n^{-4}$.

$\lambda^{-1} \cdot 10^8 = 39857{,}00 - 130398\,n^{-2} - 1432090\,n^{-4}$.

Die Linien der Serie ergeben sich, wenn man in diesen Formeln $n = 4, 5, \ldots$ vor 9, 10 einsetzt. Sei nun λ' die zugehörige Wellenlänge im Calcium-Spectrum, so ist nach unserer Methode näherungsweise (vgl. § 6):

$$\lambda' = \lambda \sqrt[2]{\frac{Ca}{Mg}},$$

wo Ca das Atomgewicht des Calciums (40,1) und Mg dasjenige des Magnesiums bedeutet (24,3). Nach dieser Formel sind die Wellenlängen des Calciums aus denjenigen des Magnesiums berechnet und in folgender Tabelle mit den Beobachtungen verglichen.

Magnesium		Calcium			
Neben-Serie I n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	Neben-Serie I n	Differenz
4	3838,44	4536,0	4535,60 [1]		+ 0,40
	3832,46	4528,9	4527,17		+ 1,73
	3829,51	4525,4	4512,73		12,67
5	3097,06	3659,9	3653,62	—	+ 5,28
	3093,14	3655,2	3644,45	5	+ 9,75
	3091,18	3652,9	3630,82	5	+ 22,08
	—	—	3624,15	5	—
6	2852,22	3370,5	3361,92	6	+ 8,08
	2848,53	3366,2	3350,22	6	+ 15,98
	2846,91	3364,3	3344,49	6	+ 19,81
7	2736,84	3233,8	3225,74	7	+ 8,06
	2733,80	3230,6	3215,15	7	+ 15,45
	2732,35	3228,9	3209,68	7	+ 19,22
8	2672,90	3158,6	3166,95	—	— 8,35
	2669,84	3155,7	3158,98	—	— 3,28
	2668,26	3153,1	3150,85	8	+ 2,25
	—	—	3140,91	8	—
	—	—	3136,09	8	—
9	2633,13	3111,9	3107,96	—	+ 3,94
	2630,52	3108,5	3101,87	9	+ 6,63
	—	—	—	9	—
	—	—	—	9	—

[1]) Im Funkenspectrum des Calcium, vgl. Rep. of Brit. Ass. 1884, p. 372.

Die hier fehlende Linie des dritten Triplets für $n = 9$ t beim Magnesium nicht beobachtet worden; auch beim Calum findet sich keine entsprechende.

Dem Werthe $n = 4$ in der Calcium-Serie entsprechen die rei Linien

$$4456{,}08;\quad 4435{,}86;\quad 4425{,}16.$$

Die aus diesen nach obiger Formel zu berechnenden agnesium-Linien sind nicht beobachtet worden.

Die Tabelle lässt erkennen, dass bei den Triplets für $= 5$, $n = 6$ und $n = 7$ entsprechende Linien von Magnesium nd Calcium erhalten werden; bei $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$ tritt ine kleine Verschiebung der von Kayser und Runge aufgestellten Calcium-Serie gegen die zugehörige Magnesium-Serie in. Jedenfalls könnte man auch die hier berechneten Calium-Linien durch eine Serien-Formel annähernd darstellen; nan hätte zu dem Zwecke nur die Constanten der ersten Neben-Serie des Magnesiums mit $\sqrt[3]{\frac{Mg}{Ca}}$ zu multipliciren.

Magnesium $Mg = 24{,}3$		Calcium $Ca = 40{,}1$			
Neben-Serie II n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	Neben-Serie II n	Differenz
	—	—	6162,46	3	—
3	5183,84	6125,9	6122,46	3	+ 3,44
	5172,87	6112,9	6116,00[1]	—	— 3,10
	5167,55	6106,9	6102,99	3	+ 3,91
4	3336,83	3943,1	3949,09	4	— 5,99
	3332,28	3937,8	—	—	—
	3330,08	3935,2	3933,83	—	+ 1,37
5	2942,21	3476,9	3487,76	5	— 10,86
	2938,68	3472,7	3474,98	5	— 2,28
	2936,99	3470,6	3468,68	5	+ 1,32
6	2781,53	3287,0	3286,26	6	+ 0,74
	2778,36	3285,2	3274,88	6	+ 10,32
	2776,80	3228,2	3269,31	6	+ 12,89
7	2698,44	3188,8	3181,40	7	+ 7,40
	2695,53	3185,4	3179.45	—	+ 6,95
	2693,97	3183,5	3170,23	7	+ 13,27
8	2649,30	3130,7	3140,91	—	— 10,21
	2646,61	3127,6	3136,09	—	— 8,49
	2645,22	3125,9	3117,74	8	+ 8,16

[1] Vgl. Reports of the British Association, a. a. O.

Auch hier entsprechen sich die beiden Serien im Grossen und Ganzen; bei $n = 3$ fehlt die Linie des ersten, bei $n = 4$ die des ersten und zweiten Triplets, bei $n = 7$ die des dritten, bei $n = 8$ die des ersten und dritten Triplets; statt der letzteren werden dem Magnesium jetzt zwei Linien $n = 8$ (3140,91 und 3136,09) im Calcium zugeordnet, welche bei Kayser und Runge dem Index 8 der ersten Neben-Serie zugehören (vgl. die vorhergehende Tabelle).

Ausserdem gibt es im Magnesium-Spectrum noch andere Linien, die nicht zu erkennbaren Serien gehören; die ihnen durch unsere Formel zugeordneten Calcium-Linien ersieht man aus folgender Tabelle.

Magnesium $Mg = 24,3$	Calcium $Ca = 40,1$		
λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	Differenz
5711,56	6749,5	—	—
5528,75	6533,5	—	—
4730,42	5590,1	5590,30	— 0,20
4703,33	5558,0	—	—
4571,33	5402,0	—	—
4352,18	5143,1	—	—
4167,81	4925,2	—	—
4058,45	4796,0	4807,47	— 11,47
3987,08	4711,6	4685,40 (?)	+ 26,20
2936,61	3470,3	3468,68	+ 1,62
2928,74	3461,0	—	—
2915,57	3445,4	—	—
2802,80	3312,1	—	—
2798,07	3306,5	—	—
2795,63	3289,9	--	—
2790,88	3289,1	—	—
2783,08	3288,0	—	—
2779,94	3285,2	3285,00[1]	+ 0,20
2768,57	3271,5	3274,88	— 3,38
2765,47	3267,8	3269,31	— 1,51

Im Ganzen haben wir 56 Magnesium-Linien; und unter diesen sind 38, denen im Calcium-Spectrum Linien entsprechen.

[1]) Vgl. a. a. O. p. 373.

die sich mit den von uns berechneten nahezu decken. Von den fehlenden 18 Linien fallen zwei nach dem Ultrarothen über das beobachtete Gebiet des Calcium-Spectrums hinaus, zwei fallen in die Nähe von verbreiterten Calcium-Linien, so dass nur 14 übrig bleiben, deren zugeordnete Calcium-Linien nicht beobachtet sind. Die letzteren fallen sehr nahe mit Eisen-Linien zusammen; es ist daher leicht möglich, dass ihre Trennung von den Eisen-Linien sehr schwer zu bewerkstelligen sei.

Es sei bemerkt, dass Beobachtung und Rechnung noch besser übereinstimmen, wenn man nicht die Werthe $Ca = 40{,}1$, $Mg = 24{,}3$ benutzt, sonden bezw. 40,0 und 24,4, wie sie in älteren Büchern angegeben werden. Man ersieht dies aus den in folgender Tabelle zusammengestellten Proben.

Magnesium $Mg = 24{,}4$			Calcium $Ca = 40{,}0$				
Neben-Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Neben-Serie
I	4	3838,46	4526,1	4527,1	— 1,0	—	—
I	5	3097,06	3651,9	{3653,62	— 1,72	—	—
				{3644,48	+ 7,42	5	I
I	6	2852,22	3363,1	3361,92	— 0,82	6	I
I	7	2736,14	3226,2	3225,74	+ 0,46	7	I
I	8	2673,15	3152,0	3152,08	— 0,08	8	I
I	9	2633,13	3104,8	3101,87	+ 2,93	9	I
I	10	2605,4	3072,1	—	—	—	—
II	3	5183,84	6112,1	6102,99	— 0,80	—	—
II	4	3336,83	3934,5	3933,83	+ 0,67	—	—
II	5	2942,21	3477,2	3474,98	+ 2,32	5	II
II	6	2781,35	3279,8	3274,88	+ 4,92	6	II
II	7	2698,44	3181,8	3181,40	+ 0,40	7	II
II	8	2649,30	3123,9	3117,74	+ 6,16	8	II

§ 8. Zink und Cadmium.

Im Zink-Spectrum haben wir nach Kayser und Runge ebenfalls zwei sogenannte Neben-Serien; die Triplets der ersten Serie sind gegeben durch die Formel

$$
\begin{aligned}
\text{I},_1 \quad 10^8\lambda^{-1} &= 42945{,}32 - 131641\,n^{-2} - 1236125\,n^{-4},\\
\text{I},_2 \quad &= 43331{,}71 - 131641\,n^{-2} - 1236125\,n^{-4},\\
\text{I},_3 \quad &= 43521{,}48 - 131641\,n^{-2} - 1236125\,n^{-4},
\end{aligned}
$$

wobei n die Werthe 4, 5, 6, 7, 8, 9 annimmt. Für die zweite Neben-Serie gelten die Formeln

$$
\begin{aligned}
\text{II},_1 \quad 10^8\lambda^{-1} &= 42954{,}59 - 126919\,n^{-2} - 632850\,n^{-4},\\
\text{II},_2 \quad &= 43343{,}65 - 126919\,n^{-2} - 632850\,n^{-4},\\
\text{II},_3 \quad &= 43533{,}32 - 126919\,n^{-2} - 632850\,n^{-4},
\end{aligned}
$$

worin der Zahl n die Werthe 3, 4, ... 8 beizulegen sind.

Wir berechnen nach unserer Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Cd}{Zn}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{112{,}0}{65{,}4}}$$

zu jeder Cadmium-Linie die entsprechende Zink-Linie und vergleichen das Resultat in folgender Tabelle mit den betreffenden Beobachtungen. Zugleich geben wir bei denjenigen Linien, die von Kayser und Runge einer Serie zugeordnet werden, an, um welche Serie und welche Zahl n es sich handelt, und zwar links für Cadmium, rechts für Zink. Die Cadmium-Serien sind durch folgende Formeln dargestellt:

$$
\begin{aligned}
\text{I},_1 \quad 10^8\lambda^{-1} &= 40755{,}21 - 128635\,n^{-2} - 1289619\,n^{-4},\\
\text{I},_2 \quad &= 41914{,}60 - 128635\,n^{-2} - 1289619\,n^{-4},\\
\text{I},_3 \quad &= 42456{,}64 - 128635\,n^{-2} - 1289619\,n^{-4},\\
\text{II},_1 \quad 10^8\lambda^{-1} &= 40797{,}12 - 126146\,n^{-2} - 555137\,n^{-4},\\
\text{II},_2 \quad &= 41968{,}80 - 126146\,n^{-2} - 555137\,n^{-4},\\
\text{II},_3 \quad &= 42510{,}58 - 126146\,n^{-2} - 555137\,n^{-4}.
\end{aligned}
$$

Der an drei Stellen den beobachteten Zinklinien beigesetzte Buchstabe B. soll andeuten, dass die betreffende Linie im Bogen-Spectrum nicht beobachtet wurde, aber nach den von der British Association veröffentlichten Tabellen[1]) im Funkenspectrum vorkommt.

[1]) Report of the British Association for the advancement of science. 1885, p. 307 ff.

Cadmium			Zink				
Serie	n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	n	Serie	Differenz
—	—	5154,85	4308,9	4293,02	—	—	+ 15,88
II, 1	3	5086,06	4251,1	—	—	—	—
II, 2	3	4800,09	4012,1	4019,75	—	—	— 7,65
II, 3	3	4678,37	3910,3	—	—	—	—
—	—	4662,69	3897,2	—	—	—	—
—	—	4413,23	3688,7	3683,63	—	—	+ 5,07
—	—	4306,98	3599,9	3572,90 (?)	—	—	+ 27,00
—	—	3981,92	3328,2	3342,00 B.	—	—	— 13,80
—	—	3729,21	3117,0	—	—	—	—
—	—	3649,74	3050,6	—	—	—	—
—	—	3614,58	3021,2	3035,93	4	II, 2	— 14,73
I, 1	4	3613,04	3019,9	3018,50	4	II, 3	+ 1,40
—	—	3610,66	3017,9	3017,50 B.	—	—	+ 0,40
—	—	3595,64	3005,4	—	—	—	—
—	—	3500,09	2925,5	2913,63	—	—	+ 11,87
I, 2	4	3467,76	2898,5	2886,40 B.	—	—	+ 12,10
—	—	3466,33	2870,8	2873,39	—	—	— 2,59
I, 3	4	3403,74	2844,9	2833,13	—	—	+ 11,77
—	—	3299,11	2757,8	2756,53	5	I, 3	+ 1,27
—	—	3261,17	2725,8	2736,96	—	—	— 11,16
II, 1	4	3252,63	2718,7	2712,60	5	II, 1	+ 6,10
II, 2	4	3133,29	2618,3	2608,65	6	I, 1	+ 11,65
II, 3	4	3081,03	2575,2	2575,15	—	—	+ 0,05
—	—	—	—	2570,00	6	I, 3	—
—	—	3005,53	2512,1	2516,0	7	I, 1	— 4,00
—	—	2981,46	2492,0	2493,67	7	II, 1	— 1,67
I, 1	5	2980,75	2491,4	2491,67	7	I, 2	— 0,27
—	—	2961,64	2475,4	2479,85	—	—	— 4,45
—	—	2908,85	2431,3	2430,74	9	I, 1	+ 1,34
—	—	2903,24	2426,6	2427,05	8	I, 3	— 0,45
I, 2	5	2881,34	2408,3	—	9	I, 2	—
—	—	2880,88	2407,8	2407,98			— 0,18
II, 1	5	2868,35	2397,5	2393,88	—	—	+ 3,62
I, 2	6	2677,65	2238,1	2246,90	—	—	— 8,80
II, 1	9	2553,61	2134,4	2138,30	—	—	— 3,90

Zwischen den Cadmium-Linien 2868,35 und 2677,65 liegen elf andere, deren entsprechende beim Zink bisher nicht beobachtet sind, ebenso zwischen den Linien 2677,65 und 2553,61 zwölf weitere Linien, die beim Zink fehlen; das Spectrum des letztern schliesst nach den bisherigen Beobachtungen im Ultravioletten mit der Linie 2138,30 ab, während beim Cadmium über die Linie 2553,61 hinaus noch siebzehn Linien beobachtet sind.

Ein Blick auf die Tabelle lehrt wieder, dass eine grosse Zahl der zu Serien gehörigen Linien wieder in ebensolche Linien übergehen; aber die einzelnen Serien erscheinen gestört. Da die Zuweisung der Linien zu bestimmten Serien eine rein empirische ist, so wird darin kein wesentlicher Einwand gegen das aufgestellte Gesetz des näherungsweisen Entsprechens zu erblicken sein.

In Folge eines Irrthumes hatte ich den ersten Rechnungen das doppelte Atom-Gewicht des Zinks zu Grunde gelegt; dann ergab sich durchaus keine Uebereinstimmung; es dürfte dies ein Anzeichen dafür sein, dass die gefundenen Uebereinstimmungen nicht blos zufällige sind.

§ 9. Baryum, Calcium, Strontium.

In gleicher Weise wie im Vorstehenden Cadmium und Zink sind im Folgenden Baryum, Calcium und Strontium mit einander verglichen. Ich bin vom Strontium ausgegangen und habe nach den Formeln

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ba}{Sr}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{137,4}{87,6}},$$

$$\lambda'' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ca}{Sr}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{40,1}{87,6}}$$

zu jeder Strontiumlinie, die von Kayser und Runge angegeben wird, eine entsprechende Linie des Baryum- und Calcium-Spectrums berechnet. Die Resultate der Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt, in welcher die der Rechnung jeweils am besten entsprechenden beobachteten Linien beigesetzt sind. An einigen Stellen ist die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung grösser, als man annehmen kann und durch die verhältnissmässige Ungenauigkeit der Atomgewichts-Bestimmung gerechtfertigt sein mag. Andererseits ist aber zu beachten, dass die Bedingungen der Beobachtungen nie denjenigen der Rechnung wirklich entsprechen

können, da thatsächlich jedes Atom durch unendlich viele andere Atome beeinflusst wird, seine Schwingungen also unter gewissem Zwange vor sich gehen.

Im Strontium-Spectrum haben Kayser und Runge nur eine Serie gefunden, im Calcium-Spectrum die schon oben angeführten zwei Neben-Serien, im Baryum-Spectrum keine Serie. Die diesen Serien angehörigen Linien sind in der Tabelle entsprechend hervorgehoben. Die Triplets der Strontium-Serie werden durch folgende Formel definirt

$$
\begin{aligned}
10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 31030{,}64 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}, \\
&= 31424{,}67 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}, \\
&= 31610{,}58 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}.
\end{aligned}
$$

Der einigen Baryum- und Calcium-Linien beigesetzte Buchstabe B. deutet wieder an, dass diese Linien nur im Funken-Spectrum vorkommen.[1])

Strontium		Baryum		Calcium			
n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	λ'' berechnet	beobachtet	n	Serie
—	6550,53	7610,9	—	5048,4	5041,93	—	—
—	6504,17	7557,1	—	5020,0	5021,0 B.	—	—
—	6408,65	7444,5	—	4939,1	—	—	—
—	6386,74	7420,6	—	4922,2	—	—	—
—	6380,95	7413,9	—	4917,7	—	—	—
—	5970,38	6936,9	—	4601,3	4607,7 B.	—	—
—	5848,01	6794,7	—	4507,0	4505,04	—	—
—	5817,01	6758,8	—	4483,2	—	—	—
—	—	6717,9	—	—	—	—	—
—	5767,29	6701,7	6697,0 B.	4444,8	4456,08	4	I,1
—	—	6687,4	—	—	4435,86	4	I,2
—	—	6672,0	6675,30	—	4425,61	4	I,3
—	5543,49	6441,0	6451,05	4272,4	4283,16	—	—
—	5540,28	6437,1	—	4269,8	4271,0 B.	—	—
—	5535,01	6431,1	—	4265,8	—	—	—
—	5522,02	6416,0	—	4255,8	4253,9 B.	—	—
—	5504,48	6395,5	—	4242,2	4240,58	—	—
—	5486,37	6374,5	—	4228,3	4226,91	—	—

[1]) Vgl. Report of the British Association for the advancement of science, 1884.

Strontium		Baryum		Calcium			
n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	λ'' berechnet	beobachtet	n	Serie
—	5481,15	6368,4	—	4224,3	—	—	—
—	5451,08	6333,5	6341,93	4201,1	—	—	—
—	5257,12	6108,1	6111,01	4051,6	—	—	—
—	5238,76	6086,8	6083,63	4037,5	—	—	—
—	5229,52	6076,1	—	4030,3	—	—	—
—	5225,35	6071,2	—	4027,1	—	—	—
—	5222,43	6067,8	6063,33	4024,9	—	—	—
—	5213,23	6057,2	—	4017,8	—	—	—
—	5156,37	5991,1	5997,31	3974,0	3973,89	4	II,1
—	—	5965,8	5971,94	—	3957,23	4	II,2
—	—	5953,6	5965,06	—	3949,09	4	II,3
4	4971,85	5776,7	5784,24	3831,8	—	—	—
—	4968,11	5772,2	5777,84	3828,8	—	—	—
—	4962,45	5765,8	—	3824,5	—	—	—
—	4892,20	5684,2	5680,34	3770,4	—	—	—
4	4876,35	5665,6	—	3758,0	—	—	—
—	4872,66	5661,4	—	3755,3	—	—	—
—	4869,41	5657,6	—	3752,8	—	—	—
—	4868,92	5657,1	—	3752,4	—	—	—
—	4855,27	5641,2	—	3741,9	3737,08	—	—
4	4832,23	5614,5	5620,41	3724,2	—	—	—
—	4812,01	5591,0	5593,45	3708,6	3706,18	—	—
—	4784,43	5558,9	—	3687,3	—	—	—
—	4755,59	5525,4	5535,69	3665,1	—	—	—
—	4742,07	5510,4	5519,37	3655,2	3653,62	—	—
—	4729,93	5495,6	5490,0 B.	3645,3	3644,45	5	I,1
—	4722,42	5486,7	—	3639,4	3630,82	5	I,2
—	—	5463,7	5473,94	—	3624,15	5	I,3
—	4678,39	5435,7	5437,66	3605,5	—	—	—
—	4607,52	5353,4	5365,46	3551,0	—	—	—
—	4531,54	5265,1	5267,20	3492,4	3487,76	5	II,1
—	—	5238,9	—	—	3474,98	5	II,2
—	4480,96	5206,3	—	3453,4	3468,68	5	II,3
—	4438,22	5156,6	5160,27	3420,5	—	—	—
—	4412,82	5127,2	—	3400,9	—	—	—
—	4361,87	5068,0	5055,12	3361,7	3361,92	6	I,1
—	4338,00	5040,2	—	3343,3	3350,22	6	I,2
—	4326,60	5027,0	—	3334,5	3344,49	6	I,3
—	4319,39	5018,7	—	3329,0	—	—	—
—	4308,49	5017,5	—	3320,5	—	—	—
—	4305,60	5002,7	—	3318,3	—	—	—
—	—	4954,3	4947,50	—	3286,26	6	II,1
—	—	4937,1	4934,24	—	3274,88	6	II,2
—	—	4928,8	—	—	3269,31	6	II,3
—	4215,66	4898,1	4900,13	3249,0	—	—	—
—	—	4863,1	4877,99	—	3225,74	7	I,1
—	—	4847,1	—	—	3215,15	7	I,2

Strontium		Baryum		Calcium			
n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	λ'' berechnet	beobachtet	n	Serie
—	4161,95	4835,3	—	3207,3	3209,68	7	$I_{,3}$
—	—	4796,2	—	—	3181,40	7	$II_{,1}$
—	—	4779,4	—	—	3170,23	7	$II_{,2}$
—	—	4772,9	—	—	3166,95	7	$II_{,3}$
—	—	4750,2	—	—	3150,85	8	$I_{,1}$
—	4077,88	4738,0	4726,63	3142,8	3140,91	8	$I_{,2}$
—	—	4729,0	4724,98	—	3136,09	8	$I_{,3}$
—	—	4700,3	4700,64	—	3117,74	8	$II_{,1}$
5	4032,51	4685,3	4691,74	3107,8	3107,06	8	$II_{,2}$
—	4030,45	4681,8	—	3106,2	3101,87	{8 {9	$II_{,3}$ $I_{,1}$
—	3970,15	4612,8	4605,11	3059,8	—	—	—
5	3969,42	4612,0	4600,02	3059,2	—	—	—
5	3940,91	4578,9	4579,84	3037,2	—	—	—
6	3705,88	4305,8	4323,15	2856,1	—	—	—
—	3653,90	4245,4	4242,83	2816,0	—	—	—
6	3653,32	4244,7	4239,91	2815,6	—	—	—
—	3629,15	4216,6	4224,11	2797,0	—	—	—
6	3628,62	4216,0	—	2796,5	—	—	—
—	3577,45	4156,6	4166,24	2757,1	—	—	—
7	3547,92	4122,2	4132,60	2734,3	—	—	—
—	3504,70	4072,0	4079,56	2701,0	—	—	—
7	3499,40	4064,9	—	2696,9	—	—	—
7	3477,33	4040,2	—	2679,9	—	—	—
—	3475,01	4036,4	—	2677,4	—	—	—
—	3464,58	4025,4	—	2670,1	—	—	—
8	3457,70	4017,4	—	2664,8	—	—	—
—	3456,78	4016,4	—	2664,1	—	—	—
8	3411,62	3963,9	3975,55	2629,3	—	—	—
9	3400,39	3950,8	—	2620,6	—	—	—
8	3390,09	3938,9	3935,87	2612,7	—	—	—
—	3380,89	3928,3	3917,42	2605,7	—	—	—
—	3366,43	3911,4	3910,04	2594,5	—	—	—
—	3351,35	3893,9	3892,93	2582,8	—	—	—
—	3330,15	3869,2	—	2566,5	—	—	—
—	3322,32	3860,1	3861,87	2560,5	—	—	—
—	3307,64	3843,1	—	2549,2	—	—	—
—	3301,81	3836,3	—	2545,8	—	—	—
—	3200,40	3718,5	—	2466,5	—	—	—
—	3199,10	3717,0	—	2465,5	—	—	—
—	3190,10	3706,5	—	2458,6	—	—	—
—	3189,40	3705,7	3701,87	2458,0	—	—	—
—	3182,40	3697,6	—	2452,6	—	—	—
—	3172,30	3685,6	3689,28	2444,7	—	—	—
—	2931,98	3406,6	—	2259,6	2275,60	—	—

Das Studium der Tabelle zeigt, wie sich die Strontium-Serie auf das Baryum überträgt; wir haben in den einzelnen Triplets von $n = 4, \dots 8$ die folgenden Baryum-Linien:

n	1. Linie des Triplets	2. Linie des Triplets	3. Linie des Triplets
4	5777,84	—	5620,41
5	4691,74	4600,02	4579,84
6	4323,15	4239,91	—
7	4132,60	—	—
8	—	3975,55	3935,87

Ebenso lassen sich die bekannten Calcium-Serien auf das Baryum übertragen. Um dies in obiger Tabelle hervortreten zu lassen, sind beim Calcium auch diejenigen Linien eingetragen, welche nicht aus Strontium-Linien berechnet werden konnten, soweit dieselben zu Serien gehören. Aus diesen Calcium-Linien sind die entsprechenden Baryum-Linien nach der Formel

$$\lambda' = \lambda'' \sqrt[3]{\frac{Ba}{Ca}}$$

berechnet, und (zusammen mit den zugehörigen beobachteten Linien) in die Rubrik Baryum eingetragen.

Die Triplets der Neben-Serie I (vgl. oben p. 464) des Calcium ergeben im Baryum:

$n =$	4	5	6	7	8
I, 1	6697,08	5490,0	5055,12	4877,99	—
I, 2	—	—	—	—	4726,63
I, 3	6675,30	5473,94	—	—	4724,98

Aus den Calcium-Linien der Neben-Serie II erhalten wir im Baryum:

II, 1	5997,31	5267,20	4947,50	—	—
II, 2	5971,94	—	4934,24	—	3107,8
II, 3	5965,06	—	—	—	3106,2

§ 10. Quecksilber und Cadmium.

Wenn meine Rechnungen sich im Vorstehenden zunächst auf die Elemente der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe bezogen, so ist dies reiner Zufall; ich habe eben zufällig bei Beginn der Rechnungen die betreffenden Tabellen von Kayser und Runge zuerst zur Hand genommen. Es fehlt noch das Quecksilber.[1]) Um vollständig zu sein, sollten ferner auch in umgekehrter Richtung die Beziehungen zwischen den Spectren jedes Paares von Elementen untersucht werden.

Immerhin zeigen die mitgetheilten Resultate, dass sich thatsächlich die Wellenlängen verschiedener Elemente der zweiten Gruppe des periodischen Systems annähernd verhalten wie die Cubikwurzeln aus den Atomgewichten. Es wird daher genügen, wenn im Folgenden nur noch vereinzelte Proben mitgetheilt werden. Dabei bevorzuge ich wieder diejenigen Linien der Spectra, welche bestimmten Serien zugeordnet sind.

Cadmium, Zink und Quecksilber bilden bekanntlich eine Gruppe für sich. Von diesen sind die ersten beiden schon betrachtet (vgl. § 8); wir vergleichen jetzt noch einige Serien im Cadmium und Quecksilber. Wir gehen von der ersten Neben-Serie des Quecksilbers (nach Kayser und Runge) aus und berechnen die zugeordneten Cadmium-Linien mit der Wellenlänge λ' nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Hg}{Cd}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{200,3}{112}}.$$

Es ergibt sich, wenn wir nur die erste Linie aus jedem Triplet berücksichtigen:

Quecksilber		Cadmium		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
4	3663,20	3017,9	{3005,53 {3016,10 B.	+ 12,37 + 1,80
5	3023,71	2491,2	2491,00	+ 0,20
6	2803,69	2309,8	2306,72	+ 1,08
7	2699,74	2224,5	2227,00 B.	− 3,50

[1]) Aus dem Spectrum des Beryllium sind nur so wenige Linien bekannt, dass dasselbe hier nicht berücksichtigt werden konnte.

Der Buchstabe B. deutet wieder an, dass die betreffende Linie nur im Funkenspectrum des Cadmium beobachtet[1]) wurde; die Linie 2491,00 wurde nach Angabe von Kayser und Runge durch Liveing und Dewar, nicht durch sie selbst beobachtet.

Die analoge Behandlung der zweiten Neben-Serie führt zu folgendem Resultate

Quecksilber		Cadmium		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
3	5460,97	4499,00	—	—
4	3341,70	2756,69	2757,10	— 0,41
5	2925,51	2410,15	2418,50 B.	— 8,35
6	2759,83	2315,90	{2312,95 {2313,60 B.	+ 3,05 + 2,30
7	2674,96	2203,75	{2194,67 {2206,20 B.	+ 9,08 — 2,45

Wollte man für $n = 3$ die der Rechnung entsprechende Linie der Serie, nämlich 5374,42 (die aber nicht beobachtet ist) zu Grunde legen, so würde ihr die Linie 4416,7 im Cadmium entsprechen, während 4415,6 (B) beobachtet wurde.

Die hier zusammengestellten Cadmium-Linien könnte man zu neuen Serien zusammenfassen.

Ausserdem heben Kayser und Runge (a. a. O. p. 53) noch einige ausgezeichnete Triplets und Paare im Quecksilber-Spectrum hervor, von denen ich je die erste Linie einer entsprechenden Rechnung unterzogen habe, was zu folgendem Resultate führte.

Quecksilber	Cadmium		
beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
3007,02	2477,3	2474,15	+ 3,15
2799,76	2306,5	2306,72	— 0,22
3680,74	3032,4	3034,90 B.	— 2,50
3305,23	2723,0	2726,90 B.	— 3,90
3264,33	2689,3	2677,65	+ 11,65

[1]) Vgl. Reports of the British Association, 1884, p. 368 ff.

Umgekekrt gehen wir im Folgenden von den Serien des Cadmium-Spectrums aus und berechnen die entsprechenden Wellenlängen des Quecksilber-Spectrums; die Resultate ersieht man aus folgender Tabelle (es sind hier alle Linien eines jeden Triplets berücksichtigt).

Erste Neben-Serie.

Cadmium		Quecksilber		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
4	3613,04	4385,6	4385,70 B.	— 0,10
4	3467,76	4209,2	4211,80 B.	— 2,60
4	3403,74	4131,5	4132,70 B.	— 1,20
5	2980,75	3618,1	3680,70 B.	—
5	2881,34	3497,4	3494,50 B.	+ 2,90
5	2837,01	3443,6	3440,60 B.	+ 3,00
6	2763,99	3355,0	3351,52	+ 3,48
6	2677,65	3229,3	3227,50 B.	+ 1,80
6	2639,34	3204,0	3207,10 B.	— 3,10
7	2660,45	3229,3	viele schwache Linien B.	—
7	2580,33	3132,0	3131,94	— 0,06
7	2544,84	3089,0	3085,41	+ 3,59
8	2601,99	3158,3	3144,61	+ 13,69
8	2525,57	3065,6	3050,58	+ 15,02
8	2491,00	3023,6	3023,71	— 0,11

Zweite Neben-Serie.

Cadmium		Quecksilber		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
3	5086,06	6173,6	6152,30 B.	+ 21,30
3	4800,09	5826,4	5819,05	+ 7,35
3	4678,37	5678,7	6679,10	— 0,40
4	3252,63	3948,1	3949,00 B.	— 0,90
4	3133,29	3804,0	3807,30 B.	— 3,30
4	3081,03	3739,8	viele schwache Linien B.	—
5	2868,35	3481,7	3473,40 B.	+ 8,30
5	2775,09	3368,5	3367,03	+ 1,47
5	2733,97	3318,6	3326,40 B.	— 7,80
6	2712,65	3292,7	3305,23	— 2,53
6	2629,15	3192,2	—	—
6	2592,14	3146,4	3144,61	+ 1,79
7	2632,29	3196,0	3207,10 B.	— 11,10
7	2553,61	3099,6	3095,35	+ 4,25
7	2521,74	3060,9	3050,58	+ 10,32
8	2582,86	3135,1	3135,89	— 0,79
8	2474,15	3004,2	3007,02	— 2,82
8	—	—	—	—
9	2553,61	3099,6	3095,35	+ 4,25

In den beiden letzten Tabellen sind 33 Linien des Cad mium-Spectrums aufgeführt. Von den entsprechenden Linie des Quecksilber-Spectrums konnten nur 16 den Beobachtunge von Kayser und Runge (bezw. deren Vorgänger) entnomme werden; die anderen 17 wurden aus den neueren Beobach tungen[1]) von Eder und Valenta (in denen sowohl da Funken- als das Bogen-Spectrum berücksichtigt ward) ergänzt Entsprechend diesem Resultate dürfen wir erwarten dass bei weiterer Verfeinerung der Beobachtungs methoden auch manche Lücke in den früheren Ta bellen sich wird ausfüllen lassen, und dass so ein noch bessere Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung wird zu erzielen sein.

§ 11. Lithium und Natrium.

Im Lithium-Spectrum unterscheidet man eine Haupt-Seri und zwei Neben-Serien.

Die Haupt-Serie ist gegeben durch die Formel:

$$\text{I.} \qquad 10^8 \lambda^{-1} = 43584{,}73 - 133669 n^{-2} - 1100084 n^{-4},$$

worin $n = 4, 5, \ldots, 11$. Für die erste Neben-Serie haben wir (immer nach Kayser und Runge)

$$\text{II.} \qquad 11^8 \lambda^{-1} = 28586{,}74 - 109625{,}5 n^{-2} - 1847 n^{-4},$$

und für die zweite Neben-Serie:

$$\text{III.} \qquad 10^8 \lambda^{-1} = 28666{,}69 - 122391 n^{-2} - 231700 n^{-4}.$$

Versucht man nun von der Wellenlänge λ des Lithium nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Na}{Li}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{23{,}05}{7{,}03}}$$

zu einer Wellenlänge λ' des Natrium überzugehen, so ergibt sich durchaus keine Uebereinstimmung. Nur für die Wellen-

---

[1]) Vgl. Reports of the British Association 1895, p. 300 ff.; und Wiener Denkschriften, Bd. 51, 1894.

änge 4132,44 im Lithium ergibt sich durch Rechnung die Wellenlänge 6152,4 im Natrium, die der beobachteten Wellenänge 6161,15 hinreichend nahe liegt, noch besser mit der im Funken-Spectrum des Natrium beobachteten Wellenlänge 6154,6 übereinstimmt.

Es geht hieraus hervor, dass die speciellen Voraussetzungen, welche bei den Elementen der ersten Mendelejeff'schen Gruppe genügten, jetzt nicht mehr hinreichen. Wir müssen vielmehr die allgemeinere Formel (42) oder (43)

$$\lambda' = A \cdot \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{Na}{Li}}$$

in Betracht ziehen und versuchen, ob sich ein entsprechender Werth von A finden lässt (vgl. oben p. 461 f.). Da man von vornherein nicht weiss, wie sich vielleicht die Linien beider Spectren entsprechen, so muss man durch Probiren einen möglichst günstigen Werth von A ermitteln. Nach mehrfachen vergeblichen Versuchen habe ich A so bestimmt, dass der Linie $n = 4$ aus der Haupt-Serie des Lithium ($\lambda = 2741,39$) die Linie $n = 4$ aus der Haupt-Serie des Natrium ($\lambda' = 3303,07$) entspricht; denn beide Linien liegen ziemlich isolirt in der Mitte des beobachteten Spectrumtheiles. Es ergibt sich dann:

$$A = 1,2052.$$

λ Lithium			λ' Natrium				
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
III	5	4273,44	5150,6	5149,19	+ 1,41	5	II,$_2$
II	5	4132,44	4980,6	4979,30	+ 1,30	5	III,$_2$
II	7	3794,90	4573,8	4573,6 B.	+ 0,20	—	—
II	8	3718,90	4482,2	4494,3	− 12,10	7	III,$_2$
III	9	3670,60	4424,0	4423,70	− 0,30	8	II,$_1$
I	4	2741,39	3303,07	3303,07	—	4	I
I	5	2562,60	3088,6	3093,1 B.	− 4,50	—	—
I	6	2475,13	2983,1	2984,3 B.	− 1,20	—	—
I	7	2425,55	2923,4	2921,4 B.	+ 2,00	—	—
I	8	2394,54	2886,0	2903,0 B.	− 17,00	—	—

Die letzte Colonne vorstehender Tabelle bezieht sich au die im Natrium auftretenden Serien, eine Haupt-Serie und zwe Neben-Serien, wobei in letzterer immer zwei benachbarte Linie zugleich auftreten; diese Serien sind mit I, II, III bezeichnet und es bedeutet z. B. $II,_1$ die erste, $II,_2$ die zu demselbe Werthe von n gehörige zweite Linie der ersten Neben-Seri

Von den 18 Linien, die bei Kayser und Runge ange geben werden, genügen daher 10 annähernd der aufgestellte Formel. Die Serien sind wieder gestört; wir werden weiterhi sehen, dass ein gegenseitiges Entsprechen der Serien auch nich sicher zu erwarten ist.

Nach den einleitenden Erörterungen ist zu erwarten, das sich die Linien eines Spectrums aus verschiedenen Klasse zusammensetzen, und zwar so, dass jede Klasse durch ein transscendente Gleichung repräsentirt wird.

Die grössten Wellenlängen des Lithiums geben bei der Um rechnung Wellen, die in's Ultrarothe fallen und sich so leich der Beobachtung entziehen. Scheiden diese aus, so bleibe noch 7 beobachtete Linien im Lithium-Spectrum übrig. Dies Anzahl ist zu gering, um daraus Schlüsse zu ziehen; immerhi sei bemerkt, dass sich 4 von diesen wieder nach der Forme

$$\lambda'' = B \cdot \lambda \sqrt[3]{\frac{Na}{Li}}$$

annähernd berechnen lassen, wenn

$$B = 13{,}381$$

gewählt wird, wie die folgende Tabelle zeigt.

Lithium			Natrium				
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
II	3	6103,77	8167,4	8188,3	— 20,90	3	$III,_1$
II	4	4602,37	6156,5	6154,62	+ 1,88	4	$II,_1$
III	7	3838,30	5136,0	5149,19	— 13,19	5	$II,_1$
I	3	3232,77	4325,7	4325,7	—	9	$III,_1$

Die Zahl 5149,19 kam auch in der vorhergehenden Ta-
elle vor; sie wäre dort eventuell durch die ebenfalls beob-
chtete Wellenlänge 5153,72 zu ersetzen. Wenngleich man
us diesen wenigen Zahlen keine Schlüsse ziehen kann, haben
ir diesen Vergleich doch angestellt, da sich im Folgenden
eim Uebergange von Natrium zum Kalium etwas ähnliches
eigen wird.

§ 12. Natrium und Kalium.

Im Spectrum des Natrium unterscheidet man die schon
oeben erwähnten Serien, nämlich eine Haupt-Serie

$$\text{I} \quad 10^8 \lambda^{-1} = 41496{,}34 - 127040\, n^{-2} - 843841\, n^{-4},$$

ınd zwei Neben-Serien, jede aus Linien-Paaren bestehend:

$$\begin{aligned}
\text{II},_1 \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 24549{,}12 - 120726\, n^{-2} - 197891\, n^{-4},\\
\text{II},_2 \quad & 24565{,}83 - 120715\, n^{-2} - 197935\, n^{-4},\\
\text{III},_1 \quad & 24475{,}34 - 110065\, n^{-2} - 4148\, n^{-4},\\
\text{III},_2 \quad & 24494{,}84 - 110153\, n^{-2} - 3487\, n^{-4},
\end{aligned}$$

vorin die ganze Zahl n von 3, bezw. 4 bis 9 geht.

Beim Kalium liefert die Haupt-Serie für jeden Werth
von n ein Paar benachbarter Linien nach den Formeln

$$\begin{aligned}
\text{I},_1 \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 35091{,}83 - 127207\, n^{-2} - 623087\, n^{-4},\\
\text{I},_2 \quad & 35093{,}22 - 127213\, n^{-2} - 618547\, n^{-4}.
\end{aligned}$$

Ausserdem treten vier Neben-Serien, die sich auch paar-
weise ordnen lassen, auf, nämlich:

$$\begin{aligned}
\text{II},_1 \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 22021{,}83 - 119393\, n^{-2} - 62506\, n^{-4},\\
\text{II},_2 \quad & 22077{,}11 - 119264\, n^{-2} - 63981\, n^{-4},\\
\text{III},_1 \quad & 21991{,}24 - 114450\, n^{-2} - 111146\, n^{-4},\\
\text{III},_2 \quad & 22050{,}32 - 114478\, n^{-2} - 111337\, n^{-4}.
\end{aligned}$$

In den Spectra beider Elemente habe ich zunächst wieder
die Serien verglichen. Es ergibt sich, dass sich die Haupt-
Serie des Natrium nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ka}{Na}}$$

annähernd auf das Kalium überträgt, wie folgende Tabelle zeigt.

Natrium		Kalium				
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	*n*	Serie
3	5896,16	7032,2	—	—	—	—
4	3303,07	3939,5	3943,3 B.	— 3,80	—	—
5	2852,91	3402,6	3403,8 B.	— 1,20	—	—
6	2680,46	3196,9	{3190,2 B.	+ 6,7	—	—
			{3217,27	— 10,37	6	I, 2
7	2593,98	3093,6	3102,15	— 8,55	7	I, 2
8	2543,85	3034,0	3034,94	— 0,94	8	I, 1
9	2512,23	2928,0	{2938,7 B.	— 10,70	—	—
			{2942,8	— 14,80	11	I, 1
—	4494,3	5360,2	5359,88	+ 0,32	—	—

Die letzte Linie der Tabelle gehört nicht der Haupt-Serie an; sie ist mit aufgeführt, weil sie in gleicher Weise wie die anderen zu einer beobachteten Kalium-Linie führt. Der Buchstabe B. bezieht sich wieder auf das Funken-Spectrum des Kalium.

Unter den obigen Natrium-Linien lässt sich eine Gruppe von 10 Linien aussondern, die nach der Formel

$$\lambda' = A \cdot \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{K}{Na}}$$

bekannte Kalium-Linien ergeben, wenn

$$A = 2{,}60215$$

genommen wird; sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Natrium			Kalium				
Serie	*n*	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	*n*	Serie
III, 2	6	4665,2 B.	5133,4	5112,68	+ 20,72	7	II, 1
II, 1	7	4546,03	5002,2	5006,8 B.	— 4,20	—	—
—	—	4500,0	4951,6	4952,2	— 0,60	8	III, 1
III, 1	7	4494,3	4945,2	4943,1	+ 2,10	8	III, 2
II, 1	8	4423,7	4867,6	4870,8	— 3,20	9	II, 1
II, 2	8	4420,2	4863,6	4863,8	— 0,20	9	II, 2
—	—	4393,7	4834,6	}4832,3 B.	+ 2,30	—	—
—	—	4390,7	4831,3		— 1,00	—	—
II, 1	9	4343,7	4779,6	4788,8	— 9,20	10	III, 2
—	—	4325,7	4759,8	4759,8	—	11	II, 1

Eine andere Gruppe von 12 Linien lässt sich gemäss der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{K}{Na}} \cdot B, \text{ wo } B = 1{,}0677,$$

zusammenstellen, wie die folgende Tabelle zeigt.

Natrium			Kalium				
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
III_1	5	4983,53	5320,5	5323,55	— 3,05	6	III_2
II_1	6	4752,19	5073,4	5084,49	— 11,09	7	III_2
II_2	6	4748,36	5069,8	5057,4 B.	+ 12,40	—	—
III_1	6	4669,4	4992,3	5006,8 B.	— 14,50	—	—
III_2	6	4665,2	4981,1	4965,5	+ 15,60	8	II_1
II_1	7	4546,03	4854,3	4856,8	— 2,50	9	III_1
II_2	7	4542,75	4850,3	4850,8	— 0,50	9	III_2
III_1	7	4500,0	4804,7	4808,8	— 4,10	10	III_2
III_2	7	4494,3	4798,6	4796,8	+ 1,80	10	III_1
II_1	9	3343,7	4637,3	4650,7 B.	— 13,40	—	—
I,	4	3302,47	3526,7	3531,2 B.	— 4,50	—	—

Von den 35 Linien, welche Kayser und Runge im Natrium-Spectrum aufführen, sind so 27 mit Linien des Kalium-Spectrums annähernd zur Deckung gebracht; die doppelt vorkommende Linie 4494,3 ist dabei nur einfach gezählt. Die Linien der Haupt-Serie des Natrium entsprechen Linien der Haupt-Serien des Kalium oder solche, die hier keiner Serie zugehören; den Linien der Neben-Serien entsprechen im wesentlichen ebensolche Linien.

§ 13. Kupfer, Silber und Gold.

Im Kupfer-Spectrum führen Kayser und Runge 305 Linien auf; nur verhältnissmässig wenige lassen sich zu Serien zusammenordnen. Auf diese beschränke ich vorläufig die nachfolgende Untersuchung. Wir haben zwei sogenannte Neben-Serien, die aus Paaren von Linien bestehen, welche aber nicht alle beobachtet wurden. Analog sind die Verhältnisse beim Silber, in dessen Spectrum 66 Linien angegeben werden. Aus den Silber-Linien sind nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{Cu}{Ag}} = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{63}{108}}$$

die Kupfer-Linien berechnet.

Silber			Kupfer		
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
—	—	5545,86	4633,8	4634,47 B. 4642,78	— 0,67 + 8,98
I,$_1$	4	5471,72	4571,9	4587,19	— 15,29
—	—	4888,46	4084,6	4080,70	+ 3,90
II,$_1$	4	4668,70	3900,9	3899,43	+ 1,47
I,$_1$	5	4212,1	3519,4	3520,07	— 0,67
II,$_1$	5	3981,87	3327,0	3327,2 B. 3329,68	— 0,20 — 2,68
I,$_1$	6	3810,6	3183,9	3184,7 B. 3175,81	— 0,80 + 8,09
—	—	3383,0	2826,7	2824,7 B.	+ 2,00

Bei der grossen Menge der im Kupfer beobachteten Linien könnte man die Uebereinstimmung für zufällig halten; deshalb habe ich umgekehrt den Ausgang von den Linien der Kupfer-Spectrums genommen, soweit dieselben durch die Beobachtungen von Kayser und Runge ausgezeichnet sind. So ergibt sich folgende Tabelle.

Kupfer			Silber		
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
—	—	5782,30	6920,3	—	—
I,$_1$	4	5220,25	6247,6	6249 B.	— 1,6
II,$_1$	4	4531,04	5422,8	5436,0 5424,9 B.	— 13,2 — 2,1
I,$_1$	5	4063,50	4863,9	4874,36	— 10,46
—	—	4056,8	4855,3	4848,33	+ 6,97
II,$_2$	5	3861,88	4622,0	4620,57 B. 4616,03	+ 1,43 + 5,97
—	—	3688,6	4414,6	4411,0 B. 4396,49	+ 3,6 + 18,11
I,$_1$	7	3512,19	4204,5	4209,4 B. 4212,1	— 4,9 — 7,6
I,$_1$	8	3415,94	4087,8	4085,92 B.	+ 1,88
II,$_1$	6	3599,20	4307,5	4311,3 B.	— 3,80
—	—	3274,06	3919,1	3919,95 B. 3914,47	— 0,85 + 4,63

Versucht man die in der vorletzten Tabelle berücksichtigten Silber-Linien auf das Spectrum des Goldes nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{Au}{Ag}} = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{197}{108}}$$

zu übertragen, so kommt man zu folgendem Resultate.

Silber	Gold		
beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
5545,86	6776,1	—	—
5471,72	6685,6	6670 B.	+ 15,6
4888,46	5973,0	{5957,24	+ 15,76
		{5961,40 B.	+ 11,60
4668,70	5704,4	5692,49 B.	+ 11,91
4212,1	5146,5	5142,62 B.	+ 3,88
3981,87	4865,2	—	—
3810,6	4655,9	4649,96 B.	+ 5,94
3383,0	4133,5	4128,80 B.	+ 4,70

Der Buchstabe B. bezieht sich wieder auf die im Funken-Spectrum allein beobachteten Linien.[1])

Die Metalle Kupfer, Silber und Gold gehören zur ersten Mendelejeff'schen Gruppe. Soweit man aus den hier mitgetheilten Proben einen Schluss ziehen kann, scheinen sie in ihrem Verhalten mehr den Elementen der zweiten Gruppe sich zu nähern; es wäre aber möglich, dass wir zufällig gerade günstige Linien-Gruppen herausgegriffen haben. Beim Vergleiche zwischen Gold und Silber liegen die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung alle in gleichem Sinne, was andeutet, dass noch mit einem Factor (A in den früheren Formeln) zu multipliciren sein wird.

§ 14. Ueber das Auftreten der Serien von Spectral-Linien.

Die angeführten Beispiele zeigen, dass in vielen Fällen bei unserer Uebertragung der Linien eines Elementes auf ein anderes Element die von Rydberg, Kayser und Runge be-

[1]) Reports of the British Association 1884 und (mit den neueren Beobachtungen von Eder und Valenta) 1895.

merkten und durch empirische Formeln dargestellten Serien theilweise gestört werden. Man wird fragen, ob eine solche Störung mit unserer Theorie vereinbar ist, und ob letztere überhaupt zur Aufstellung solcher Serien Veranlassung gibt.

Es muss zunächst hervorgehoben werden, dass die Eintheilung der Spectral-Linien in Serien nur bei den Elementen der ersten Mendelejeff'schen Gruppe nahezu gelungen ist, während bei denen der zweiten Gruppe nur vereinzelte Serien festgestellt werden konnten. Das Auftreten dieser Serien hängt demnach von den specifischen Constanten des Elements ab; und man kann nicht erwarten, dass eine allgemeine Discussion unserer transscendenten Gleichungen zu solchen Serien führen wird; nur bei speciellen Relationen zwischen den vorkommenden Constanten wird vielmehr ein solches Resultat zu erwarten sein. Deutlich ist dies auch dadurch angezeigt, dass ein bei Alkalien gefundenes empirisches Gesetz (nach welchem die Schwingungsdifferenz der Paare oder Triplets in der gleichen Serie dem Quadrate des Atomgewichtes proportional ist) bei anderen Elementen nicht bestätigt wurde.

Die von uns aufgestellten Gleichungen (18), (23), (23a), (34) haben die gemeinsame Eigenschaft, dass sich ihre Wurzeln n_s bei wachsender Grösse den ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ oder π nähern. Bedeutet also n eine ganze Zahl, so kann man bei hinreichend grossem Werthe des Index s die Wurzel n_s in der Form

$$n_s = a n + \beta n^{-1} + \gamma n^{-2} + \dots$$

ansetzen. Nun ist n_s der Schwingungsdauer T und somit auch der Wellenlänge λ umgekehrt proportional. Demnach erhalten wir

$$\lambda^{-1} = a n + b n^{-1} + c n^{-2} + \dots \tag{45}$$

Diese Formel möge für eine der obigen transscendenten Gleichungen Gültigkeit haben; für eine andere dieser Gleichungen sind statt a, b, c, ... andere Werthe einzusetzen. Für

zwei verschiedene von jenen Gleichungen gelten daher Formeln der Gestalt

$$(46)\qquad \begin{aligned} \lambda_n^{-1} &= a\,n + \sum_{s=1}^{\infty} a_s\, n^{-s}, \\ \lambda_m^{-1} &= a m + \sum_{s=1}^{\infty} a_s m^{-s}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, die zur Zahl n gehörige Wurzel λ_n der einen Gleichung sei identisch (oder nahezu identisch) mit der zur Zahl m gehörigen Wurzel λ_m der andern Gleichung, so dass die numerische Relation

$$(47)\qquad \lambda_n^{-1} = \lambda_m^{-1} = a\,n + \Sigma a_s n^{-s} = a\,m + \Sigma a_s m^{-s}$$

besteht. Nehmen wir ferner an, es sei in Folge der speciellen Constanten des Atoms m sehr gross gegen n, so dass

$$m = \mu + n$$

gesetzt werden kann, wo μ eine sehr grosse Zahl bezeichnet. An Stelle der zweiten Gleichung (46) erhalten wir dann

$$(48)\qquad \lambda_m^{-1} = a(\mu + n) + \Sigma a_s(\mu + n)^{-s},$$

und mit Hülfe von (47) folgt durch Elimination von n

$$a\lambda_m^{-1} - a\lambda_n^{-1} = a\,a\,\mu + a\,\Sigma\, a_s\,(\mu + n)^{-s} - a\,\Sigma\, a_s n^{-s}.$$

Es ist also

$$\lambda_m^{-1} = \lambda_n^{-1} = \frac{a\,a\,\mu}{a - a} + \frac{a}{a - a}\Sigma\, a_s\,(\mu + n)^{-s} - \frac{a}{a - a}\,\Sigma\, a_s n^{-s}.$$

Lassen wir m und n gleichseitig um eine Einheit abnehmen, so werden die Wellenlängen λ_{n-1} und λ_{m-1} nur wenig von einander verschieden sein; dasselbe wird für λ_{n-r} und λ_{m-r} gelten, wenn die Zahl r hinreichend klein ist. Die Gleichungen (46) bezw. (48) ergeben

$$\begin{aligned} \lambda_{n-r}^{-1} &= a(n - r) + \Sigma a_s(n - r)^{-s}, \\ \lambda_{m-r}^{-1} &= a(\mu + n - r) + \Sigma a_s(\mu + n - r)^{-s}; \end{aligned}$$

und die Elimination von n ergibt:

$$a \lambda_{m-r}^{-1} - a \lambda_{n-r}^{-1} = a a \mu + a \Sigma a_s (\mu + n - r)^{-s} - a \Sigma a_s (n-r)^{-s}.$$

Setzen wir nun

$$\lambda_{m-r}^{-1} - \lambda_{n-r}^{-1} = \varepsilon_r,$$

so wird

$$\lambda_{n-r}^{-1} = \frac{a(a\mu - \varepsilon_r)}{a-a} + \frac{a}{a-a} \Sigma a_s (\mu + n - r)^{-s} - \frac{a}{a-a} \Sigma a_s (n-r)^{-s},$$

$$\lambda_{m-r}^{-1} = \frac{a(a\mu + \varepsilon_r)}{a-a} + \frac{a}{a-a} \Sigma a_s (\mu + n - r)^{-s} - \frac{a}{a-a} \Sigma a_s (n-r)^{-s}.$$

Soll nun, wie schon hervorgehoben wurde, μ eine sehr grosse, ε_r eine sehr kleine Zahl sein, und sind auch $a\mu$ und $a\mu$ gross gegen ε_r, so erleidet die Differenz $a\mu - \varepsilon_r$ bei Veränderung von r nur sehr geringe Aenderungen, kann also als annähernd constant betrachtet werden; dasselbe gilt für die Summe $a\mu + \varepsilon_r$; wir setzen demnach

$$a' = a a \mu - \varepsilon_r.$$

$$a_0 = a a \mu + \varepsilon_r.$$

Ferner können, wenn μ gross ist, alle negativen Potenzen von $(\mu + n - r)$ vernachlässigt werden, denn die Zahl r darf ja gewisse Grenzen nicht überschreiten. Unter diesen Annahmen erhalten wir die folgenden Näherungsformeln

$$(49) \qquad \begin{aligned} \lambda_{n-r}^{-1} &= \frac{a_0}{a-a} - \frac{a}{a-a} \Sigma a_s (n-r)^{-s}, \\ \lambda_{m-r}^{-1} &= \frac{a_0}{a-a} - \frac{a}{a-a} \Sigma a_s (n-r)^{-s}. \end{aligned}$$

Hiermit sind in der Nähe einer Stelle des Spectrums, wo zwei verschiedene von den obigen transscendenten Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben (wo also zweien verschiedenen Gruppen von Linien eine Wellenlänge gemeinsam ist), die voraufgehenden reciproken Wellenlängen (Wurzeln n_s) angenähert dargestellt.

Es handelt sich dabei selbstverständlich nicht nothwendig um convergente Reihen-Entwicklungen, sondern nur um einen Ansatz für numerische Rechnung. Solche Stellen, wo eine Gleichung von der Form (47) besteht, werden nicht bei jedem Elemente in dessen Spectrum vorkommen, sondern nur bei besonderer Beziehung zwischen den Constanten des Elements. Genau ist die Relation (47) wahrscheinlich niemals erfüllt, sondern immer nur näherungsweise. Vorausgesetzt ist ferner, dass μ und ε die angegebenen Grössenverhältnisse aufweisen.

Die Gleichungen (49) zeigen nun genau den Typus der Formeln, welche Kayser und Runge für ihre Paare zusammengehöriger Serien aufgestellt haben. Es ist nämlich das wichtige Gesetz erfüllt, dass zwei zusammengehörige Serien sich nur durch das constante Glied unterscheiden, während die Coefficienten der negativen Potenzen des Index $(n-r)$ in beiden Formeln identisch sind.[1])

Dieses Gesetz ist bei den Alkalien (*Li*, *Na* und *K*) nur näherungsweise erfüllt; wahrscheinlich ist bei diesen die Zahl μ nicht gross genug, um die von uns vorgenommenen Vernachlässigungen zu rechtfertigen.

Die Differenz zusammengehöriger Schwingungszahlen wird durch die Zahl ε_r dargestellt; diese Differenz wird mit wachsendem Index r (d. h. abnehmender Wellenlänge) thatsächlich abnehmen (während wir sie als nahezu constant behandelten), was mit den Beobachtungen von Kayser und Runge übereinstimmt. Für $r = 0$, d. h. für die gemeinsame Wurzel der beiden transscendenten Gleichungen, wird sie gleich Null; für diesen Fall sind also die Formeln (49) nicht mehr anwendbar.

Die Rechnungen von Kayser und Runge zeigen, dass in der Praxis

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 = 0$$

---

[1]) Vgl. besonders die Zusammenstellung der Neben-Serien in Nr. IV der auf p. 463 citirten Abhandlungen von Kayser und Runge.

gesetzt werden kann; ihre Formeln sind nämlich von der Gestalt (vgl. oben p. 464, 468, 471, 478 f.):

$$\lambda_{n-r}^{-1} = A - A_1 (n-r)^{-2} - A_2 (n-r)^{-4},$$
$$\lambda_{m-r}^{-1} = B - A_1 (n-r)^{-2} - A_2 (n-r)^{-4}.$$

Die Zahl n hat bei den genannten Autoren meist den Werth 8, 9 oder 10, r successive die Werthe 1, 2, 3, 4, 5. Es ist aber zu beachten, dass unsere Zahl n nicht nothwendig mit der entsprechenden Zahl bei Kayser und Runge übereinstimmt. Bis jetzt ist nemlich der Anfangspunkt $n = 0$ noch willkürlich gelassen; durch die Substitution

$$n = n_0 + N \tag{50}$$

kann man ihn an eine beliebige Stelle verlegen; dann wird

$$\frac{1}{n-r} = \frac{1}{n_0 + N - r} = \frac{1}{N-r}\left(1 - \frac{n_0}{N-r} + \frac{n_0^2}{(N-r)^2} - \ldots\right),$$

wenn $n_0 < N - r$ ist. Unter dieser Voraussetzung ändern also die Formeln (49) durch die Substitution (50) ihren Charakter nicht. Ist aber $n_0 > N - r$, so wird

$$\frac{1}{n-r} = \frac{1}{n_0}\left(1 - \frac{N-r}{n_0} + \frac{(N-r)^2}{n_0^2} - \ldots\right),$$

also:

$$\lambda_{n-r}^{-1} = C_0 + C_1 (N-r) - C_2 (N-r)^2 + \ldots;$$

wir erhalten also eine Formel von dem Typus, wie sie (mit dem Werthe $C_1 = 0$) Deslandres für die Bandenspectra der Metalloide empirisch aufgestellt hat.[1])

Durch directes Einsetzen des in (50) gegebenen Werthes entsteht eine Gleichung der Form

$$\lambda_{n-r}^{-1} = C_0 - C_1 (n_0 + N - r)^{-1} - C_2 (n_0 + N - r)^{-2} - \ldots.$$

---

[1]) Comptes rendus, t. 104, 106, 110, 112 (1887—91).

welche sich an die Balmer'sche Formel für Wasserstoff und an die Rydberg'sche Verallgemeinerung derselben anschliesst.

Wenn zufällig drei unserer obigen transscendenten Gleichungen an der einen Stelle des Spectrums eine gemeinsame Wurzel haben, so entstehen drei zusammengehörige Formeln des Typus (49), also nicht Paare sondern Triplets von Linien, die Serien bilden (vgl. das Vorkommen bei *Mg, Ca, Sr, Zn, Cd, Hg*).

Um eine Formel der Gestalt (49) an Stelle der ursprünglichen (45) zu setzen, bedarf es natürlich nicht des Hinzutretens einer zweiten Gleichung; denn numerisch müssen die aus (49) berechneten Werthe von λ_{n-r} mit den aus (45) berechneten übereinstimmen. Auch die Wurzeln einer einzigen Gruppe (aus Linie von § 5) können daher in der Nähe einer bestimmten Stelle des Spectrums durch eine Formel des Typus (49) angenähert dargestellt werden. So scheint es beim Lithium und Wasserstoff zu sein.

Wenn die Voraussetzungen, nach denen wir in § 6 Beziehungen zwischen den Spectren verschiedener Elemente aufgestellt haben genau erfüllt wären, müsste beim Uebergang von einem Elemente zum anderen aus jeder Serie wiederum eine Serie entstehen. Da aber diese Voraussetzungen wohl nur annähernd zutreffen, da ferner unsere transscendenten Gleichungen nicht in gleicher Weise von den Constanten des Atoms abhängen, so ist es natürlich, wenn bei diesem Uebergange die Serien in mannigfacher Weise gestört werden, wie es die obigen Beispiele zeigen (vgl. die mitgetheilten Tabellen). Andererseits zeigen diese Beispiele, dass man auf diesem Wege (wie beim Baryum, Silber und Gold) auch neue Serien auffinden kann.

Endlich bliebe zu untersuchen, ob das Auftreten der Serien etwa durch die transscendente, noch nicht näher untersuchte Gleichung (16) bedingt sein kann.

§ 15. Versuch zur Trennung der verschiedenen Linien-Gruppen.

Der weiteren numerischen Behandlungen der aufgestellten Gleichungen steht eine wesentliche Schwierigkeit entgegen, da man zuerst die Aufgabe hat, die verschiedenen, in § 5 aufgestellten Linien-Gruppen von einander zu trennen.

Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die der Gleichung (23), also der sechsten Gruppe angehörigen Linien von den übrigen zu trennen. Der Rechnung wurden die Beobachtungen am Magnesium zu Grunde gelegt. Die Wurzeln nähern sich bei wachsendem Werthe von $\xi = n\varrho$ den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$. Die entsprechenden Schwingungszahlen (λ^{-1}) müssen sich also annähernd verhalten, wie die auf einander folgenden ungeraden ganzen Zahlen.

Es wurden nun die Differenzen der Logarithmen der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gebildet. Andererseits wurden die Differenzen der Logarithmen der beim Magnesium beobachteten Schwingungszahlen gebildet, die Differenzen dieser Differenzen u. s. f., bis sich eine Differenz ergab, die annähernd mit der Differenz der Logarithmen successiver ungerader Zahlen übereinstimmte. Dies trat zuerst bei dem Verhältnisse 21:19 ein; es ist nemlich

$$\log 21 - \log 19 = 0{,}43465.$$

Im Magnesium-Spectrum kommt nun die Wellenlänge 5711,56 vor; und es ist

$$\log (5711{,}56)^{-1} + \log \frac{21}{19} = \log (5167{,}7)^{-1}.$$

Im Magnesium-Spectrum kommt aber nicht die Wellenlänge 5167,7, sondern 5167,55 vor; demnach ist in der folgenden Tabelle die Zahl 5167,7 in die zweite Columne als berechnet, die Zahl 5167,55 als beobachtet eingetragen. Es ist ferner

$$\log (5167{,}55)^{-1} + \log \frac{23}{21} = \log (4718{,}1)^{-1},$$

während die Zahl 4703,33 einer beobachteten Wellenlänge entsprechen würde. Die erste Columne der Tabelle enthält die zugeordneten ganzen Zahlen 19, 21, 23, ... In dieser Weise ist die Rechnung fortgeführt bis an das Ende der beobachteten Linien im Magnesium-Spectrum. Die Columne der beobachteten Linien weist einige Lücken auf. Die vierte Columne gibt die entsprechenden Wellenlängen des Calcium, und zwar gemäss der in § 7 aufgestellten Zuordnung; die eingeklammerten Zahlen sind nur berechnet und nicht beobachtet.

Die fünfte Columne enthält in gleicher Weise die zugeordneten Linien des Cadmium, die sechste diejenigen des Quecksilbers. Wo der berechneten Linie eine beobachtete annähernd entsprach, ist diese letztere in die Tabelle eingesetzt. Der Buchstabe B. bezieht sich wieder auf die Funken-Spectra in den Publicationen der British Association.

Im Funken-Spectrum liegen die Quecksilber-Linien so dicht, dass ihre Aufführung in der Tabelle keine besondere Beweiskraft hat. Ich habe mich aber überzeugt, dass auch im Strontium, Baryum und Zink eine ähnliche Serie ausgesondert werden kann.

m	Magnesium		Zugeordnete Linien des		
	berechnet	beobachtet	Calcium	Cadmium	Quecksilber
19	Ausgangspunkt	5711,56	—	—	—
21	5167,7	5167,55	6102,99	—	—
23	4718,1	4703,33	(5558,0)	—	—
25	4352,0	4352,18	(5143,1)	—	—
27	4029,8	—	(4762,1)	(5322,9)	(6457,8)
29	3751,9	3765 B.	(4449,2)	(4923,7)	(6034,1)
31	3522,1	—	4143,0 B.	4662,69	5781,9 B.
33	3308,6	3330,08	3933,83	(4398,6)	5416,9 B.
35	3139,8	—	3706,18	4141,0 B.	4864,8 B.
37	2970,1	—	(3509,8)	3940,0 B.	4616,5 B.
39	2817,8	2802,80	—	3729,21	4525,1 B.
41	2666,1	2668,26	3158,98	3500,09	4246,1 B.

Hiermit sind wir an das Ende der Magnesium-Spectrums angelangt; setzen wir nun die Rechnung für Calcium fort, so ergibt sich:

m	Calcium		Zugeordnete Linien des	
	berechnet	beobachtet	Cadmium	Quecksilber
43	3012,1	3006,95	(3361,1)	4078,05
45	2807,9	—	3211,8 B.	3896,3 B.

Hiermit ist auch das Ende des Calcium-Spectrums erreicht; wir müssen daher die Rechnung im Cadmium-Spectrum fortsetzen und finden:

m	Cadmium		Zugeordnete Quecksilber-Linien
	berechnet	beobachtet	
47	3075,1	3081,03	3738,9 B.
49	2955,3	2961,64	3593,2 B.
51	2845,5	2837,01	3440,6 B.
53	2729,9	2733,97	3320,5 B.
55	2634,6	2632,29	3207,7 B.
57	2539,9	2544,84	3085,41
59	2458,7	2469,3 B.	3007,02
61	2378,1	2377,3 B.	2386,8 B.
63	2148,2	2144,45	2605,29

Es kommen in der Tabelle einige Linien vor (z. B. 5167,55 und 2668,26 beim Magnesium, 3938,33 beim Calcium), welche schon in den Serien von Kayser und Runge verwendet wurden; das dürfte nicht sein, wenn die hier ausgeschiedenen Serien wirklich einer anderen Gruppe als die früheren Serien angehören, sofern nicht zufällig mehr Coincidenzen vorkommen. Die mitgetheilten Tabellen haben daher keine andere Bedeutung als diejenige, dass sie zeigen, nach welcher Methode vielleicht eine Ausscheidung nach Gruppen möglich ist. Ich hoffe, die hier aufgeworfene Frage demnächst rechnerisch weiter verfolgen zu können.

Sollte es gelingen, hierdurch einzelne Linien des Spectrums den absoluten Zahlen (in der ersten Columne) definitiv zuzuordnen, so wäre dadurch für die Berechnung der andern charakteristischen Constanten des Elementes ein wesentlicher Schritt gethan.

Ueber die Gleichung $x^n = y^n + z^n$.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Vor einiger Zeit habe ich eine Untersuchung über den Fermat'schen Satz, betreffend die Unmöglichkeit dieser Gleichung veröffentlicht, in der ein Beweis für diese Unmöglichkeit versucht wurde. Leider ist derselbe an zwei Stellen (p. 195 und 199) durch Rechenfehler entstellt, und leistet in Folge dessen nicht das verlangte. Er gibt aber insofern einen Fortschritt, als die von Abel gemachten Angaben zum ersten Male bewiesen worden sind, wonach sich die drei Zahlen x, y, z, welche obiger Gleichung genügen, durch drei ganze Zahlen p, q, r gemäss den Formeln

$$
\begin{aligned}
2x &= p^n + q^n + r^n, \\
2y &= p^n + q^n - r^n, \\
2z &= p^n - q^n + r^n,
\end{aligned}
$$

darstellen lassen, wenn keine der Zahlen durch n theilbar ist, im andern Falle aber, wenn z. B. z den Factor n enthält, durch die Formeln

$$
\begin{aligned}
2x &= p^n + q^n + n^{n-1} r^n, \\
2y &= p^n + q^n - n^{n-1} r^n, \\
2z &= p^n - q^n + n^{n-1} r^n.
\end{aligned}
$$

Die doppelten Zwischenkiefer des Menschen.

Von **Johannes Ranke.**

(Eingelaufen 6. Februar 1902.)

In Beziehung auf die Zwischenkieferfrage stehen sich bis jetzt zwei Anschauungen unvermittelt gegenüber.[1])

Auf der einen Seite vertritt eine Anzahl von Autoren die von Theodor Kölliker-Sohn nach Untersuchungen an Kalipräparaten gewonnene Anschauung, dass der Mensch wie alle Säuger jederseits nur eine Zwischenkieferanlage besitze. Oscar Schultze sagt in seinem Grundriss der Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Säugethiere:[2]) „Die Zwischenkiefer hat Th. Kölliker zuerst mit Bestimmtheit beim Menschen nachgewiesen als zwei kleine, in der 8. bis 9. Woche auftretende Knöchelchen, die sehr bald mit dem Oberkiefer verschmelzen.“ [3])

Es bleibt bei dieser Angabe unberücksichtigt, dass unter Waldeyer's Augen Biondi durch Untersuchung von Schnittserien nachgewiesen hat, dass der Zwischenkiefer der Säugethiere aus jederseits 2 also im Ganzen aus 4 Ossificationspunkten sich entwickele.[4])

---

[1]) Die Literatur findet sich zusammengestellt bei Prof. Dr. F. Graf v. Spee, in K. v. Bardeleben: Skeletlehre. II. Abtheilung. Kopf. Jena 1896. S. 258 u. ff.

[2]) 1897. S. 221.

[3]) Kölliker Theodor, Ueber das Os intermaxillare des Menschen und die Anatomie der Hasenscharte und des Wolfsrachens. Nova Acta, Acad. L.-C. 43. Bd. 1881.

[4]) Biondi, Ueber Zwischenkiefer und Lippenkiefer-Gaumenspalte. Arch. f. Anat. u. Phys. Physiol. Abtheilung. 1886.

Derselbe, Ueber den Zwischenkiefer. Anatom. Anzeiger, 3. Bd.

Die beiden verschiedenen Ergebnisse waren 1888 bei dem Anatomen-Kongress in Würzburg von den beiden Hauptbetheiligten selbst: Th. Kölliker und Biondi vorgetragen worden. Obwohl bei dieser Gelegenheit Waldeyer die Präparate Biondi's der Versammlung persönlich demonstrirte, kam es zu keinem Ausgleich der scheinbar nicht zu vermittelnden Gegensätze.

A. v. Kölliker-Vater fand es, „was den Menschen anlange, auffallend, dass niemand nach seinem Sohne sich die Mühe gegeben habe, die erste Entwickelung der Intermaxillare an den unzweideutigen Kalipräparaten zu prüfen, welche allein ganz sichere und relativ leicht zu gewinnende Ergebnisse liefern".[1]) —

Durch Studien über die überzähligen Knochen des menschlichen Schädels[2]) wurde ich zur Nachprüfung der Angaben über den menschlichen Zwischenkiefer veranlasst. Ich benützte, jenem Wunsche A. v. Kölliker's entsprechend, die inzwischen durch O. Schultze[3]) zu einer Methode ersten Ranges für derartige makroscopische Knochenuntersuchungen ausgebildete Kalimethode.

Als Resultat dieser Untersuchung kann ich eine naturgetreue Abbildung der Vorderansicht der Oberkieferpartie eines Embryo von 28 mm Scheitel-Steisslänge, also aus dem Anfang des 3. Monats, vorführen (Fig. 1).

S. 577 (1888). Unter den darauf geprüften Säugethieren zeigte nur das Schwein eine nur unvollkommene aber immer noch erkennbare Trennung dieser Ossifikationspunkte; am Schwein hatte Th. Kölliker seine vergleichenden Untersuchungen hauptsächlich ausgeführt.

Theodor Kölliker, Ueber die einfache Anlage des Zwischenkiefers (gegen Biondi). Anatom. Anzeiger, 3. Bd. S. 572 (1888).

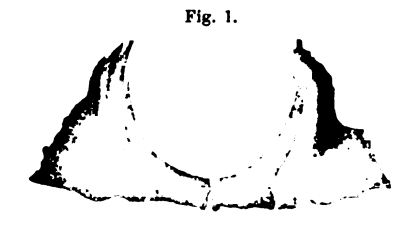
[1]) Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft. Versammlung in Würzburg 1888. Anatom. Anzeiger, 3 Bd. (1888). S. 579.

[2]) J. Ranke, Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldachs. Abhandl. der kgl. bayer. Akademie d. W. II. Cl. XX. Bd. II. Abth. S. 276—464.

[3]) Oscar Schultze, Grundriss der Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Säugethiere. Leipzig 1897. S. 459.

Die Zwischenkieferanlage erscheint jederseits, von der Vorderseite gesehen, als eine einheitliche, ganz so wie sie Th. Kölliker aus einem etwas früheren Stadium und daher noch etwas weniger entwickelt abgebildet hat. Mein Präparat entspricht in der Form sehr nahe der Form des Zwischenkiefers des nachstehend abgebildeten kindlichen Orangutan-Schädels (Fig. 2). Die definitive Form des Alveolarfortsatzes des Intermaxillare mit den Nachbarpartien, vor allem aber der Nasenfortsatz, welcher bei Th. Kölliker kaum angedeutet, ist schon ziemlich fertig ausgebildet.

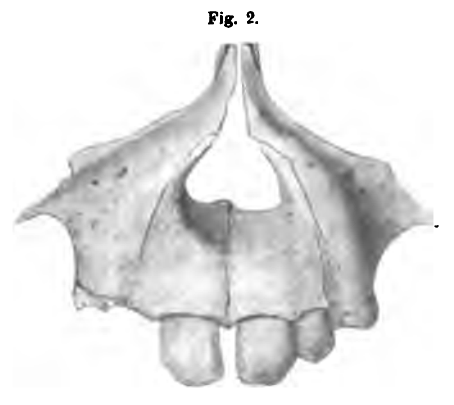
Fig. 1.



Zwischenkiefer eines menschlichen Embryo vom Anfange des dritten Monates (stark vergrössert).

Mein Bild entspricht auch sehr nahe dem von Leuckart[1]) mitgetheilten, bei welchem aber die Trennung vom Oberkiefer nur einseitig (rechts) unvollständig noch zu erkennen war.

Fig. 2.



Zwischenkiefer eines jungen Orangutan.

Bei wenig älteren Embryonen sah ich Zwischenkiefer und Oberkiefer mit einander in beginnender Verschmelzung. Diese beginnt an der oberen hinteren Ecke des Zwischenkiefer-Alveolarfortsatzes, die Trennung des Alveolarfortsatzes nach unten erscheint dann noch als mehr oder weniger tiefe Einkerbung, die Trennungsspalte zwischen dem

---

[1]) F. S. Leuckart, Untersuchungen über das Zwischenkieferbein des Menschen. Stuttgart 1840 (s. hier die ältere Literatur).

Nasenfortsatz des Zwischenkiefers und dem Stirnfortsatz des Oberkiefers bleibt etwas länger deutlich offen, aber schon bei wenig grösseren Früchten ist äusserlich von der ehemaligen Trennung nichts mehr oder fast nichts mehr zu bemerken.

Speziell hebe ich hervor, dass von einer Trennung zwischen den Alveolen der beiden Schneidezähne auf der Vorderansicht d. h. auf der alveolaren Vorderfläche der Zwischenkiefer auch nicht die leiseste Spur bemerkbar wurde.

Soweit stimmen meine Ergebnisse vollkommen mit denen Theodor Kölliker's überein.

Aber meine Ergebnisse stimmen auch vollkommen mit den Beobachtungen überein, welche Biondi an Schnittserien, also nach einer ganz anderen Methode, gefunden hat:

Seine beiden „Zwischenkiefer" stehen nicht im Ganzen neben einander, sondern im Wesentlichen hinter einander, so dass von dem zweiten auf der Aussenfläche des Alveolarfortsatzes normal nichts in Erscheinung tritt.

Der eine der beiden Ossificationscentren Biondi's für jeden Zwischenkiefer liegt im Gebiete des inneren Nasenfortsatzes: metopogener Zwischenkiefer, der andere im Gebiete des Oberkieferfortsatzes: gnathogener Zwischenkiefer. Der letztere, welchen ich mit Meckel u. A. als vorderen Zwischenkiefer bezeichnen möchte, bildet die Hauptmasse des Knochens, er ist es, den unsere Fig. 1 wiedergibt. Die beiden metopogenen oder, wie ich sagen möchte, die hinteren Zwischenkiefer, bilden (rechts und links) die hintere Alveolarwand für die beiden mittleren Schneidezähne, jeder hintere Zwischenkiefer für sich also die hintere Wand seines (des mittleren) Schneidezahns. Die hintere Alveolarwand für den äusseren Schneidezahn jederseits wird von dem äusseren Zwischenkiefer gebildet. Beide Zwischenkiefer bilden jederseits gemeinschaftlich den Zwischenkieferabschnitt des harten Gaumens.

Diese letzteren Verhältnisse, die Ausdehnung des hinteren Zwischenkiefers an der Rückwand des Alveolarfortsatzes sowie auf dem harten Gaumen, lassen sich viel leichter nachweisen als das isolirte Bestehen des äusseren Zwischenkiefers, welches

weit früher verschwindet. Im ganzen Verlauf der Bildung des 3. Monats, ja auch noch bei älteren Embryonen, sind die beiden Zwischenkieferanlagen jederseits noch im Wesentlichen vollkommen getrennt.

Die beiden Zwischenkiefer werden jederseits auf der Gaumenfläche und quer durch die Mitte der Alveole des inneren Schneidezahns durch die Sutura interincisiva Biondi, oder Sutura intermedia Leuckart, von einander getrennt.

Ueber diese Sutur, ihr Vorkommen bei erwachsenen, ihre Variationen bei diesen und embryonalen sowie jugendlichen Schädeln habe ich an anderer Stelle Bericht erstattet,[1]) worauf ich hier verweisen darf.

Bei der Bildung der doppelseitigen Hasenscharte trennen sich meist die Zwischenkieferanlagen in der Sutura intermedia = interincisiva von einander, die äusseren Zwischenkiefer kommen in der Mittellinie nicht zur Vereinigung und die beiden hinteren Zwischenkiefer erscheinen dadurch bei dieser Missbildung, meist unter einander verschmolzen, als ein individualisirtes Gebilde, die beiden mittleren Schneidezähne tragend.

Es erscheint mir sehr beachtenswerth, dass die Natur normal eine, dieser Missbildung bei dem Menschen u. A. ganz entsprechende, Individualisirung der hinteren Zwischenkiefer von den vorderen hervorbringt. Leuckart beschreibt in seiner umfassenden Monographie[2]) nach den Untersuchungen von Rudolphi und Meckel die Intermaxillarknochen des Schnabelthieres, Ornithorhynchus paradoxus. Das Schnabelthier zeigt danach, was ich für jüngere Schädel vollkommen bestätigen kann (Fig. 3 und 4), zwei grosse zahnlose Zwischenkiefer (b), welche Meckel als die oberen Zwischenkiefer bezeichnet. „Nach hinten enden sie zugespitzt zwischen den Kiefern und Nasenknochen, steigen eine Strecke an den letzteren hinan und biegen sich, sich einander nähernd, vorne hakenförmig nach innen, spitz endend.“ Ausser diesen beiden Knochen

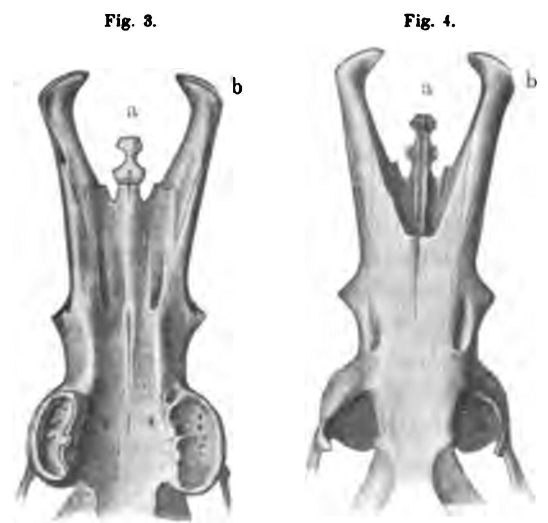
---

[1]) J. Ranke, Ueber den Zwischenkiefer. Corresp.-Blatt der deutschen anthrop. Gesellschaft. 1901. Nr. 10.

[2]) l. c. S. 68.

konstatirten Rudolphi und Meckel noch ein drittes inneres unpaares achterförmiges Zwischenkieferbein (a), nach Meckel das untere (nach Biondi das metopogene), das von dem Ende des Gaumenfortsatzes der Oberkieferbeine, von diesen durch eine quer verlaufende Sutur getrennt ist. Das Stück schliesst sich nach oben direkt an die Crista nasalis der Oberkieferbeine und bildet auf seiner oberen Fläche selbst eine Fortsetzung dieser Crista, was dem Verhältnisse beim Menschen entspricht.

Fig. 3. Fig. 4.



Zwischenkiefer des Schnabelthieres.
Fig. 3 Ansicht von unten, Fig. 4 von oben.

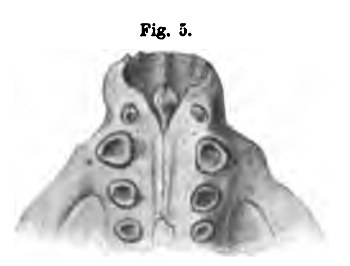
K. Gegenbaur gibt in seiner vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere[1]) eine Abbildung davon und ist geneigt, den Knochen (a) dem Intermaxillare zuzurechnen.

Ich kann dazu noch eine weitere normale Trennung der beiden Meckel-Biondi'schen Zwischenkieferpaare hinzufügen. Bei dem Schädel eines Faulthieres, Bradypus cuculiger, der hiesigen vergleichend anatomischen Sammlung, zeigt sich der

[1]) Bd. I. 1898. S. 405.

hintere Zwischenkiefer bis auf eine schmale Verbindungsstelle mit dem Gaumentheile des Oberkiefers von diesem getrennt und isolirt. Der hintere Zwischenkiefer hat die Gestalt einer kleinen, vorne noch durch eine Nath getheilten, Kirsche, welche sich mit einem dünnen Stiele in der Mitte des Gaumentheils mit dem Oberkiefer durch eine kurze Quernath verbindet. Der Gaumentheil des Oberkiefers zeigt dem entsprechend in der Mitte einen dreieckigen mit seiner Spitze nach hinten gewendeten Ausschnitt (Fig. 5).

Fig. 5.



Zwischenkiefer des Faulthieres, Bradypus culiger von unten.



Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 27. Dezember.*)

In einer früheren Mittheilung „Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise" habe ich im Anschlusse an einen zuerst von Herrn Tauber bewiesenen Satz die Vermuthung ausgesprochen,[1] dass die beiden Bedingungen:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

für die Convergenz von $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ an der Grenzstelle $x = X$ nicht hineinreichen dürften. Im folgenden will ich zeigen, dass es thatsächlich Reihen giebt, welche den Bedingungen (A) genügen — ja sogar der ersten dieser Bedingungen in dem erweiterten Umfange, dass $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = A$ beim Grenz-Uebergange auf einem beliebigen, dem Innern des Convergenzkreises angehörigen Strahle — und welche dennoch für

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900), p. 43. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, dass ein ähnlicher Satz, wie der a. a. O. p. 85 von mir formulirte, in einer anderen, mir inzwischen erst bekannt gewordenen Abhandlung des Herrn Tauber sich findet: „Ueber das Poisson'sche und das demselben conjugierte Integral" (Wiener Monatshefte, Jahrg. VI [1895], p. 118).

$x = X$ divergiren.[1]) Dabei wird es offenbar, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, gestattet sein, speciell $X = 1$ anzunehmen.

---

1. Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ convergent und ihre Summe $= s$, so bestehen die beiden Bedingungen:[2])

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n}{n} = 0$$

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s \quad (\text{wo: } s_k = \sum_1^k{}^\nu a_\nu).$$

Jede dieser Beziehungen (die zweite in dem Sinne, dass der betreffende Grenzwerth irgend eine bestimmte Zahl s vorstellt) ist also nothwendig für die Convergenz, dagegen erweist sich keine allein auch als ausreichend: der Bedingung (1) genügt z. B. jede divergente Reihe, für welche $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$ ist;[3]) der Bedingung (2) unendlich viele innerhalb endlicher Grenzen oscillirende Reihen, als deren einfachster Typus $\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}$ gelten kann.

Wohl aber sind beide Bedingungen zusammen genommen für die Convergenz von Σu_ν allemal auch hinreichend. Da nämlich:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n,$$

so ergiebt sich durch Addition der Beziehungen (1) und (2) unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s,$$

---

1) Natürlich „uneigentlich", da ja bei eigentlicher Divergenz von $\Sigma a_\nu X^\nu$ allemal $\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$ sein müsste (vgl. a. a. O. p. 41).

2) Vgl. a. a. O. p. 44.

3) Dies folgt unmittelbar aus dem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze: „Es ist $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{n=\infty} (A_n - A_{n-1})$, falls der rechtsstehende Grenzwerth existirt."

also schliesslich:

$$\lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \equiv \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = s.$$

Es erscheint zweckmässig, dieses Resultat in folgender Weise ausdrücklich zu formuliren:

> Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die *Convergenz* von Σa_ν, also für die Existenz eines endlichen $\lim_{n=\infty} s_n = s$ lässt sich in die beiden Bedingungen (1) und (2) zerlegen, derart dass jede einzelne dieser Bedingungen als eine *nothwendige*, aber erst beide zusammen als *hinreichend* erscheinen.

Hierzu sei noch bemerkt, dass die Beziehung (1) allemal die für die Convergenz nothwendige Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

in sich enthält. Ersetzt man nämlich in (1) n durch $(n-1)$, so folgt, dass für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ bei passender Wahl einer unteren Schranke für n die Ungleichung besteht:

$$| 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} | < (n-1) \cdot \varepsilon.$$

Da sodann auch:

$$| 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} + n \cdot a_n | < n \cdot \varepsilon,$$

so folgt durch Subtraction:

$$| n \cdot a_n | < (2n-1) \cdot \varepsilon, \text{ also a fortiori } | a_n | < 2\varepsilon,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Etwas analoges findet bezüglich der Bedingung (2) nicht statt. Vielmehr sind gerade die zunächst sich darbietenden Beispiele von divergenten Reihen, welche der Bedingung (2) genügen (wie: $\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}$), durchweg von der Art, dass $\lim_{n=\infty} |a_n|$ nicht verschwindet. Es entsteht nun naturgemäss die

Frage: Giebt es wirklich divergente, der Bedingung (2) genügende Reihen, deren Glieder den Grenzwerth Null besitzen? Sobald die Existenz derartiger Reihen erwiesen ist, wird dann, wie leicht zu sehen, auch die am Anfange berührte Frage in bejahendem Sinne entschieden sein.

2. Es bedeute m_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen von der Beschaffenheit, dass:

$$(3) \qquad \lim_{\lambda=\infty} (m_{\lambda+1} - m_\lambda) = \infty, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} = 1$$

(z. B. $m_\lambda = \lambda^p$, wo $p > 1$); ferner sei Σd_ν eine divergente Reihe mit positiven, für $\nu = \infty$ verschwindenden Gliedern von der Art, dass:

$$(4) \qquad \lim_{\lambda=\infty} (d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}) = 2A > 0.$$[1]

Nun wurde gesetzt:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = d_1 + \ldots + d_{m_1} - d_1 - \ldots - d_{m_1} \\ + d_{m_1+1} + \ldots + d_{m_2} - d_{m_1+1} - \ldots - d_{m_2} \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + d_{m_{\lambda-1}+1} + \ldots + d_{m_\lambda} - d_{m_{\lambda-1}+1} - \ldots - d_{m_\lambda} \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \end{aligned}$$

so dass also:

---

[1]) Die allgemeinen Beziehungen, welche zwischen den d_ν und m_λ bestehen müssen, damit ein solcher „singulärer Reihenrest" $\sum_{m_\lambda+1}^{m_{\lambda+1}}{}^\nu d_\nu$ einen gewissen endlichen Grenzwerth besitzt, habe ich in einer früheren Arbeit („Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte", Math. Ann. Bd. 22, 1883) ausführlich untersucht (vgl. a. a. O. p. 470; 485 ff.). Handelt es sich, wie im vorliegenden Falle, im wesentlichen nur um die Herstellung specieller Beispiele, so lassen sich die d_ν, m_ν in überaus einfacher Weise auswählen, wie im Texte weiter unten noch gezeigt wird.

$$(6)\quad a_{2m_\lambda+\mu}\begin{cases} = -\, d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & 1 \leq \mu \leq m_{\lambda+1} - m_\lambda \\ = -\, d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & (m_{\lambda+1} - m_\lambda) + 1 \leq \mu \leq 2(m_{\lambda+1} - m_\lambda) \end{cases}$$

($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ und $m_0 = 0$). Ist sodann wiederum $s_n = \sum_1^n{}^{\nu}\, a_\nu$, so hat man offenbar:

$$\begin{aligned} s_{2m_\lambda} &= 0 \\ s_{m_\lambda + m_{\lambda+1}} &= d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} s_{2m_\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda=\infty} s_{m_\lambda + m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Da aber die Zahlen s_{2m_λ}, $s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}}$ die Minima und Maxima der Folge s_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ liefern, so findet man schliesslich:

$$(7)\qquad \underline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 0, \qquad \overline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 2A,$$

d. h. die Reihe Σa_ν ist u n e i g e n t l i c h d i v e r g e n t, sie oscillirt in den Grenzen 0 und $2A$.

Andererseits ergiebt sich nun:

$$\begin{aligned} s_{2m_{\lambda-1}+1} &= d_{m_{\lambda-1}+1} \\ s_{2m_{\lambda-1}+2} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda} \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda+1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} +{}} d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2m_\lambda-1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots +{}} d_{m_\lambda} \\ s_{2m_\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} & s_{2m_{\lambda-1}+1} + s_{2m_{\lambda-1}+2} + \ldots + s_{2m_\lambda} \\ &= (m_\lambda - m_{\lambda-1})\,(d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda}). \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$(8)\qquad \sum_1^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu = m_1(d_1+\ldots+d_{m_1}) + (m_2-m_1)(d_{m_1+1}+\ldots+d_{m_2})+\ldots \\ \ldots+(m_\lambda-m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1}+\ldots+d_{m_\lambda})$$

und sodann mit Benützung des Cauchy-Stolz'schen Grenzwerthsatzes:

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{1}{2m_\lambda}\cdot\sum_1^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu = \lim_{\lambda=\infty}\frac{(m_\lambda-m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1}+\ldots+d_{m_\lambda})}{2(m_\lambda-m_{\lambda-1})}$$

$$(9)\qquad = A.$$

Bedeutet jetzt n eine ganz beliebige natürliche Zahl, so kann man allemal setzen:

$$2\,m_\lambda \leqq n < 2\,m_{\lambda+1}.$$

Alsdann hat man:

$$\sum_1^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu \leqq \sum_1^{n}{}^{\nu} s_\nu \leqq \sum_1^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu} s_\nu$$

und, wegen:

$$\frac{1}{2\,m_{\lambda+1}} < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{2m_\lambda},$$

auch:

$$\frac{1}{2\,m_{\lambda+1}}\cdot\sum_1^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu < \frac{1}{n}\cdot\sum_1^{n}{}^{\nu} s_\nu < \frac{1}{2m_\lambda}\cdot\sum_1^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu} s_\nu,$$

anders geschrieben:

$$\frac{m_\lambda}{m_{\lambda+1}}\cdot\left(\frac{1}{2m_\lambda}\cdot\sum_1^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu\right) < \frac{1}{n}\cdot\sum_1^{n}{}^{\nu} s_\nu \leqq \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda}\cdot\left(\frac{1}{2\,m_{\lambda+1}}\cdot\sum_1^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu} s_\nu\right),$$

und somit schliesslich mit Benützung von Gl. (3) und (9):

$$(10)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_1^{n}{}^{\nu} s_\nu = A.$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ besitzt also in der That die am Schlusse von Nr. 1 bezeichneten Eigenschaften.[1])

[1]) Auf einem weit weniger elementaren, ja sogar in seinen Grundlagen äusserst complicirten Wege, kann man — worauf mich Herr

Um Reihen dieser Art in der denkbar einfachsten Art wirklich herzustellen, wird man etwa alle diejenigen d_ν, welche in dem Reihen-Schema (5) jedesmal eine Zeile bilden, einander gleich setzen und zwar:

$$d_\nu = \frac{2A}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \quad \text{für: } m_\lambda + 1 \leqq \nu \leqq m_{\lambda+1}, \tag{11}$$

also:

$$a_{2m_\lambda+\mu} \begin{cases} = \dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1} - m_\lambda \\ = -\dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda). \end{cases} \tag{12}$$

An die Stelle der Gleichung (4) tritt dann die folgende, für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ gültige:

$$d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \cdots + d_{m_{\lambda+1}} = 2A. \tag{13}$$

Die so definirte Reihe Σa_ν genügt wiederum der Beziehung (10), während sie andererseits in den Grenzen 0 und A oscillirt und auf Grund der ersten Bedingung (3) $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ wird. Dabei wird man schliesslich noch die m_λ am einfachsten etwa in der Weise fixiren, dass man setzt $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda+1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo p eine natürliche Zahl bedeutet.

3. Setzt man jetzt:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu,$$

L. Fejér aufmerksam gemacht hat — die Existenz derartiger Reihen mit Hülfe eines Satzes nachweisen, den letzterer in den Comptes rendus (10. Dezember 1900) mitgetheilt hat. Darnach genügt die Summe einer Fourier'schen Reihe, welche eine stetige (oder nur mit gewöhnlichen Sprüngen behaftete) Function darstellt, durchweg der Bedingung (10). Da es nun nach Du Bois-Reymond stetige Functionen mit divergenter Fourier'scher Reihen-Entwicklung giebt, so liefert jede solche Reihe, wenn man der Veränderlichen den Werth einer Divergenz-Stelle beilegt, ein Beispiel der verlangten Art. (Vgl. im übrigen die Bemerkung am Schlusse von Nr. 3.)

wo Σa_ν eine Reihe von der eben construirten Art vorstellt, so hat man, wegen $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu s_\nu = A$, nach einem bekannten, von Herrn Frobenius bewiesenen Satze[1]) zunächst:

$$\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho) = A,$$

wenn ϱ eine positive reelle Veränderliche bedeutet. Der betreffende Satz lässt sich aber, wie weiter unten (s. Nr. 6) noch gezeigt werden soll, analog wie der Abel'sche Satz über den Grenzwerth einer für $x = 1$ noch convergenten $\mathfrak{P}(x)$,[2]) dahin erweitern, dass aus $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu s_\nu = A$ allemal geschlossen werden kann:

$$\lim_{x=1} \mathfrak{P}(x) = A,$$

wenn x auf einem beliebigen Strahle (bezw. einer beliebigen den Einheitskreis nicht tangirenden Curve) aus dem Innern des Einheitskreises der Stelle 1 zustrebt. Damit wäre dann aber die zu Anfang ausgesprochene Behauptung vollständig bewiesen, d. h. es gilt der Satz:

Die Bedingungen:

$$\lim_{x=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

sind für die Convergenz von Σa_ν zwar nothwendig, aber keineswegs ausreichend.

Man bemerke noch, dass bei geeigneter Auswahl der a_ν die Reihe $\Sigma \,|\, a_\nu - a_{\nu+1} \,|$ convergent ausfällt, somit $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch auf dem ganzen Einheitskreise mit Ausnahme der einzigen Stelle $x = 1$ convergirt und zwar, nach Ausschluss eines beliebig kleinen, die Stelle 1 umgebenden Bogens, gleichmässig. Definirt man nämlich die a_ν durch die Gleichungen (12), so wird im allgemeinen:

$$a_\nu - a_{\nu+1} = 0,$$

---

[1]) Journal f. Math. Bd. 89 (1880), p. 262.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 347.

nur:

$$(14)\quad \begin{cases} a_{2m_\lambda} - a_{2m_\lambda+1} = -\left(\dfrac{1}{m_\lambda - m_{\lambda-1}} + \dfrac{1}{m_{\lambda+1} - m_\lambda}\right) \\ a_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} - a_{m_\lambda+m_{\lambda+1}+1} = \dfrac{2}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \end{cases}$$

(wenn man noch der Einfachheit halber $2A = 1$ annimmt). Darnach wird aber $\Sigma \mid a_\nu - a_{\nu+1} \mid$ allemal convergent, wenn die m_λ so gewählt werden, dass $\Sigma (m_{\lambda+1} - m_\lambda)^{-1}$ convergirt, also z. B. $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda + 1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo $p \geq 2$.

Die zur Potenzreihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ gehörige Randfunction $f(x)$ ist dann bis in beliebige Nähe der Stelle $x = 1$ vollkommen stetig und für $x = 1$ selbst noch „nach Innen" stetig. Fraglich bleibt nur noch das Verhalten von $f(x)$ für die der Stelle $x = 1$ benachbarten Randpunkte, also das Verhalten von $f(e^{\vartheta i})$ in der Nähe von $\vartheta = 0$. Jedenfalls erscheint die Stetigkeit auch hier keinesfalls a priori ausgeschlossen. Gelänge es, dieselbe an irgend einem zweckmässig gewählten Beispiele der vorliegenden Art wirklich festzustellen, so wäre damit eine Frage in verneinendem Sinne entschieden, die ich in der zu Anfang citirten Arbeit noch als eine offene bezeichnet habe:[1]) nämlich, ob die vollkommene Stetigkeit der Randfunction stets auch die durchgängige Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ nach sich ziehen müsse. Durch die blosse Existenz von stetigen Functionen $\psi(\vartheta)$ mit divergenter Fourier'scher Reihenentwickelung wird, wie a. a. O. des näheren ausgeführt ist, die Möglichkeit jener Annahme noch keineswegs beseitigt.

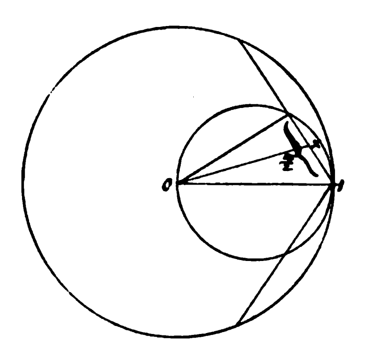
4. Um den Frobenius'schen Satz in der angedeuteten Weise zu verallgemeinern schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voraus:[2])

---

[1]) a. a. O. p. 98.

[2]) Dieser Hülfssatz ist auch geeignet, die etwas weniger einfache, einen analogen Zweck verfolgende Betrachtung zu ersetzen, welche ich beim Beweise des verallgemeinerten Abel'schen Satzes (a. a. O. p. 348) benützt habe.

Zieht man vom Punkte 1 aus zwei zur reellen Axe symmetrische, dem Einheitskreise angehörige Sehnen, deren Länge $= a$ sein möge, und beschreibt um den Punkt $\frac{1}{2}$ einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$, bezeichnet sodann mit (X) denjenigen zusammenhängenden Bereich, welcher von diesem Kreise und den beiden Sehnen begrenzt wird, so hat man:



$$(15) \quad \frac{|1-x|}{1-|x|} < \gamma = \frac{4}{a}$$

für alle von 1 verschiedenen Stellen x im Innern und auf der Begrenzung von (X).

Beweis. Man bemerke zunächst, dass der mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\frac{1}{2}$ beschriebene Kreis alle vom Punkte 1 aus gezogene Sehne halbirt. Wird sodann x für's erste auf einer der begrenzenden Sehnen von der Länge a angenommen, so hat man:

$$|x|^2 = 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - |1-x|\right)^2$$
$$= 1 - a \cdot |1-x| + |1-x|^2,$$

also:

$$1 - |x|^2 = |1-x| \cdot (a - |1-x|)$$
$$\geq |1-x| \cdot \frac{a}{2}$$

(wobei das Gleichheitszeichen nur für den einen Fall $|1-x| = \frac{a}{2}$ gilt, d. h. wenn x im Mittelpunkte der betreffenden Sehne liegt). Daraus folgt weiter:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leq \frac{2}{a} \cdot |1+x| < \frac{4}{a}.$$

Liegt jetzt x auf einer anderen vom Punkte 1 aus gezogenen Sehne mit der Länge a', wobei dann allemal $a' > a$, so hat man auf Grund des eben gewonnenen Resultates:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{4}{a'}, \text{ also a fortiori } < \frac{4}{a},$$

womit der ausgesprochene Hülfssatz bewiesen ist.

5. Unter dem Grenzübergange $\lim\limits_{x=1}$ soll im folgenden ein für allemal verstanden werden, dass x auf einer beliebigen, dem Bereiche (X) angehörigen Curve der Stelle 1 zustrebt und somit der Ungleichung (15) genügt.

Alsdann gilt zunächst der folgende Satz:[1])

Ist:

$$(16^a) \qquad s_n = \sum_1^n{}^{\nu}\, a_\nu \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A$$

(wo A eine bestimmte Zahl incl. Null), so hat man:

$$(16^b) \qquad \lim_{x=1}(1-x)\cdot\sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = A.$$

Beweis. Setzt man $\sum\limits_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = \mathfrak{P}(x)$, so ergiebt sich durch Anwendung einer bekannten Transformation:[2])

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x)\cdot\sum_1^\infty{}^{\nu}\, s_\nu x^\nu$$

$$= (1-x)\cdot\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\, s_\nu x^\nu + \sum_{n+1}^\infty s_\nu x^\nu\right\}$$

und daher:

$$(17) \qquad |\mathfrak{P}(x)| < |1-x|\cdot\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\, |s_\nu| + \sum_{n+1}^\infty |s_\nu|\cdot|x|^\nu\right\}.$$

---

[1]) Verallgemeinerung des Hülfssatzes II auf p. 49 der Sitz.-Ber., Bd. 30 (1900).

[2]) Vgl. a. a. O. p. 47. Dass die Voraussetzung (16a) allemal die Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < 1$ nach sich zieht, ist leicht zu ersehen. Vgl. im übrigen auch Nr. 7.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot |s_n| = |A|$ hat jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergibt sich weiter:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sigma_0 \cdot \sum_1^n \nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty \nu \cdot |x|^\nu \right\}$$

$$< |1-x| \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^2} \right\}$$

und somit:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \sigma_n \cdot \left(\frac{|1-x|}{1-|x|} \right)^2$$

$$< \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_n \text{ (nach Ungl. (15)).}$$

Es werde nun zunächst angenommen, dass $A = 0$. Alsdann kann σ_n durch passende Wahl von n beliebig klein, etwa:

$$\gamma^2 \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

gemacht werden, wenn ε eine positive Zahl von vorgeschriebener Kleinheit bedeutet. Wird jetzt noch x derartig eingeschränkt, dass:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{also: } |1-x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma_0 \cdot n(n+1)}} \right),$$

so hat man:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

also schliesslich:

$$(18) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \mathfrak{P}(x) = 0 \quad \text{d. h. } \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = 0.$$

Bedeutet jetzt A eine beliebige von Null verschiedene Zahl, so kann die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A \quad \text{d. h. } \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu a_\nu = A$$

zunächst folgendermaassen geschrieben werden:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^\nu (a_\nu - A) = 0.$$

Alsdann ergiebt sich aber auf Grund des eben gewonnenen Resultates (Gl. (18)):

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu (a_\nu - A) \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \left\{ \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu - A \frac{x}{1-x} \right\} = 0$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

6. Da nach dem Cauchy'schen Grenzwerth-Satze die Beziehung $\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A$ sicher erfüllt ist, wenn $\lim_{n=\infty} a_n = A$, so folgt noch, dass auch diese letztere Bedingung für die Existenz der Relation (16^b) hinreichend ist.

Ersetzt man ferner in dem zuvor gewonnenen Satze a_ν durch s_ν, so ergiebt sich:

Ist:

$$(19^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu s_\nu = A,$$

so hat man:

$$(19^b) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu s_\nu x^\nu = A, \quad \text{also:} \quad \lim_{x=1} \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = A,$$

d. h. man erhält die oben angekündigte Verallgemeinerung des Frobenius'schen Satzes.

Da wiederum die Bedingung (19^a) sicher erfüllt ist, wenn $\lim_{n=\infty} s_n = A$, so resultirt noch als specieller Fall der verallgemeinerte Abel'sche Satz.

7. Der Satz von Nr. 5 gestattet unmittelbar noch die folgende Verallgemeinerung:[1])

---

[1]) Zugleich Verallgemeinerung des a. a. O. p. 49, Fussnote, angeführten Satzes. (NB. Daselbst steht in Folge eines Druckfehlers

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^{1-p} \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu \varrho^\nu \text{ statt: } \lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^p \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu \varrho^\nu).$$

Ist:

$$(20^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \sum_1^n{}^{\nu} a_\nu = \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = A \quad (p > 0),^{1)}$$

so ist $\sum a_\nu x^\nu$ convergent für $|x| < 1$ und man hat:

$$(20^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.$$

Beweis: Aus (20^a) folgt, dass auch: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_{n-1}}{n^p} = A$ und somit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^p} = 0.$$

Da sodann für $\varrho < 1$: $\lim\limits_{n=\infty} n^p \cdot \varrho^n = 0$, so ergiebt sich durch Multiplication mit der vorhergehenden Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} a_n \varrho^n = 0,$$

sodass $\sum a_\nu x^\nu$ sicher für $|x| < \varrho$, also schliesslich für $|x| < 1$ convergirt.

Man hat dann wiederum, wie in Nr. 5 (s. Ungl. (17)):

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{ \sum_1^n{}^{\nu} |s_\nu| + \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |s_\nu| \cdot |x|^\nu \right\}.$$

Aus der Voraussetzung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = A$$

folgt mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

---

[1]) Die zum Beweise dienlichen Schlüsse bleiben auch noch gültig für: $0 \geq p > -1$. Die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ ist alsdann für die Stelle $x = 1$ nicht mehr divergent, sondern convergent und zwar mit der Summe $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 0$, wenn $p < 0$. Die Gleichung (20^b) macht also in diesem Falle eine bestimmte Aussage über die Art des Nullwerdens von $\lim\limits_{x=1} \sum_1^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu$. Für den Fall $p = 0$ resultirt wiederum der Abel'sche Satz: $\lim\limits_{x=1} \sum_1^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \lim\limits_{n=\infty} s_n$.

$$(21) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{(p+n)_n}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

$$\left(\text{wo: } (p+n)_n = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1\cdot 2\ldots n} = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(n+1)}\right)$$

dass:

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{(p+n)_n} = \Gamma(p+1)\cdot A.$$

Jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{(p+\nu)_\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* hat also eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergiebt sich aus der obigen Ungleichung die folgende:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x|\cdot\left\{\sigma_0\cdot\sum_1^n{}^{\nu}(p+\nu)_\nu + \sigma_n\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}(p+\nu)_\nu\cdot|x|^\nu\right\}$$

$$< |1-x|\cdot\left\{\sigma_0\cdot(p+n+1)_n + \sigma_n\cdot\frac{1}{(1-|x|)^{p+1}}\right\}$$

wegen:

$$(23) \qquad \sum_0^n (p+\nu)_\nu = (p+n+1)_n\,^{1)}$$

$$(24) \qquad \sum_0^\infty (p+\nu)_\nu\cdot|x|^\nu = (1-|x|)^{-(p+1)},$$

und, wenn man die letzte Ungleichung noch mit $|1-x|^p$ multiplicirt:

$$(25) \qquad |(1-x)^p\cdot\mathfrak{P}(x)| < |1-x|^{p+1}\cdot\sigma_0\cdot(p+n+1)_n + \sigma_n\left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1}$$

$$< |1-x|^{p+1}\cdot\sigma_0\cdot(p+n+1)_n + \gamma^{p+1}\cdot\sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}.$$

---

[1]) Man hat zunächst: $p_0 + (p+1)_1 = 1 + (p+1) = (p+2)_1.$

Angenommen man habe: $\sum_0^{n-1}(p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1},$

so folgt unmittelbar: $\sum_0^n{}^{\nu}(p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1} + (p+n)_n = (p+n+1)_n.$

Es werde nun zunächst wiederum $A = 0$ angenommen. Man kann dann n derart fixiren, dass:

$$\gamma^{p+1} \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf x nahe genug an 1 annehmen, dass auch:

$$|1 - x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p + n + 1)_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alsdann wird:

$$|(1 - x)^p \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

und daher schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} (1 - x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = 0. \tag{26}$$

Bedeutet jetzt A eine von Null verschiedene Zahl, so kann die Voraussetzung (20^a) zunächst durch die Beziehung (22) ersetzt werden. Man hat nun aber nach Gl. (23), wenn man darin p durch $p - 1$ ersetzt:

$$\sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = (p + n)_n$$

für jedes positive ganzzahlige n, also auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = 1. \tag{27}$$

Fügt man diesen letzteren Grenzwerth der rechten Seite von Gl. (22) als Factor hinzu, so lässt sich dieselbe folgendermaassen schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \left\{ s_n - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot \sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \right\} = 0,$$

oder auch, wenn man s_n durch $\sum_0^n {}^\nu a_\nu$ ersetzt (wo: $a_0 = 0$), mit Berücksichtigung von Gl. (21):

$$(28) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \sum_0^n {}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (23) enthaltenen Resultates giebt alsdann:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_0^\infty {}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \left\{ \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu - \Gamma(p+1) \cdot A (1-x)^{-p} \right\} = 0,$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$(29) \quad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.^{1)}$$

8. Nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze hat man:[2])

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p - (n-1)^p}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} \left[\text{wegen: } n^p - (n-1)^p = n^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^p \right) \cong p \cdot n^{p-1} \right]$$

falls der rechts stehende Grenzwerth existirt. Ist nun:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A',$$

so wird also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \frac{1}{p} \cdot A',$$

---

[1]) Der Satz findet sich auch in einer jüngst erschienenen Arbeit des Herrn E. Lasker („Ueber Reihen auf der Convergenz-grenze." Lond. Philos. Transactions, Vol. 196 [1901], p. 438) als Folgerung aus einem allgemeinerem Grenzwerth-Satze. Der Beweis enthält indessen einen auf verkehrter Anwendung einer Ungleichung beruhenden Trugschluss (a. a. O. p. 437).

[2]) Hier ist die Bedingung $p > 0$ durchaus wesentlich.

und die Gleichung (29) liefert somit, wenn man noch berücksichtigt, dass:

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$$

den folgenden, für reelle positive x und A' von Herrn Appell bewiesenen[1]) Satz:

Ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A' \quad (p > 0), \tag{30a}$$

so hat man:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \, a_\nu \, x^\nu = \Gamma(p) \cdot A'. \tag{30b}$$

9. Dem Satze in Nr. 7 lässt sich der folgende an die Seite stellen:

Ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = A, \tag{31a}$$

so hat man:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \, a_\nu \, x^\nu = A. \tag{31b}$$

Beweis. Aus Ungl. (17) folgt, wenn man die obere Grenze von $\frac{|s_\nu|}{\lg \nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2) \ldots$ *in inf.* mit σ_m bezeichnet:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sum_1^n {}^\nu \, |s_\nu| + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty {}^\nu \lg \nu \cdot |x|^\nu \right\}.$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 690. Auch: Picard, Traité d'Analyse, T. I (1891), p. 210, jedoch mit der Beschränkung $p > 1$. — Für complexe x findet sich der Satz als Folgerung aus einem allgemeineren Satze bei Herrn Hadamard: Journ. de Math. (4), T. 8 (1892), p. 176 (NB. Auf der rechten Seite derjenigen Relation, welche der Gl. (30b) entspricht, steht dort fälschlich A statt: $\Gamma(\omega) \cdot A$, was wohl lediglich auf einem Schreibfehler beruhen dürfte.)

Da sodann:

$$|1-x| \cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \lg \nu \cdot |x|^{\nu} < \gamma \cdot (1-|x|) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \lg \nu \cdot |x|^{\nu}$$

$$= \gamma \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (\lg(\nu+1) - \lg \nu) \cdot |x|^{\nu}$$

$$< \gamma \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot |x|^{\nu} = \gamma \cdot \lg \frac{1}{1-|x|}$$

$$< \gamma \left(\lg \frac{1}{|1-x|} + \lg \gamma \right)$$

so folgt:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |s_\nu| + \sigma_n \cdot \gamma \left(\lg \frac{1}{|1-x|} + \lg \gamma \right),$$

also, wenn man noch mit $\left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1}$ multiplicirt und beachtet, dass $\left| \lg \frac{1}{1-x} \right| \geq \lg \frac{1}{|1-x|}$:

$$\left| \left(\lg \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \cdot \mathfrak{P}(x) \right| < |1-x| \cdot \left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |s_\nu|$$

$$+ \sigma_n \cdot \gamma \left(1 + \lg \gamma \cdot \left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1} \right).$$

Daraus folgt dann zunächst wieder im Falle $A = 0$ (also: $\lim_{n=\infty} \sigma_n = 0$), dass:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = 0. \tag{32}$$

Ist nun andererseits A von 0 verschieden, so lässt sich mit Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} = 1$$

die Voraussetzung (31^a) auf die Form bringen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \left(s_n - A \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \right) = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (32) enthaltenen Resultates giebt dann zunächst:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) \cdot x^\nu = 1$$

also, wegen: $\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu = \lg \frac{1}{1-x}$, schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = A.$$

10. Da wiederum nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lg n - \lg(n-1)}$$
$$= \lim_{n=\infty} n\, a_n,$$

falls dieser letztere Grenzwerth existirt, so erweist sich auch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = A \tag{33}$$

als hinreichend für die Existenz der Beziehung (31^b).[1]

Einen allgemeineren Satz, welcher die in Nr. 5—10 angegebenen Sätze als specielle Fälle enthält, werde ich in einem demnächst in den Acta mathematica erscheinenden Aufsatze mittheilen.

[1]) Für reelle positive x und A wiederum bei Appell, Comptes rendus, a. a. O.

Berichtigung zu A. Korn, Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion S. 435, ist Zeile 6 von oben vor „Gesammtpotential einzuschalten: „inducierte“.

Namen - Register.

Sach-Register.

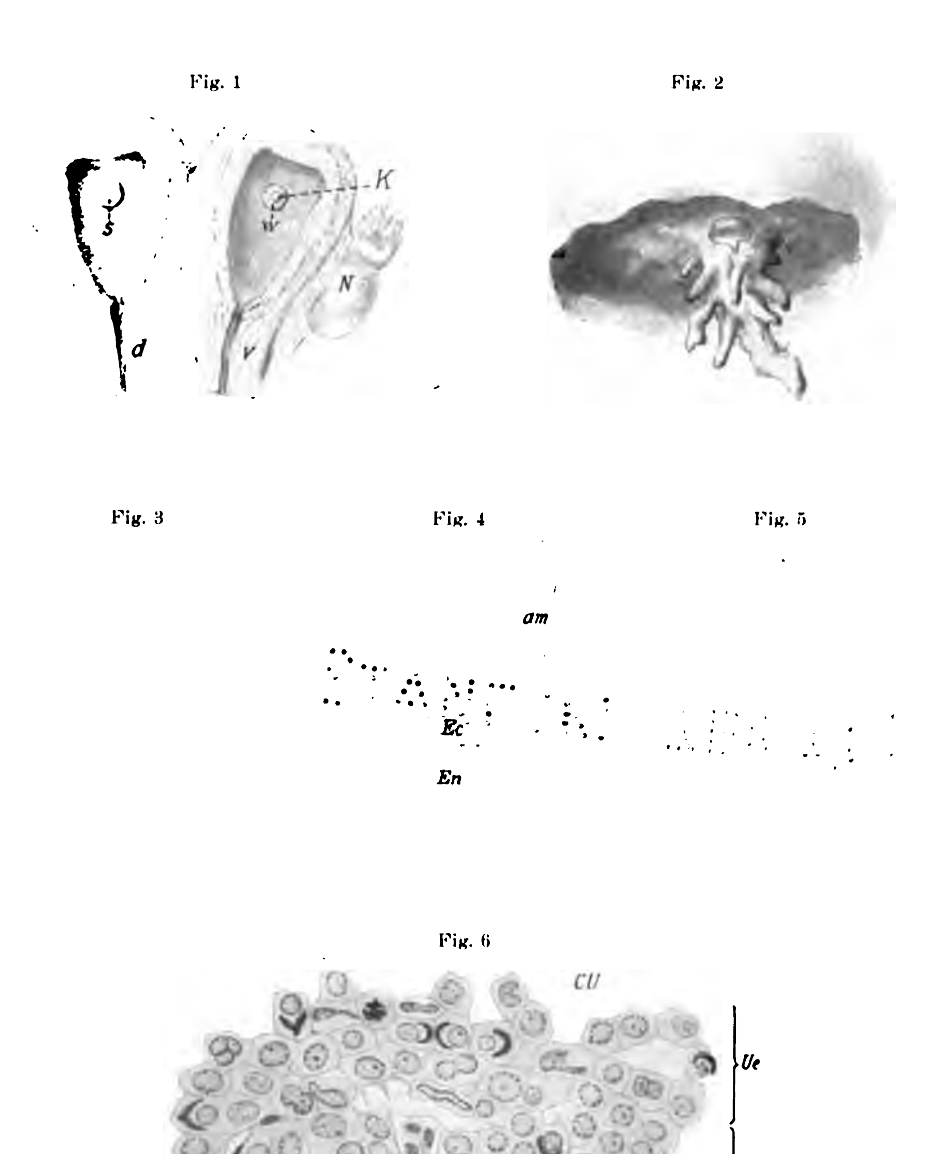

Fig. 1
K
s
w
N
d
v
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
am
Ec
En
Fig. 6
CU
Ue
N
K
C
B
C

Fig. 7

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1901.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Bd. XXII. 1900. 8⁰.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Taschenbuch für das Jahr 1900. 8⁰.

University of Aberdeen:

Studies. No. I—III. 1900. 4⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 24, part 2. 1900. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations during the year 1897. 1900. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Bd. 143, 144. 1900. 8⁰.
Zbornik za narodni život. Bd. V, 2. 1900. 8⁰.
Natko Nodilo, Historija srednjega vijeka. 1900. 8⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. 3, Heft 1, 2. 1901. 4⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Library. 81th annual Report for 1898. 1899. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

New-York State Museum. 49th Report part 3. 4⁰. 50th Report part 2. 4⁰. 51th Report part 1, 2. 8⁰. 1898—99.
Second annual Report of the College Department. Vol. I. 1900. 8⁰.
Bulletin of the New-York State Museum. Vol. IV, No. 19. 1898; Vol. V, No. 20—24. 1898; Vol. VI, No. 26—31. 1899; Vol. VII, No. 32. 1900. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1901, Heft 2—13. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XVI, 1. Hälfte. Leipzig 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Bd. XVI, Heft 1—6. 1901. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 21. Jahrg., 1.—6. Heft. 1901. 4⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VIIe Série, Vol. 4. 1899. 1900. 8⁰.

Natural History and Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. X, part 1, 2; Vol. XI, part 1. 1896—99. 8⁰.
Records of Meteorological Observations for 1896 and 1897. 1899. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

Memorie. Serie 5. Vol. 7. 1897. 4⁰.
Renticonto. N. Ser. Vol. 2, fasc. 1—4; Vol 3, fasc. 1—4. 1898—99. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. IIIa Serie. Vol. XVIII, fasc. 4—6. 1900. 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 106. 1901. 4⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1901. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 36, No. 9—19. 1900—1901. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 29, No. 9—14. 1900. 8⁰.
Memoirs. Vol. 5, No. 6, 7. 1900. 4⁰.
Occasional Papers IV. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XV, Heft 3. 1901. 8⁰.
Beiträge zur nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde. Heft 3. 1901. 8⁰.

Queensland Museum in Brisbane:

Annals. No. 5. 1900. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn.

Zeitschrift. Jahrg. 5, Heft 1—3. 1901. gr. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 38. 1900. 8⁰.
XVIII. Bericht der meteorol. Kommission für das Jahr 1898. 1900. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tome 15, fasc. 7 u. 8. 1901. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tome 14, No. 11; Tome 15, No. 1—4. 1900/01. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Annuaire 1901. 67e année. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1900, No. 12; 1901, No. 1—5. 8⁰.
b) Classe des sciences 1900, No. 12; 1901, No. 1—5. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XX, fasc. 1, 2. 1901. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 44. 1900. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. XIe année, tom. 11, fasc. 4, 5; XIIIe année, tom. 13, fasc. 2; XVe année, tom. 15, fasc. 1—3. 1901. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 35. Année 1900.

Observatoire Royale in Brüssel:

Bulletin mensuel. 2e année 1900. Avril—Novembre. 8⁰.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen aus dem Jahrbuche. Bd. 12, Heft 3—5. 1900/01. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 30, Heft 8—12; Bd. 31, Heft 1—4. 1900. gr. 8⁰.
Jahresbericht für 1898. 1901. 4⁰.

K. ungar. Ackerbau-Ministerium in Budapest:

Landwirtschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. V. 1900. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicationes tom. I. No. 8. 1901. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen. No. 42, 44, 45, 46, Deel 1, 47. Batavia 1900/01. 4⁰.
Catalogus plantarum phanerog. etc. Fasc. II. 1901. 8⁰.
Bulletin. No. VII. 1900. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. 20, fasc. 1, 2. 1899—1900. 4⁰.
Bulletin. 5e Série. Vol. 3. Année 1899. 1900. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. August—Dezember 1900, Januar 1901. 1901. 8⁰.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. XI, part 3. 1901. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 971—76. 1900. 8⁰.
Journal. No. 387—391. 1900/01. 8⁰.
Proceedings. 1900, No. IX—XI; 1901, No. I, II. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. 28, part 2. 1900; Vol. 33, part 1. 1901. 4⁰.
Paläontologica Indica. Ser. IX. Vol. II, part 2. 1899—1900. fol.
General Report. Ser. XV. Vol. III, part 2. 1899—1900. fol.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.

Bulletin. Vol. 36, No. 5, 6; Vol. 38, No. 1—4. 1900/01. 8⁰.
Annual Report for 1899—1900. 1901. 8⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

55th annual Report for 1899—1900. 1900. 8⁰. Vol. 19, 1; 20, 1, 2; 21, 2; 30, 1—3; 31, 1, 2; 37, 1; 40, 1—3; 41, 1, 2, 6; 43, 1; 45. 1889—1901. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

List of Fellows. January 1901. 8⁰.
Proceedings. Vol. 10, part 7; Vol. 11, part 1, 2. 1901. 8⁰.

Observatory in Cambridge:

Annual Report for 1898--99, 1899—1900. 1900—01. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV. Vol. 13. 1900. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser. Fasc. 64—67. 1900—01. 4⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1900. Berlin 1901. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Das Klima des Königreiches Sachsen. Heft 6. 1901. 4⁰.
Jahrbuch 1898. Jahrg. XVI, 1. Abtlg. 1900. fol.
Abhandlungen.. Heft 5. Leipzig 1901. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 31. 1898—1900. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 45, 51—54. 1901. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Bulletin. No. 16, 17. 1901. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal“ in Chicago:

Vol. XII, No. 5; Vol. XIII, No. 1—4. 1901. gr. 8⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiana:

Aarsberetning 1900. 1901. 8⁰.

Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science in Christiana:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Vol. 2. 1901. 4⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mitteilungen. N. F. Bd. 5. 1899 u. 1900. 1900. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republik Argentinien):

Boletin. Tom. XVI, 2, 3. Buenos Aires 1900. 8⁰.

Franz Josefs-Universität in Czernowitz:
Schriften aus dem Jahre 1900—1901 in 4° u. 8°.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:
Zeitschrift. Heft 43. 1901. 8°.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
Proceedings. Vol. 7, pag. 1—40. 1901. 8°.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:
Mitteilungen. Bd. 9, Teil 1, 2. 1901. 8°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Tom 21, trimestre 2. 1900. 8°.

Pollichia in Dürkheim:
Mitteilungen. 57. Jahrg., 1900, No. 13. 1900. 8°.

American Chemical Society in Easton, Pa.:
The Journal. Vol. 23, No. 1—5. 1901. 8°.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. 23, pp. 161—224. 1901. 8°.

Geological Society in Edinburgh:
Transactions. Vol. VIII, part 1. 1901. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Ser. Vol. 23, disp. 3e, 4; Vol. 24, disp. 1. 1900—01. 8°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Bd. XXV, 1, 2; XXVI, 2; XXVIII. 1900/01. 4°.
Bericht. 1900. 8°.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a/M.:
Archiv für Frankfurts Geschichte u. Kunst. 3. Folge, Bd. 7. 1901. 8°.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Das Klima von Frankfurt a/M., von Jul. Ziegler u. Walter König. 1901. 4°.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:
Freiburger Diöcesan-Archiv. N. F. Bd. I. 1900. 8°.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Collectanea Friburgensia. Nouv. Série. Fasc. 1. 1901. gr. 8°.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:
Bulletin. Tome 2, livre 4. 1900. 8°.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Serie II. Vol. 20 und Indice zu Vol. 1—40. 1901. 8°.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 76. 1900. 8°.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. II Bd., Heft 1. 1900. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1900. No. XII; 1901. No. I—V. Berlin. 4⁰.
Abhandlungen. N. F. Philol.-hist. Classe. Bd. IV, No. 5. Berlin 1901. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1900. Heft 3, 4. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1900. Heft 3. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1900. Heft 3. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. 10, No. 4. 1900. 8⁰.

Scientific Laboratories of Dension University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XI, 9. 1900. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Heft 47. 1899. 8⁰.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 30. Jahrgang. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 32. Jahrg., 1900. 1901. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Volgreeks. Deel 8, aflev. 3 en 4. Register op de eerste 50 Deelen (1853—1899) var de Bijdragen. 1901. 8⁰.
Naamlijst der leden op 1. Juni 1901.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II. Tom. 4, livr. 2; Tom. 5. La Haye 1900/01. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. X, part 2. 1900. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 36, No. 12; Heft 37, No. 1—6. 1900—01. 4⁰.
Nova Acta. Abhandlungen, Bd. 75, 76. 1900. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 54, Heft 4; Bd. 55, Heft 1, 2. Leipzig 1900/01. 8⁰.

Universität Halle:

Verzeichnis der Vorlesungen. Sommer-Semester 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 13, Heft 5 u. 6. Stuttgart 1901. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. 4, Heft 1. Leipzig 1901. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 20. Jahrg., 1900. 1901. 8⁰.
Zeitschrift. Bd. X, 1. 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. 1900. Dritte Folge. VIII. 1901. 8⁰.
Abhandlungen. Bd. XVI, 2. Hälfte. 1901. 4⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:

48 u. 49. Jahresbericht für 1897/98 u. 1898/99. 1900. 8°.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. VI, 4. 1900. 8°.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Limesblatt Nr. 33. 1901. Trier. 8°.
Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XII, XIII. 1900. 4°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. 29, Heft 3. 1900. 8°.
Jahresbericht für das Jahr 1900. 1901. 8°.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 37. Heft. 1901. 8°.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 5, No. 2—5. 1901. 8°.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. 1, fasc. 3. 1901. 8°.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 35, Heft 1—4. 1901. 8°.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F. Bd. XI, Heft 2—4; Bd. XII, Heft 1. 1898—1900. 8°.
Regesta diplomatica historiae Thuringiae. Bd. II, 2. 1900. 4°.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1899/1900. 8°.

Grossherzogliche Sternwarte in Karlsruhe:

Veröffentlichungen. Bd. 1. 1900. 4°.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 67, No. 11, 26; Bd. 68, No. 1—4. 1900—01. 8°.
Godischnij Akt 1900. 1901. 8°.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F. Bd. XXIV, 2. 1901. 8°.
Mitteilungen. Jahrg. 1899. 1901. 8°.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLVI. 1901. 8°.

Société mathématique in Kharkow:

Communications. 2e Série. Tome VII, No. 1. 1900. 8°.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1901. Kniga 1. gr. 8°.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. IV. Abteilung Helgoland, Heft 2; Bd. V, Heft 2, Abteilung Kiel. 1900—01. fol.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 40, No. 10—12. 1900; Bd. 41, No. 1—2. 1901. gr. 8°.

Mediz.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:

Sitzungsberichte. Abtlg. I, Bd. 22, Heft 3. 1901. 8°.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 41. Jahrg. 1900. 4°.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1900, No. 6; 1901, No. 1—3. 8°.
Mémoires. Section des sciences. Serie VI°. Tom. 10, No. 2. 1901. 4°.
Regesta diplomatica historiae Danicae. Series II. Tom. II, 5. 1901. 4°.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Aarböger, II. Raekke. 15. Bd., Heft 3, 4. 1900/01. 8°.

Musée national in Kopenhagen:

Affaldsdynger fra Stenalderen i Danmark. 1900. fol.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger 1900. November, Dezember; 1901. Januar—März. 8°.
Rozprawy filologiczne. Ser. II. Tom. 15, 16, histor.-filozof.; Ser. II. Tom. 14. 1900. 8°.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 37, 38. 1900. 8°.
Rocznik. Rok 1899/1900. 1900. 8°.
Collectanea ex Archivo collegii juridici. Tom. VII. 1900. gr. 8°.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt XII. Text und Atlas. 1900. 8°.
Finkel, Bibliografie. Tom. 2, Heft 3. 1900. 8°.
Karlowicz, Slownik. Tom. 1. 1900. 8°.
P. Royzii carmina pars 1, 2. 1900. 8°.
Inszykiewicz, Melodye litewskie. 1900. 4°.
Birkenmajer, Kopernik. 1900. 4°.
K. J. Fijalek, Mistrz Jakób z Paradyża. 1900. 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série. Vol. 36, No. 138; Vol. 37, No. 139. 1900—01. 8°.

Sternwarte in Leiden:

Verslag 1896—1900 in 2 Heften. 1898—1901. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-histor. Classe. Bd. XX, 3. 1901. 4°.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 52, IX. 1900. 8°.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 52, VII. 1900. 8°.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. 1901. 8°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 62, Heft 12; Bd. 63, Heft 1—8. 1901. 8°.

Université de Lille:

Travaux et Mémoires. No. 22—27. 1899—1900. 8°.
Livret de l'étudiant. 1900—1901. 1900. 8°.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. 89th Session 1899—1900, No. 54. 1900. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899—1900.

Zeitschrift „La Cellule“ in Loewen:

La Cellule. Tome 18, fasc. 1. 1901. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XVI, part 1, No. 93. 1900. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVI, No. 62. 1901. 8⁰.

Royal Society in London:

Reports to the Malaria Committee. IVth and Vth Series. 1901. 8⁰.
Proceedings. Vol. 67, No. 440, 441; Vol. 68, No. 442—446. 1901. 8⁰.
Philosophical Transactions. Year-Book 1901. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Apendix to Vol. 60; Vol. 61, No. 2—7. 1900/01. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal 1900. Supplementary Number (Titlepager and Indexes), No. 459 bis 464 (Febr.—July). 1901. 8⁰.
Proceedings. Vol. 16, No. 230; Vol. 17, No. 231—239. 1901. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal. a) Botany. Vol. 35, No. 242; b) Zoology. Vol. 28, No. 181. 1901. 8⁰.
List of the Linnean Society 1900—1901. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1901. Part 1—3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1900, part 4; 1901, part 1. 1901. 8⁰.
Transactions. Vol. XV, part 6, 7; Vol. XVI, part 1. 1901. 4⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. No. 1630—1653. 4⁰.

Academy of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. IX, No. 6, 8, 9; Vol. X, No. 1—8. 1899—1900. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 25, livr. 1 in 4⁰. Tome 27, livr. 3 und Tome 28, livr. 1, 2 in 8⁰. 1899—1901.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Register zu Band 41—50. Stans 1901. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. I. Sciences, fasc. 4. II. Droit, Lettres, fasc. 4—6. Paris et Lyon 1900—01. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. VII, part 2, 1899. 1900. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. III, V, VI. 1898—1900. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. 4, No. 1. 1901. 8⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Tomo 19, fasc. 1. 1893—1900. 4⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 38, cuad. 1—6. 1901. 8⁰.

Istituto tecnico superiore in Mailand:

Inaugurazione del Monumento a Francesco Brioschi. 1900. 4⁰.

R. Osservatorio di Brera in Mailand:

Publicazioni. No. 41. 1901. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 39, fasc. 3, 4; Vol. 40, fasc. 1. 1901. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III. Fasc. 28—30. 1900—01. 8⁰.
Supplementi all' Archivio. Fasc. I, II. 1900. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 45, part. 1, 2. 1901. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1900—01. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XIII, part 1. 1900. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. N. Ser. Anno 5, fasc. 4. 1901. 8⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Boletin. No. 14. 1900. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. Julio—Diciembre 1900. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

El Clima de la Republica Mexicana por M. Moreno y Anda y Antonio Gomez. Anno 2. 1900. 8⁰.
Boletin. Tom. II, No. 6. 1900. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate“ in Mexico:

Memorias y revista. Tomo 14, No. 11—12; Tomo 15, No. 1—6. 1901/01. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Serie IV. Vol. 2. Anno 33. 1900. 1901. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Tomo 2, fasc. 17; Tomo 3, fasc. 18. 1900—01. fol.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2e Série. Tom. 3, fasc. 1. 1900. 8⁰.
Section des sciences. 2e Série. Tom. 2, fasc. 6, 7. 1899 bis 1900. 8⁰.

Oeffentliches Museum in Moskau:

Ottschet. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Lazarev'sches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. Bd. 1—3. 1900. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1900, No. 1—3. 1900—01. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXI, 3, 4. 1900—01. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 1. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt 1900, No. 9—12; 1901, No. 1—6. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch 1900, Heft IV, Teil 1 u. 2; 1901, Heft I. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. Acht Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Semester 1901. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1901. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1901, No. 1—17. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte. XIII. Jahrg. 1900. 1901. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ u. 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Sommer-Semester 1901. 8⁰.
Verzeichnis der Vorlesungen im Sommer-Semester 1901. 4⁰.
Rede des Rektors Emanuel Ullmann, der Deutsche Seehandel. 1901. 4⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. X. 1900. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten 1901, No. 124—129. 4⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Bd. 58. 1900. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:
Mémoires 1899—1900. 5e Série. Tom. 17. 1900. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Série III. Tom. 1, fasc. 4, 5. Paris et Nancy 1900. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:
Atti. Vol. 32. 1901. 8⁰.
Rendiconto. Anno 39. 1900. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Ser. III. Vol. 6, fasc. 8—12. 1900; Vol. 7, fasc. 1—4. 1901. 4⁰.
Atti. Ser. II. Vol. X. 1901. 4⁰.

Gesellschaft Philomathie in Neisse:
30. Bericht. 1898—1900. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:
Neuburger Kollektaneen-Blatt. 63. Jahrg., 1899. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):
Transactions. Vol. 48, No. 7, 8; Vol. 49, No. 3—5; Vol. 50, No. 1. 1900. 8⁰.
Annual Report for the year 1899—1900. 1900. 8⁰.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:
Transactions. Vol. X, part 2. 1900. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. IV. Ser. Vol. 11, No. 62—66. 1901. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. 31, 2. 1901. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:
Memoirs. Vol. II, part 2. 1900. 4⁰.
Annals. Vol. XIII, part 1. Lancaster 1900. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Bulletin. Vol. XI, 3 u. XIII. 1900. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 32, No. 5; Vol. 33, No. 1 u. 2. 1900—01. 8⁰

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:
American Journal of Archaeology. Vol. IV, No. 4 und Supplement; Vol. V, No. 1. Norwood 1900/01. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:
Anzeiger und Mitteilungen 1900, Heft 1—4. gr. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Odessa:
Sapiski. Tom. 19. 1899. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. XXIII, Heft 1, 2. 1899—1900. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 25. Bd. 1900. 1901. 8⁰.

Radcliffe Obesrvatory in Oxford:

Observations. 1892—99. Vol. 48. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memoire. Nuova Serie. Vol. XVI. 1900. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. XIV, fasc. 6; Tom. XV, fasc. 1—4. 1900—01. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1900. Luglio—Dicembre. 4⁰.
Bollettino. Anno I, No. 1. Maggio 1901. fol.

Académie de médecine in Paris:

Rapport annuel de la commission de l'hygiéne de l'enfance pour l'année 1899. 8⁰.
Rapport sur les vaccinations pour l'année 1898. 1899. 8⁰.
Bulletin. No. 1—24. 1901. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 132, No. 1—25. 1901. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances de 1900. 1900. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 710—715. Février—Juillet 1901. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Revue de l'histoire des réligions. Année 21, Tom. 41, No. 3; Tom. 42, No. 1. 1900. 8⁰.
Petit guide illustré du Musée par L. de Milloué. 1899. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1900, No. 5, 6. 8⁰.
Nouvelles Archives. IVᵉ Série. Tom. 2, fasc. 1. 1900. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Deuxiéme étude sur les pierres figures par A. Thieullen. 1901. 4⁰.
Bulletins. IVᵉ Série. Tom. 10, fasc. 6; Vᵒ Série. Tom 1, fasc. 1 u. 2 et table générale 1860—1899. 1899—01. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1901, No. 1—6. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 29, No. 1, 2. 1901. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Sbornik. Bd. 61. 1900. 8⁰.
Procès-verbaux des séances de l'Académie Imp. des sciences depuis sa fondation. Tom. 1—3. 1897—1900. 8⁰.
Byzantina Chronika. Tom. 7, Liefg. 3. 1900. gr. 8⁰.
Mémoires. a) Classe historico-philologique. Tom. 4, No. 8; b) Classe physico-mathémat. Tom. 10, No. 3—9. 1900. 4⁰.
Bulletin. Tom. 12, No. 2—5; Tom. 13, No. 1—3. 1900. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. Tome 5, No. 4. 1900. 8⁰.
S. Patkanov, Die Irtisch-Ostjaken. Teil II. 1900. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Tom. 19, No. 1—6. 1900. 8⁰.
Mémoires. Vol. XIII, No. 3. 1900. 4⁰.

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XVI, XVIII, fasc. 1—3. 1900—01. gr. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 38, Liefg. 2. 1900. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXXII, No. 9; Tom. XXXIII, No. 1—4. 1900—01. 8⁰.

Physikalisches Zentral-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1899, Teil I, II. 1901. 4⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Ottschet 1900. 1901. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. II. Series. Vol. XI, part 3. 1900. fol.
Proceedings. 1900, part 2, 3. 1900—01. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 24, No. 4; Vol. 25, No. 1, 2. 1900—01. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 36, No. 12; Vol. 37, No. 1—6. 1900—01. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 39, No. 163, 164. 1900. 8⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. XIV. 1900. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Ser. IV. Tom. 12. Settembre—Dicembre 1900; Ser. V. Tom 1. Gennaio—Giugno 1901. 1900/01. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 15, 1. u. 2. Halbbd. 1900. 8⁰.
Historische Monatsblätter. Jahrg. 1, 1900, No. 8—12; Jahrg. 2, 1901, No. 1—3. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Photographische Himmelskarte. Bd. II. 1901. 4°.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky archaeologické. Díl XIII, sešit 6—8 u. Register; Díl XIX, sešit 1—5. 1899—1900. 4°.

Starožitnosti země české. Díl I, svazek 2. 1900. 4°.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Prag:

Uebersicht der Leistungen der Deutschen Böhmens 1895—97. 1900. 4°.
Beiträge zur Kenntnis der Wirbeltierfauna der böhmischen Braunkohlenformation I. 1901. 4°.
Mitteilung. No. XIII u. XIV. 1901. 8°.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1900. 1901. 8°.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Jahresbericht für das Jahr 1900. 1901. 8°.
Sitzungsberichte 1900. a) Classe für Philosophie. b) Mathem.-naturw. Classe. 1901. 8°.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Ročník 30, No. 4, 5. 1901. 8°.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Bericht für das Jahr 1900. 1901. 8°.
Časopis. Bd. 75, Heft 1. 1901. 8°

K. K. Sternwarte in Prag:

Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1892—99. Herausgegeben von L. Weinek. 1901. 4°.

Deutsche Karl Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rektors am 8. November 1900. 8°.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Sbornik. Bd. IV. 1901. 8°.
Časopis. Bd. 30, Heft 1—3. 1900—01. 8°.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. 52. Bd. 1900. 8°.

Naturforscher-Verein in Riga:

Arbeiten. N. F. Heft 10. 1901. 8°.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. XI. 1900. 8°.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1901. 8°.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. VIII, parte 2. Notizie degli scavi 1900, Settembre—Dicembre; Vol. IX, parte 2, 1901. Gennaio. 1900—01. 4°.
Atti. Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. IX, semestre 2, fasc. 12; Vol. X, semestre 1, fasc. 1—11. 1900/01. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali e filologiche. Serie V. Vol. IX, fasc. 7—12; Vol. X, fasc. 1—4. 1900/01. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 54, Sessione I. 1900—01. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1900, No. 3, 4. 8⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abtlg.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XV, 4; XVI. 1901. 8⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXIII, 3, 4. 1900. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1898—99. 1900. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 6, fasc. 4. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1898—99. 1900. 8⁰.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Occasional Papers. Vol. 7. 1900. 8⁰.
Proceedings. IIId Series. Zoology, Vol. II, No. 1—6; Botany, Vol. I, No. 10, II, No. 1, 2; Geology, Vol. I, No. 7—9; Math.-Phys., Vol. I, No. 5—7. 1899—1900. 8⁰.

Observatorio astronómico y meteorológico in San Salvator:

Anales. 1900. fol.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftliche Mitteilungen. (Siehe Wien.)

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Bd. XXII. 1900. 4⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV. Vol. 12, No. 4—10. 1900. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 23, 1900, No. 12; Anno 24, 1901, No. 1—5. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Bd. 37 (1895). 1900. 4⁰.
Öfversigt. 57. Årgång 1900. 1901. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 22, No. 7; Bd. 23, No. 1—4. 1901. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 34, Heft 7 u. 10; Bd. 35, Heft 1—5. 1900—01. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Hermann Fischer, Schwäbisches Wörterbuch. Liefg. 1. Tübingen 1901. 4⁰.

K. württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung in Stuttgart:

Veröffentlichung. Heft IV. 1901. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletin. Tomo II, No. 7. Mexico 1901. fol.
Anuario. Año XXI. Mexico 1901. 8⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahre 1897. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. VIII, Heft 2. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. XV, 1. 1901. 4⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications, No. 5, 6. 1901. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. Vol. II, part 4. 1901. gr. 8⁰.

University of Toronto:

Studies. a) Psychological, Series No. 4. b) Geological, Series No. 1. c) Anatomical, Series No. 1. 1900. 4⁰.
Edw. C. Jeffrey, The Morphology of the central cylinder in the Angiosperms. 1900. 4⁰.

Université in Toulouse:

Annales du Midi XIIe année, No. 46—48. 1900. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série. Tom. 2. Année 1900. Paris. 4⁰.
Livret de l'Université 1900.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XV, 2. 1901. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1900. 1901. 8⁰.
Atti. Vol. 36, disp. 1—5. 1901. 8⁰.
Memorie. Serie II. Tom. 50. 1901. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. 19. 1901. 4⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. XXXII, Année 1900. 1900—01. 4⁰.

K. Universität in Upsala:

Uppsatser i Romansk Filologi tillägnade Professor P. A. Geijer på hans sextio årsdag den 9. April 1901. 1901. 8⁰.
Urkunder till Stockholms historia I. Andra häftet. 1900. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XXI. Amsterdam 1900. 8⁰.
Werken. N. Serie. No. 52* u. 61. 1899—1900. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1898. 1901. 4⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1900. 8⁰.
Verslag. 1900. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. Bd. II, aflev. 2. 1901. 8⁰.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Serie IV. Vol. I, fasc. 1. 1900. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

17. annual Report (1895—96), part II. 1898. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report 1898—99. Vol. 2. 1900. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Report. 1900, No. 67; 1901, No. 68. 8⁰.
Bulletin. Division of biological Survey No. 14. 1900. 8⁰.
North American Fauna No. 16. 1899. 8⁰.
Yearbook 1900. 1901. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Report on the U. S. National-Museum. Part II. 1901. 8⁰.
Annual Report 1898. Part I, II. 1900. 8⁰.
A select Bibliography of Chemistry by H. C. Bolton. 1901. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. IInd Series. Vol. I. 1900. 4⁰.
Observations made during the year 1891 and 1892. 1899—1900. 4⁰.
Report for the year 1899—1900. 1900. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Special Publication No. 4. 1900. 4⁰.
Report of the Superintendent for the year 1898—99. 1900. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 33. Jahrg., 1900, 2. Hälfte. 1900. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-histor. Classe. Bd. 141, 142 und Register XIV. 1899—1900. 8⁰.
Mathem.-naturwissenschaftl. Classe.
1899, Abtlg. I, No. 1—10. 1900, No. 1—6.
1899, Abtlg. IIa, No. 1—10. 1900, No. 1—7.
1899, Abtlg. IIb, No. 1—10. 1900, No. 1—7.
1899, Abtlg. III, No. 1—10. 1900, No. 1—7.
1900. 8⁰.
Denkschriften. Philos.-histor. Classe. Bd. 46.
Mathem.-naturw. Classe. Bd. 66, Abtlg. III; Bd. 68.
Archiv für österr. Geschichte. Bd. 87, Hälfte I, II; Bd. 88, Hälfte I, II; Bd. 89, Hälfte I. 1900. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abtlg., Bd. 48, Hälfte II; Bd. 49, Hälfte 2. 1900. 8⁰.
Almanach. 49. Jahrg., 1899. 8⁰.
Tituli Asiae Minoris. Vol. I. Tituli Lyciae ed. E. Kalinka. 1901. fol.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Abhandlungen. Schriften der Balkankommission. Linguistische Abteilung. I. Südslavische Dialektstudien. Heft I. 1900. 4°.
Jahrbuch 1900. Bd. 50, Heft 2, 3. 1900/01. 4°.
Abhandlungen. Bd. XVI, Heft 1. 1900. fol.
Verhandlungen 1900, No. 13—18; 1901, No. 1—6. 4°.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1898. N. F. Bd. 35; 1899. N. F. Bd. 36, Teil I. 1900. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1901, No. 3—26. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Bd. XXX, Heft 6. Generalregister zu den Bänden 21—30. 1900/01. 4°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 50, Heft 10; Bd. 51, Heft 1—4. 1901. 8°.
Botanik und Zoologie in Oesterreich 1850—1890. 1901. 8°.

K. K. gemeinsames Ministerium in Angelegenheiten Bosniens und der Herzegovina in Wien:

Wissenschaftl. Mitteilungen aus Bosnien und der Herzegovina. Bd. VII. Wien 1900. 4°.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 31. Bd., Heft 2. 1901. 4°.
Mitteilungen 1900/01, No. 1—4. 4°.
Gottfried Zedler, Die Inkunabeln Nassauischer Bibliotheken. 1900. 4°.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. Bd. 34, No. 2—6. 1901. 8°.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1900, No. 2—4. 8°.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 42. 1900. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1901. 103. Stück. 4°.
Vierteljahrsschrift. 45. Jahrg., 1900, Heft 3 u. 4. 1901. 4°.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge. N. F. Liefg. 10. Bern 1900. 4°.
Notice explicative de la feuille XI (2de ed.). Bern 1900. 8°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. 2, 1900, No. 3. 4°.

Von folgenden Privatpersonen:

Albert I. Prince de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. 17, 18. 1900. fol.
Notes de géographie biologique marine. Berlin 1900. 8⁰.

Archer de Lima in Lissabon:

Pour la Paix et pour l'humanité. 1898. 8⁰.

Verlagshandlung von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1900, No. 12; 1901, No. 1—7. 8⁰.

Verlag von Hugo Bermühler in Berlin:

Forschungen zur Geschichte Bayerns. Bd. I—VIII. 1893—1900. 4⁰.

E. Bortolotti in Modena:

Sulla determinazione dell' ordine di infinito. 1901. 8⁰.

Emanuele Ciaceri in Catania:

La Alessandra di Licofrone-Testo, traduzione e commento. 1901. 8⁰.

Théodore Crivetz in Bukarest:

Essai sur l'equidistante. 1900. 8⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Die Elemente des Erdmagnetismus. Publikation III. 1900. 8⁰.

Madame Vve Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 25. Janvier—Juin 1901. 8⁰.

Friedrich Goppelsröder in Basel:

Capillaranalyse. 1901. 8⁰.

Hugo Groth in Hamburg:

Zur Dynamik des Himmels. 1901. 8⁰.

Robert Hartig in München:

Holzuntersuchungen. Altes und Neues. Berlin 1901. 8⁰.

Franz J. Heilemann-Vollshausen in Schöneberg bei Berlin:

Die Kraft des Weltalls. Berlin 1900. 8⁰.

H. Herkenne in Bonn.

Die Textüberlieferung des Buches Sirach. Freiburg 1901. 8⁰.

Hermann Hippauf in Breslau:

Die Rektifikation und Quadratur des Kreises. 1901. 8⁰.

A. von Kölliker in Würzburg:

Die Medulla oblongata von Ornithorhynchus und Echidna. Leipzig 1901. 4⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. 10, Heft 1, 2. Leipzig 1901. 8⁰.

Robert Lauterborn in Heidelberg:

Der Formenkreis von Anuraea cochlearis. Teil I. 1900. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The Moriscos of Spain. 1901. 8⁰.

Fr. Lehmanns Buchhandlung in Zweibrücken:

Luitpold von Bayern von Richard Graf Du Moulin Eckart. 1901. 8⁰.

C. Mehlis in Neustadt a/H.:

Walahstede. Eine rheinische Burganlage. Kaiserslautern 1901. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique Année XXVI. Tom. 75, No. II (Mars & Avril); Tom. 76, No. I, II (Mai—Août). 1901. 8⁰.

Antonio Pranzelòres in Trient:

Niccolo d'Arco, studio biologico. 1901. 8⁰.

Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und ozeanische Sprachen. 5. Jahrg., 3 Heft. 1900. 4⁰.

Gustav Retzius in Stockholm:

Crania Suecica Antiqua. Jena 1900. fol.

Édouard Sarasin in Genf:

Les oscillations du lac des quatre-cantons. 1901. 8⁰.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 10 Jahrg., 1901, No. 3—12. 8⁰.

Serge Socolow in Moskau:

Corrélations régulières supplémentaires du sytème planétaire. 1901. 8⁰.

B. G. Teubner in Leipzig:

Thesaurus linguae latinae. Vol. II, fasc. 1. 1901. 4⁰.
Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. I, Heft 1 und 2. 1901. gr. 8⁰.
Enkyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, Heft 6; Bd. IV, 2, Heft 1. 1901. 8⁰.

E. Teza in Padua:

All' Ascoli. Intorno al Vocabolario di Nic. Volla da Girgenti. 1901. 8⁰.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. III, 4. Phoenisse ed. N. Wecklein. Leipzig 1901. 8⁰.

Johannes Wislicenus in Leipzig:

Sir Edward Frankland. s. l. 1901. 8⁰.

Ed. von Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XII, 2. 1901. 8⁰.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1901.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXV, part 1. 1901. 8°.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations of the year 1898. 1901. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis 1900. 1901. 8°.
Rad. Bd. 145. 1901. 8°.
Monumenta historico-juridica. Vol. VIII. 1901. 8°.
Zbornik za narodni život. Bd. VI, 1. 1901. 8°.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. 3, Heft 3, 4. 1901. 4°.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjesnik. N. Ser. Sveska 5. 1901. 4°.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

La Picardie historique et monumentale. Tom. I, No. 6. 1899. fol.
Bulletin. Année 1899, trimestre 2—4; 1900, trimestre 1. 1900. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie. Deel VII, No. 6, 7; II. Sectie, Deel VII, No. 4—6.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel III, No. 1—4. 1900. 4°.
Jaarboek voor 1900. 1901. 8°.
P. H. Damsté, Patria rura, carmen. 1901. 8°.

Redaktion der Zeitschrift „Athena“:

Athena. Tom. 13, fasc. 4. 1900. 8°.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 27. Jahrg. 1900. 8°.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XX, No. 52, 53; Vol. XXI, No. 54. 1901. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XXIII, No. 2–4. 1901. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XXII, 1. 1901. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 25, No. 4–6; Vol. 26, No. 1–3. 1901. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Vol. XIX, No. 4–9. 1901. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XII, Nr. 121–128. 1901. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. IX, Vol. X, No. 1, 2. 1901. 4⁰.

Peapody Institute in Baltimore:

34th annual Report June 1. 1901. 8⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Volume Eocene. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bamberg:

XVIII. Bericht. 1901. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. V, Heft 4. 1901. 8⁰.
25. Jahresbericht 1899/1900. 1900. 8⁰.
Basler Zeitschrift für Geschichte. Bd. 1, Heft 1. 1901. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 44, afl. 1–4. 1901. 8⁰.
Notulen. Deel 38, afl. 4; Deel 39, afl. 1. 1900–1901. 8⁰.
Dagh-Register. Anno 1641–42 and 1673. 1900/01. 8⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXII, part 2. 1901. fol.
Regenwaarnemingen. XXII. Jahrg. 1900. 4⁰.

K. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indie zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 60. 1901. 8⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. LX, LXII. 1901. 8⁰.
Gedächtnisfeier für Nićifor Dučić, Archimandriten und Akademiker am 22. April 1901. 8⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

An Account of the Crustacea of Norwey. Vol. IV, pars 1, 2. 1901. 4⁰.
Aarbog für 1901. 8⁰.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Acta borrussica. Behördenorganisation. Bd. VI, Abtlg. 1–3. Getreidehandelpolitik. Bd. 3. 1901. 8⁰.
Sitzungsberichte 1901. No. XXIII–XXXVIII. gr. 8⁰.
Corpus inscriptorum latinarum. Vol. XI, partis posterioris fasc. I; Vol. XIII, partis tert. fasc. I. 1901. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. N. F. Heft 34. 1901. 4⁰.
Geologisch-morphologische Uebersichtskarte der Provinz Pommern 1901.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 34. Jahrg., No. 10—17. 1901. 8°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 53, Heft 1—3. 1901. 8°.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1900. 56 Jahrg., Abtlg. I—III. Braunschweig 1901. 8°.
Verhandlungen im Jahre 1901. Leipzig 1901. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. 1901. Bd. XV, Nr. 7—17 und Register zu Bd. XIV. Leipzig. 8°.
Verhandlungen 1900—1901. No. 11—19. 8°.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XVI, Heft 2, 3. 1901. 4°.
Antike Denkmäler. Bd. II, Heft 4. 1901. fol.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinzen Brandenburg und Pommern von G. Hellmann. 1901. 8°.
Bericht über das Jahr 1900. 1901. 8°.
Abhandlungen. Bd. 1, No. 6—8. 1901. 4°.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen. II. u. III. Ordnung im Jahre 1896 und 1900. 1901. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXX, Heft 1—3. 1901. 8°.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungsergebnisse. Heft 9. 1901. 4°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. 50. Jahrg. 1901, No. 14—24. 1901. 8°.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. 14, 2. Hälfte. Leipzig 1901. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Bd. XVI, Heft 7, 8.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 21. Jahrg. 1901, Heft 7—12. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 26. Bd. Zürich 1901. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

82. Jahresversammlung in Neuchatel. 31. Juli bis 2. August 1899; 83. Jahresversammlung in Thusis. 2. bis 4. Sept. 1900. 8°. Nebst französischem Auszuge aus beiden.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. 5e Sér. Tom. 5 cahier 2. Paris 1901. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III. Vol. XIX fasc. 1—3. 1901. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1900. 2. Hälfte. 1900. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 107. 1901. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 57. Jahrg. 2. Hälfte. 1900. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des séances Année 1899—1900. Paris 1900. 8⁰.
Observations pluviométriques 1899—1900. 1900. 8⁰.
Mémoires. 5e Sér. Tom. 5 cahier 2. Paris 1901. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 55. 1900. 8⁰.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 2. 1901. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1901. 27e année No. 13—24. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 36 No. 20—29; Vol. 37 No. 1—3. 1901. 8⁰.

American Philological Association in Boston:

Transactions and Proceedings. Vol. 31. 1900. 8⁰.

K. Lyceum Hosianum in Braunsberg:

Arbeiten aus dem botanischen Institut. I. 1901. 4⁰.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1900. 1901. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XVII, 1. 1901. 8⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:

78. Jahresbericht 1900 und Ergänzungsheft 1901. 8⁰.

Sternwarte in Breslau:

Mitteilungen. Bd. I. 1901. 4⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. Jahrg. 5 Bd. 4. 1901. gr. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tome XV No. 5—9. 1901. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires couronnés in 4⁰. Tom. 57, 58.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tom. 58—60 avec carte pour le tom. 48.
Biographie nationale. Tom. XV, 2; XVI, 1. 1899—1900. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1901, No. 6—10. 8⁰.
b) Classe des sciences 1901, No. 6—10. 8⁰.
4 volumes Croniques in 8⁰. 1899—1900.
4 volumes Croniques in 4⁰. 1899—1900.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Catalogue des Manuscits. Tom 1. 1901. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XX fasc. 3, 4. 1901. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Mémoires. VIII. 1901. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tom. XII fasc. 3; Tom. 14 fasc. 5; Tom. 15 fasc. 4, 5. 1901. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1901. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mitteilungen.) Bd. 30 Heft 3, 4; Bd. 31 Heft 1, 2. 1900/01. 8⁰.
Archaeologiai Értesitö. Uj folyam. (Archäologischer Anzeiger.) Bd. 20 Heft 3—5; Bd. 21 Heft 1, 2. 1900/01. 4⁰.
Értekezések a nyelvtudományok köréből. Bd. 17, Heft 6—8. 1900—01. 8⁰.
Ertekezések a társadalmi tudományok köréből. Bd. 12, Heft 5—7. 1901. 8⁰.
Ertekezések a történeti tudományok köréből. Bd. 19, Heft 1—5. 1901. 8⁰.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. 18, Heft 3—5; Bd. 19, Heft 1, 2. 1900/01. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathemat. Mitteilungen.) Bd. 27 Heft 5. 1901. 8⁰.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Bd. 14—16. Berlin 1898—99. 8⁰.
Rapport sur les traveaux de l'Académie en 1900. 1901. 8⁰.
Gróf Kuun Géza, Ismereteink tibetről. 1900. 8⁰.
Daday Jenő, A Magyarországi kagylósrákok Mayánrajza. 1900. 8⁰.
A Magyar Nemzetségek a XIV. század Közepéig Irta Karácsonyi János. 1900. 8⁰.
Árja és Kaukázusi elemek. Irta Munkácsi Bernát. 1901. 8⁰.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Abafi Aigner, A lepkészet története Magyarországon. 1898. 8⁰.
Héjas A., A zivatarok Magyarországon 1871—95. 1898. 8⁰.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. No. XXIX, 1; XXX, XXXI. Berlin 1900—1901. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Camunicaciones. Tom. I, No. 9. 1901. 8⁰.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. Bd. I Heft 4, 5. 1901. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Verslag over het jaar 1900. 1901. 4°.
Grondsoortenkaart van een gedeelte van Deli door D. S. Hissink. Karte mit erläuterdem Text. 1901. 4°.
Mededeelingen. No. 48—50. 1901. 4°.
Bulletin. No. VIII. 1901. 4°.

Society of natural sciences of Buffalo:

Bulletin. Vol. VII, No. 1. Albany 1901. 8°.

Academia Romana in Bukarest:

Discursuri de recepţiune XXIII. 1901. 4°.
Analele. Serie II. Tome 22. 1899—1900. Memoriile secţiunii sciitifice;
„ 22. 1899—1900. Memoriile secţiunii istorice;
„ 23. 1900—1901. Partea administrativa. 1900 bis 1901. 4°.
Publicaţiunile fondului Princesa Alina Stirbei. No. II—IV. 1896.
Grigorie Cretu, Lexicon Slavo-Romănesc. 1900. 8°.
Sim. Fl. Marian Serbatorile la Romănĭ. Vol. 3. 1901. 8°.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. XX, fasc. 3. 1900/01. 4.
Bulletin. 5e Série. Vol. 4. 1901. 8°.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1901. February—July und Annual Summary 1900. fol.
Rainfall in India 9th year 1899. 1900. fol.
Report on the Administration 1900—1901. 1901. fol.

Departement of Revenue and Agriculture of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain districts 1900. 1901. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Catalogue of printed Books and Manuscripts. Fasc. 3. 1901. 4°.
Bibliotheca Indica. New Ser. No. 977—982, 956, 984—998, 1000. 1899 bis 1901. 8°.
Journal. No. 392—394. 1901. 8°.
Proceedings. 1901. No. 3—8. 8°.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. XXX, 2; Vol. XXXI, 1; Vol. XXXII, 2; Vol. XXXIII, 2. 1900/01. 4°.
Paläontologica Indica. Ser. IX. Vol. III, part I und New Series. Vol. 1, No. 3. 1900—1901. fol.
General Report 1900/01. 1901. 4°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 36, No. 7, 8; Vol. 37, No. 3; Vol. 39, No. 1. 1901. 8°.
Annual Report for 1900—1901. 1901. 8°.
Memoirs. Vol. XXV, No. 1. 1901. 4°.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 28, part 2; Vol. 41, part 7. 1901. 4°.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XI, part 3. 1901. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino. Fasc. 68—70. 1901. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch. Jahrg. XVI, Abtlg. II. 1901. 4⁰.
Dekaden-Monatsberichte. Jahrg. III, 1900. 1901. 4⁰.
Abhandlungen. Heft 6. Leipzig 1901. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 55—59. 1901. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XIII No. 5; Vol. XIV No. 1—4. 1901. gr. 8⁰.

Zeitschrift „The Journal of Geology":

Vol. IX No. 6. 1901. 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiana:

Forhandlingar 1900. 1901. 8⁰.
Skrifter. I. Mathemat.-naturwissensch. Classe 1900 No. 5—7 und Titel. II. Histor.-filos. Classe 1900 No. 6 und Titel. 1900. gr. 8⁰.

K. Norwegische Universität in Christiania:

Schriften aus dem Jahre 1900.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXX. Jahresbericht. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. Bd. 44. Vereinsjahr 1900/01. 1901. 8⁰.

Ohio State University in Columbus:

XIIIth annual Report. 1900. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republik Argentinien):

Boletin. Tom. XVI, 4. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. X, Heft 2, 3.

Historischer Verein für das Grossherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv für hessische Geschichte. N. F. Bd. 3 Heft 1 und Ergänzungsband 1 Heft 1. 1900—1901. 8⁰.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IVe Série. Tome 7. Années 1899—1900. 1901. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome 21, trimestre 4; Tome 22 trimestre 1, 2. 1900—1901. 8⁰.

K. sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1900/01. 1901. 8⁰.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 22. 1901. 8⁰.

Generaldirektion der k. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft in Dresden:

Bericht über das Jahr 1898/99. 1900. fol.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III. Vol. VI, 2, 3; Vol. VII. 1901. 8⁰.
Transactions. Vol. XXXI. Parts 8—11. 1900. 4⁰.

Pollichia in Dürkheim:

Mitteilungen. 58. Jahrg. 1901 No. 14, 15. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 23, No. 6—11. 1901. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXIII, No. 4, 5. 1901. 8⁰.
Transactions. Vol. 40. Part I No. 3. 1901. 4⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1899—1900. 1901. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 15. Jahrg. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

85. Jahresbericht für 1899/1900. 1901. 8⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 27. 1901. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4 und 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Ser. IV. Vol. 24 disp. 2. 1901. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. 14. 1901. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XXVI, Heft 3. 1901. 4⁰.
Bericht. 1901. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1899—1900. 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Bd. 18. 1901. 8⁰.
Societatum Litterae. 1900, Jahrg. XVI, No. 1—12. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Bd. XI, 3. 1901. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." 28. Jahrg. 1901. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diöcesan-Archiv. N.F. Bd. 2 (= Bd. 29 d. ganz. Reihe). 1901. 8⁰.

Universität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Nouv. Série. Fasc. 2. 1901. 8⁰.

Institut national in Genf:

Mémoires. Tom. XVIII. 1893—1900. 1900. 4⁰.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1899 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. 1900. 8⁰.
Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice 1899. 1901. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.
Histoire de l'Université de Genève par charles Borgeaud. L'Académie de Calvin 1559—1798. 1900. 4⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. 33, partie 2. 1899—1901. 4⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:

Abhandlungen. 23. Bd. 1901. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der k. Gesellschaft der Wissenschaften und zwar
Abhandlungen. N. F.
a) Philol.-hist. Classe. Bd. III, 2; Bd. IV, 4; Bd. V, 1, 2. Berlin 1901.
b) Mathem.-physikal. Classe. Berlin 1901.
c) Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens. Berlin 1901. 4⁰.
Nachrichten. a) Geschäftliche Mitteilungen. 1901, Heft 1.
b) Philol.-hist. Classe 1901, Heft 1, 2.
c) Mathem.-physik. Classe. 1900, Heft 1. 1901. 4⁰.
Gelehrte Anzeigen. 1901. Jahrg. 163, No. 6—11. 1901. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:

Handlingar. Serie IV. Tom. 3. 1901. 8⁰.

Universität in Gothemburg:

Årsskrift. Bd. VI, 1900. 1901. 8⁰.

Scientific Laboratories of Dension University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XI, 10. 1901. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Heft 48. 1900. 8⁰.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 31. Jahrgang. 1901. 8⁰.
Der historische Verein für Steiermark 1850—1900. 1900. 4⁰.
Die Feier des 50jährigen Bestehens und Wirkens des Vereins. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1900, Heft 37. 1901. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 2 und 1 Ergänzungsband. 1901. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel IX, 1, 2. 1901. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II. Vol. VII, partie 3, 4. 1901. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Oeuvres complètes de Christian Huggens. Vol. IX. 1901. 4⁰.
Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II. Tom. 4, livr. 3—5 und Série II. Tom. 6. La Haye 1901. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Repertorium zu den Akta und Nova Akta. Vol. I, II, 1, 2. 1894 bis 1899. 4⁰.
Geschichte der Bibliothek und Naturaliensammlung. 1894. 8⁰.
Leopoldina. Heft 37, No. 7—11. 1901. 4⁰.
Nova Acta. Abhandlungen, Bd. 77, 78. 1901. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 55, Heft 3, 4. Leipzig 1901. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 74, Heft 1, 2. Stuttgart 1901. 8⁰.

Thüringisch-sächsischer Verein zur Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. 21, Heft 1. 1901. 8⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

23. Jahresbericht für 1900. 1901. 8⁰.
III. Nachtrag zum Katalog der Bibliothek. 1901. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. XVII. Jahrg. 1899. 8⁰.

Sternwarte in Hamburg:

Mitteilungen. No. 7. 1901. 8⁰.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Bd. XI, 1898—1900. 1901. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1901. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Akademische Rede zur Feier des Geburtsfestes des Grossherzogs, von Adolf Hausrath. 1901. 4°.
Schriften der Universisät aus dem Jahre 1900/01 in 4° und 8°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. X, Heft 2. 1900. 8°.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. 6, Heft 5. 1901. 8°.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XIV, XV. 1901. 4°.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 26, 27. 1900. 4°.

Commission géologique de la Finlande in Helsingsfors:

Carte géologique détaillée, feuilles 36, 37, avec notes explicatives. Kuopi 1900. 8°.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4° und 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. 30, Heft 1. 1901. 8°.
Siebenbürgische Münzen und Medaillen, von Adolf Resch. 1901. 4°.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. 50. Bd. Jahrg. 1900. 1901. 8°.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 38 und 39. Heft. 1901. 8°.

Altertumsforschender Verein in Hohenleuben:

70. und 71. Jahresbericht. 1901. 8°.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 28. Jahrg. 1901. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge, 45. Heft. 1901. 8°.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 26. Jahrg., 1900/01. 1901. 8°.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 5, No. 6—8. 1901. 8°.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Bd. VII. Lieferung 3, 4. Text und Atlas. 1901. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. 36. Bd. 1901. 8°.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1900. 1901. 8°.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):
Sitzungsberichte. Bd. 12, Heft 3, 1900. 1901. 8⁰.

Zentralbureau für Meteorologie in Karlsruhe:
Jahresbericht des Zentralbureaus für das Jahr 1900. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:
Verhandlungen. XIV. Bd., 1900—1901. 1901. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. IIᵉ Série. Tome X, No. 2—4. 1900—1901. 8⁰.

Universität Kasan:
Utschenia Sapiski. Bd. 68, No. 5, 7—11. 1901. 8⁰.
3 medizinische Dissertationen vom Jahre 1901.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:
Zeitschrift. N. F. Bd. XXV. 1901. 8⁰.
Mitteilungen. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:
Annales 1901. kniga 2—4. 1901. 8⁰.
W. A. Danilewski, Isledowania physiolog. II. 1901. 8⁰.
W. Sawwa, Der Moskowitische Czar und das Byzantinische Königtum. 1901. 8⁰. (In russischer Sprache.)

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Bd. 31. 1901. 8⁰.
Quellensammlung. Bd. 5. 1901. 8⁰.

Sternwarte in Kiel:
Publikationen. No. XI. Leipzig 1901. 4⁰.

K. Universität in Kiel:
Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:
Schriften. Bd. XII, Heft 1. 1901. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Vol. 41, No. 3—9. 1901. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:
Jahresbericht für 1900. 1901. 8⁰.
Carinthia I. 91. Jahrg., No. 1—6. 1901. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:
Jahrbuch. 26. Heft, 47. Jahrg. 1900. 8⁰.
Diagramme der magnetischen und meteorolog. Beobachtungen 1900. fol.

Mediz.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:
Sitzungsberichte. 25. Jahrg. 22. Bd., Abtlg. II, Heft 1—3. 1901. 8⁰.
26. Jahrg. 23. Bd., Abtlg. I, Heft 1—2. 1901. 8⁰.
Abtlg. II, Heft 1. 1901. 8⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1901, No. 4, 5. 8⁰.
Skrifter. 6e Série. Section des sciences. Tom. IX, No. 7; Tom. XI, No. 1. 1901. 4⁰.
Tychonis Brahe Dani operum primitias de nova stella denuo edidit regia societas scientiarum Danica. 2 Voll. Hauniae 1901. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Chr. Thaarup, Fortegnelse paa danske Oversättelser af gräfke og latinske Skribenter. 1836. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. No. 4—8. (April—Juli, Oktober). 1901. 8⁰.
Rozprawy historyczno-filozof. Ser. II. Vol. 15. 1901. 8⁰.
Rozprawy filolog. Serya II. Tom. 17. 1901. gr. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 39, 40. 1901. 8⁰.
Stownik gwar Polskich ulozyt Jan Kastowicz. Tom. 2. 1901. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej. Tom. 35. 1901. 8⁰.
Katalog literatury naukowej polskiej. Tom. 1. Heft 1, 2, 3. 1901. 8⁰.
Materiaty i Prace komisyi językowej. Tom. I 1. 1901. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:

16. Bericht 1898—1900. 1901. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Bd. 37. 1901. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 4e Série. Vol. 37, No. 140, 141. 1901. 8⁰.
Observations météorologiques 1900. XIVe année. 1901. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. IX No. 4; Vol. X No. 1, 6. (Neue Serie. Vol. II.) 1900/01. 8⁰.
Bulletin. Vol. I No. 4. 1900. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie. Deel XIX, 3, 4; Deel XX, 1, 2. 1900—1901. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1900—1901. 1901. 8⁰.
Levensberichten 1900—1901. 1901. 8⁰.

Universität in Leiden:

Recueil de Travaux. Tom. 1, 2. 1899. 8⁰.

Herbier Royal in Leiden:

Livr. 1—8. Musée Botanique de Leide, publié par W. F. R. Suringar. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-histor. Classe. Bd. XXI No. 1. 1901. 4⁰.
Abhandlungen der mathem.-physik. Classe. Bd. XXVI No. 5—7. 1901. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 53 No. I—III. 1901. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 53 No. I 1901. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 63 Heft 9—12; Bd. 64 Heft 1—10. 1901. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1900. 1901. 8⁰.
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. V. Mit 1 Atlas in fol. 1901. 8⁰.

Université de Lille:

Travaux et Mémoires. Tom. X. Mémoire No. 28. 1901. 8⁰.
Livret de l'étudiant. 1901—1902. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

59. Jahresbericht. 1901. 8⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XVI part 2 No. 94. 1901. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVI No. 63, 64. 1901. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 68 No. 447—450; Vol. 69 No. 451—453. 1901. 8⁰.
Philosophical Transactions. Series B. Vol. 193; Series A. Vol. 195, 196. 1900—1901. 4⁰.
List of Members. 30. November 1900. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 61 No. 8, 9; Vol. 62 No. 1 und Appendix to. Vol. 61 No. 2—4. 1901. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 465—470 (August—December 1901 und January 1902). 8⁰.
Proceedings. Vol. 17 No. 240—244. 1901. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. Nov. 1900—June 1901. 8⁰.
The Journal. a) Zoology. Vol. 28 No. 182, 183; b) Botany. Vol. 35 No. 243. 1901. 8⁰.
The Transactions. a) Botany. Vol. V part 13—15; Vol. VI part 1; b) Zoology. Vol. VIII part 1—4. 1900. 4⁰.
List of the Linnean Society 1901—1902. 1901. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1901. Part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1901. Vol. I part 2; Vol. II part 1. 1901. 4⁰.
Transactions. Vol. XVI, part 2, 3. 1901. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1654—1680.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 28 livr. 3. 1901. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. IIIᵉ Série. Tom. 3. 1901. 8⁰.

Institut Grand Ducal in Luxemburg:

Publications de la section des sciences naturelles. Tom. 26. 1901. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 56. Stans 1901. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. XIII part 1. 1901. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. VII part I. 1901. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. 3 No. 3. 1901. 8⁰.
Catalogue of the prehistoric Antiquities by R. Bruce Foote. 1901. 8⁰.

The Government Observatory in Madras:

Report on the Kodaikanal and Madras Observatory for 1900—1901. 1901. fol.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Tom. XIV. 1890—1901. 4⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 39, cuad. 1—6. 1901. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II. Vol. 33. 1900. 8⁰.
Memorie. a) Classe di scienze matematiche. Vol. 18 fasc. 11; Vol. 19, fasc. 1—4; b) Classe di scienze storiche. Vol. 21 fasc. 3. 1900. 4⁰.

Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi in Mailand:

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo I. 1901. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Memorie. Vol. VI fasc. 3. 1901. 4⁰.
Atti. Vol. 40 fasc. 2, 3. 1901. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III. Anno 28 fasc. 30 und 31. 1901. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 45 part 3, 4; Vol. 46 part 1. 1901. 8⁰.

Universität Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. XI, fasc. 1—9. 1901. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XIII. (New Series), part 2; Vol. XIV, part I. 1901. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. N. Serie. Anno 6, fasc. 1. 1901. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 12. Jahrg. 1900. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. 1901. Enero—Junio. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate“ in Mexico:

Memorias y revista. Tom. XIII, No. 1, 2; Tom. XV, No. 7—12; Tom. XVI, No. 1. 1901. 8⁰.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie III. Vol. 2. 1900. 4⁰.

Observatoire du Mont Blanc:

Annales. Tom. 4, 5. Paris 1900. 4⁰.

Bureau de dépôt, distribution et échange des Publications in Montevideo:

Manifiesto de S. E. el Presidente de la Republica Don Juan L. Cuestas. 1898. 8⁰.

Mensaje 1900 y 1901. 1900—1901. 8⁰.

Reglamento de la oficina de depósito. 1892. 8⁰.

Geografia nacional por Orestes Araujo. 1895. 8⁰. (Con una carta geografica.)

Constitución de la republica oriental del Uruguay. Por Pablo V. Goyena. 1887. 8⁰.

Nuestro País, cuadros descriptivos por Orestes Araujo. 1895. 8⁰.

Ceremonia inaugural de les obras del Puerto de Montevideo. 1901. 8⁰.

Dirección general de Estatistica in Mantevideo:

Comercio exterior y movimiento de navegación. 1901. 4⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Tomo IV fasc. 19—21. 1901. fol.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2ᵉ Serie. Tom. 3, No. 2; Tom. 4, No. 1. Section des médecine. 2ᵉ Série. Tom. 1, No. 4. 1900. 8⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. III. Serie. Vol. III, No. 1—4. 1900. 8⁰.

Catalogue of the Chateau Ramezay Museum. 1901. 8⁰.

Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Imp. in Moskau:

Observations. Septembre 1899—Février 1901. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1901 No. 1, 2. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXII 1. 1901. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 2—11. 1901. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1900. 1901. 4⁰.

Die Volk- und Wohnung-Zählung vom 1. Dezember 1900 in München. Teil I, II. 1901. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt, 32. Jahrg. No. 7—10. 1901. 4°.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. III. Jahrg. 1901 Heft 2, 3. fol.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Preisverzeichnis der in Bayern erscheinenden Zeitungen für das Jahr 1902. I. Abtlg. und Nachträge. 1901. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1901/02. 8°.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1901 No. 18—27. 8°.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete. Heft IV. Berlin 1900. fol.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1901 in 4° und 8°.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Winter-Semester 1901/02. 8°.
Rede des Rektors L. Brentano, Ueber Ethik und Volkswirtschaft in der Geschichte. 1901. 4°.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. 3. Jahrg. 1901 No. 1, 2. 4°.

Ornithologischer Verein in München:

II. Jahresbericht für 1899 und 1900. 1901. 8°.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1901 No. 10—12; 1902 No. 2. 4°.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. III. Tom. 1 fasc. 6; Sér. III. Tom. 2 fasc. 1, 2. Paris 1900—1901. 8°.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 33. 1901. 8°.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. 3. Vol. VII fasc. 5—11. 1901. 8°.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. XIV 3, 4; Bd. XV 1, 2. Berlin 1901. 8°.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 49 part 6; Vol. 50 part 2—6; Vol. 51 part 1. 1901. 8°.
Annual Report for the year 1900—1901. 1901. 8°.
Subject-Matter Index of mining and metallurgical litterature for the year 1900. 1901. 8°.

American Association for the Advancement of science in New-Haven:
Proceedings. 49th Meeting held at New-York, June 1900. Easton 1900. 8°.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. IV. Ser. Vol. 12 No. 67—72 (September—Dezember). 1901. 8°.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. XXII 1. 1901. 8°.

Academy of Sciences in New-York:
Memoirs. Vol. II part 3. 1901. 4°.
Annals. Vol 13 parts 2, 3. 1901. 8°.

American Museum of Natural History in New-York:
Annual Report for the year 1900. 1901. 8°.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 33 No. 3, 4. 1901. 8°.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:
American Journal of Archaeology. Vol. V No. 2—4 und Supplement. 1901. 8°.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:
Festschrift zur Säkularfeier 1801—1901. 1901. gr. 8°.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:
Jahresbericht 1899, 1900. 1900—1901. 8°.
Mitteilungen. Heft XIV. 1901. 8°.

Verein für Naturkunde in Offenbach:
37.—42. Bericht von 1895—1901. 1901. 8°.

Geological Survey of Canada in Ottawa:
Catalogue of Canadian Birds. Part I by John Macoun. 1900. 8°.
Annual Report. New. Series. Vol. XI. With Maps. 1901. 8°.

R. Accademia di scienze in Padua:
Indice generale degli Atti 1779—1900. 1901. 8°.

Circolo matematico in Palermo:
Rendiconti. Tom. XV fasc. 5, 6. 1901. 4°.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:
Bollettino. Anno I No. 3—5. 1901. fol.

Académie de médecine in Paris:
Bulletin. 1901 No. 26—43. 8°.

Académie des sciences in Paris:
Comptes rendus. Tom. 133 No. 1—26. 1901. 4°.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. I. Série. Tom. 12. 1900. 4°.
A. G. Pingré, Annales célestes du XVIIe siècle. 1901. 4°.

École polytechnique in Paris:
Journal. IIe Série. Cahier 5, 6. 1900. 4°.

Ministère de l'instruction publique in Paris:

Les Carbures d'hydrogène 1851—1901. Par M. Berthelot. Paris 1901. 3 Vols. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livre 716—721. (Août 1901 — Janvier 1902.) 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Bibliothèque d'études. Tom. IX. 1901. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 42 No. 2, 3; Tom. 43 No. 1, 2. 1900—1901. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1900 No. 7, 8; 1901 No. 1—3. 8⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 5e Série. N. S. Tom. 1 fasc. 3—6; Tom. 2 fasc. 1. 1901. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1901 No. 7—12. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 29 fasc. 3 1901. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XXV. 1900. 8⁰.
Mémoires. Tom. XIII. 1900. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Byzantina Chronika. Tom. 7 Heft 4. 1900. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. Tome VI No. 1. 1901. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XX No. 1—10. 1901. 8⁰.
Mémoires. Vol. XVIII No. 1, 2. 1901. 4⁰.
Bibliothèque géologique de la Russie 1897. 1901. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 39, Liefg. 1. 1901. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 33 No. 5—9. 1901. 8⁰.

Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:

Traveaux. Vol. III, 2; Vol. IV. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01.

Sternwarte in St. Peterburg:

Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II. Vol. VI, VIII. 1900—1901. fol.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. IId Series. Vol. XI part 4. 1901. 4⁰.
Proceedings. Vol. 53 part 1, 2. 1901. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXV No. 99. 1901. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 37 No. 7—11. 1901. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 40 No. 165, 166. 1901. 8⁰.
Transactions. New Series. Vol. XX part 2. 1901. 4⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XII, pag. 169—230. 1901. 4⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V. Tom. 2. Luglio—Ottobre. 1901. 8⁰.

Alleghany Observatory in Pittsburgh:

Miscellaneous scientific Papers. New Series. Vol. 1—3. 1901. 8⁰.

Altertumsverein in Plauen:

Mitteilungen. 14. Jahresschrift auf das Jahr 1900. 1901. 8⁰.

Portland Society of natural History in Portland:

Proceedings. Vol. II part 5. 1901. 8⁰.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:

Verhandlungen der XIII. Allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung, I. Teil. Berlin 1901. 4⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Veröffentlichung. N. F. No. 6. 1901. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Rozprawy. Tŕída I, Ročnik 8; Tŕída II, Ročnik 9; Tŕída III, Ročnik 3, číslo 1. 1900. 8⁰.
Historický Archiv. Číslo 17—19. 1900. 8⁰.
Věstník. Bd. IX Heft 1—9. 1900. 8⁰.
Almanach. Ročnik 11. 1901. 8⁰.
Sbírka pramenův III, 3. 1900. 8⁰.
František Bartoš, Narodni Písně Moravské Sešit I. 1899. 8⁰.
Zíkmund Winter. Život a učení. 1901. 8⁰.
Gustav Gruss, Základové theoretické Astronomie Díl druhý. 1900. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Prag:

J. E. Scherer, Die Rechtsverhältnisse der Juden in den deutsch-österreichischen Ländern. Leipzig 1901. 8⁰.
Bericht über die Festsitzung vom 4. März 1901. 4⁰.
Die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. I. Bd. Aussig 1901. 8⁰.
Beiträge zur Kenntnis der Wirbeltierfauna der böhmischen Braunkohlenformation II. 1901. 4⁰.
J. Lang, Ueber die Stickstoffausscheidung nach Leberexstirpation. Strassburg 1901. 8⁰.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Bericht über die astrologischen Studien Tycho Brahe's. 1901. 4⁰.
Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. 1901. 4⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

52. Bericht über das Jahr 1900. 1901. 8°.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Bd. 75 Heft 2, 3. 1901. 8°.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1900. 61. Jahrg. 1901. 4°.

Verein für Geschichte der Deutschen in Prag:

Mitteilungen. 39. Jahrg. Heft 1—4. 1900. 8°.

Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1900. N. F. Bd. 20. 1900. 8°.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd. XXI (= N. F. XII). 1901. 8°.

Stadtarchiv in Pressburg:

Beiträge zur Geschichte der Medizin in Pressburg. Von D. Stephan von Vámossy. 1902. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. VIII. Heft für das Jahr 1900. 1901. 8°.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. No. 44. 1901. 8°.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletim mensal. Majo—Dezembro 1900. 1900—1901. 4°.
Annuario XVII. 1901. 8°.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Index to Vols 1, to 10, p. 1—209. 1900. 8°.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 10 semestre 1 fasc. 12 e Indice del volume; Vol. X semestre 2 fasc. 1—11. 1901. 4°.
Atti. Classe di scienze fisiche Vol. I—III. 1895—1901. 4°.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. VII parte I: Memorie; Vol. IX parte 2: Notizie degli scavi 1901. Febbrajo — Ottobre. 1901. 4°.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 2 Gingno 1901. 1901. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. 10 fasc. 5—8. 1901. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 54 (1900—1901). Sessione II—VII. 1901. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1901 No. 1, 2. gr. 8°.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abtlg.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XVI fasc. 2, 3. 1901. 8°.

K. italienische Regierung in Rom:

Le Opere di Galilei. Vol. XI. Firenze 1901. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 24 fasc. 1, 2. 1901. 8⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1899/1900. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 7 fasc. 1, 2. 1901. 8⁰.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tom. 1 No. 1—3. Paris und Hanoi 1901. 4⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Alfred Dobler, Erlebnisse eines Appenzellers in neapolitanischen Diensten, 1854—1859. 1901. 4⁰.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

XIIth annual Report. 1901. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Almanaque nautico para 1903. 1901. 4⁰.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Bosnien-Herzegovina im Jahre 1898. Wien 1901. 4⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 66. Jahrg. 1901. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 24 No. 6—11. 1901. 8⁰.

Stanford University in Stanford (California):

Contributions to Biology. No. XXIII—XXVI. 1901. 8⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Handlingar. Deel 33 Heft 1. 1901. 9⁰.
Månadsblad. Jahrg. 25, 1896; Jahrg. 29, 1900. 1901. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Lefnadsteckningar. Bd. 4 Heft 1, 2. 1901. 8⁰.
Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Bd. 38 (= 2. Serie Bd. 24), 1896. 1901. 4⁰.
Handlingar. N. F. Bd. 33, 34. 1900—1901. 4⁰.
Bihang til Handlingar. Bd. 26 Teil 1—4. 1901. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. XXIII Heft 5, 6. 1901. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 35 Heft 6—9. 1901. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

K. württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung in Stuttgart:

Relative Schweremessungen I. 1901. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. 10. Jahrg. 1901 Heft 1—4. 1901. 8⁰.

K. württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Heilbronn. Teil 1. 1901. 8⁰.
Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrg. 1900. Heft 1—3. 1901. 8⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

The Mineral Resources of New-South-Wales by Edw. F. Pittmann. 1901. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Memoirs of the Geological Survey of New-South-Wales. Geology No. 2. 1901. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Abstract of Proceedings 1900/01. 8⁰.
Journal and Proceedings. Vol. 34. 1900. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Supplement der Mitteilungen. Japanische Mythologie von Karl Florenz. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar 1900/01. 8⁰.
The Journal of the College of Science. Vol. XIII, 4; Vol. XV, 2, 3 1901. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. 5 No. 1. 1901. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. IV, 4. 1901. 8⁰.

Kansas Academy of Science in Topeka, Kansas:

Transactions. Vol. XVII. 1901. 8⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. VII part 1. August 1901. gr. 8⁰.

Royal Society of Canada in Toronto:

Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. 6. 1900. 8⁰.

University of Toronto:

Studies. History, first Series. Vol. 5. 1901. 4⁰.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. No. 49, 50. 1901. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série. Année 1900. Tom. 2 fasc. 3, 4; Annèe 1901. Tom. 3. 1900/01. 4⁰.
Bibliothèque meridionale. Ie Série. Tom. 6; IId Série. Tom. 6. 1901. 8⁰.
Rey-Pailhade, Rôle du Philothion. Paris 1901. 8⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XVI fasc 1. 1901. 8⁰.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 36 disp. 6—9, 11—15. 1901. 8⁰.

R. Deputazione sopra gli studi di storia in Turin:

Historiae Patriae Monumenta. Vol. XIX. 1900. fol.

K. Universität Upsala:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1900—1901.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Prodromus florae Batavae. Vol. 1 pars 1. Nijmegen 1901. 8⁰.
Anteekeningen, 21. Juni 1901. 1901. 8⁰.
Verslag, 22. Juni 1901. 1901. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. III. Aflev. 1. 1901. 8⁰.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti. Serie IV. Vol. 1 fasc. 2. 1901. 8⁰.

Accademia Olimpica in Vicenza:

Atti. Annale 1899—1900. Vol. 32. 1900. 8⁰.

Mathematik-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace matematyczno-fizyczne. Vol. XII. Warschau 1901. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

17. annual Report (1895—1896), part I und 18. annual (1896—1897), part I. 1898—1899. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report for the year 1899—1900. Vol. I. 1901. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

North American Fauna No. 20, 21. 1901. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Miscellaneous Collections No. 1258. 1901. 8⁰.
Annual Report for the year ending June 30. 1899. Part I, II. 1901. 8⁰.
Annals of the astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. Vol. I. 1900. 4⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XIII und XIV, p. 1—166. 1900. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 163—176. 1900. 8⁰.
Monographs. No. 39, 40. 1900. 4⁰.
20th annual Report 1898—1899. Parts II—VII. 1900. 4⁰.
21th annual Report 1899—1900. Parts I, VI and VII continued. 1901. 4⁰.
Preliminary Report on the Cap Nom Gold Region Alaska. 1900. 8⁰.

Grossherzogliche Bibliothek in Weimar:

Verzeichnis der von Dr. Reinhold Köhler hinterlassenen Büchersammlung. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Mitteilungen der prähistorischen Kommission. I Bd. No. 5. 1901. 4°.
Sitzungsberichte.
Abtlg. I Bd. 109 Heft 7.
Abtlg. IIa Bd. 109 Heft 8, 9.
Abtlg. IIb Bd. 109 Heft 8—10. 1900. 8°.
Südarabische Expedition. Bd. II. 1902. 4°.
Fontes rerum Austriacarum. Abtlg. II v. Bd. 51 u. Reg. zu Bd. 1—50. 1901. 8°.
Almanach. 50. Jahrg. 1900. 8°.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1900. Bd. 50 Heft 4; Jahrg. 1901. Bd. 51 Heft 1. 4°.
Verhandlungen 1901 No. 7—14. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1901 No. 27—52; 1902 No. 1. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Bd. 31 Heft 1—5. 1901. 4°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 51 Heft 5—8. 1901. 8°.
Abhandlungen. Bd. 1 Heft 1, 2. 1901. 4°.
Die Schwalbe, Berichte der ornitholog. Beobachtungsstationen. N. F. II. 1900/01. 4°.

K. K. militärgeographisches Institut in Wien:

Die astronomisch-geodätischen Arbeiten. Bd. VII. 1901. 8°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XV No. 3-4. 1900. 4°.

K. K. Universität Wien:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 8°.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 41. Bd. 1900/01. 1901. 8°.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 54. 1901. 8°.

Ortsverein für Geschichte und Altertumskunde in Wolfenbüttel:

Braunschweigisches Magazin. Jahrg. 1900. 4°.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 43. 1901. 8°.
Jahresbericht für 1900. 1901. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahersschrift. 46. Jahrg. 1901 Heft 1, 2. 1901. 8°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. III 1901 No. 1—3. 1901. gr. 8°.
9. Jahresbericht 1900. 1901. 8°.
Robert Durrer, Die Kunst- und Architekturdenkmäler Unterwaldens. Bogen XI. 1901. 4°.
J. R. Rahn, Zur Statistik schweiz. Kunstdenkmäler. Bogen 12.

Von folgenden Privatpersonen:

Prinz Albert I. von Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. 19, 20, avec les cartes III, V et VI. 1901. fol.

Verlagsbuchhandlung von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 25 Heft 8—12. 1901. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung Hermann Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift für Rechtsgeschichte. Bd. XXII. (Roman. u. german. Abteilung.) Weimar 1901. 8⁰.

Julius Wilhelm Brühl in Heidelberg:

Roscoe-Schorlemner's Ausführliches Lehrbuch der Chemie. Bd. VIII Teil 6; Bd. IX. Braunschweig 1901. 8⁰.

Ulysse Chevalier in Paris:

Oeuvres historiques. Tom. 2. Valence 1900. 8⁰.
Bibliothèque patrologique I. Paris 1900. 8⁰.
Bibliothèque liturgique. Tom. V, 2; Tom. VI, VII. 1900. 8⁰.

Margarites G. Dimitsas in Athen:

Ὁ πολιτισμὸς τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος. Athen 1902. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung Ferd. Dümmler-Berlin:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. XVI Heft 7—9. 1901. fol. (Fortsetzung siehe „Fischer-Jena".)

Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. XVII No. 1—14. Jena. fol.

Magistrat der Stadt Mainz:

Gutenberg-Fest zu Mainz im Jahre 1900. 4⁰.

Albert Gaudry in Paris:

Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. Paris 1901. 8⁰.

Karl Gegenbauer in Heidelberg:

Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. Bd. II. Leipzig 1901. 8⁰.

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin:

C. Arldt, Elektrische Kraftübertragung. 1901. 8⁰.

Madame J.-B.-A. Godin in Guise (Aisne):

Le Dovoir. Tom. 25. 1901. Juillet—Décembre. 8⁰.

L. Grünenwald in Speier:

Beiträge zur Urgeschichte der Pfalz. Speier 1901. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Liefg. VI. Leipzig 1901. fol.

G. N. Hatzidakis in Athen:

Ἔλεγχοι καὶ κρίσεις. 1901. 8⁰.
Γλωσσολογικαὶ μέλεται. Athen. Tom. 1. 1901. 8⁰.

Gideon Max Hirsch in Breslau:

Chronologische Reformen. 1901. 8⁰.

F. Imhoof-Blumer in Winterthur:

Kleinasiatische Münzen. Bd. I. Wien 1901. 4⁰.

Alexander von Kalecsinsky in Budapest:

Ueber die ungarischen warmen und heissen Kochsalzseen. 1901. 8⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. 10 Heft 3 und 4. Leipzig 1901. 8⁰.

Ugo Levi in Venedig:

I monumenti più antichi del dialetto di Chioggia. 1901. 8⁰.
E. Liesegang und V. Friese, Magdeburger Schöffensprüche. Berlin 1901. I. 8⁰.

Chr. Mehlis in Neustadt a/H.:

Die Schuhleistenkeile der neolithischen Zeit. 1901. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. XXVIᵉ année, tom. 77. I. II. (Septembre—Décembre 1901.) Paris. 8⁰.

Chr. V. Nielsen in Kopenhagen:

Albrecht Dürer. 1895. 4⁰.
Filippo Brunellesco. 1896. 4⁰.
Leonardi da Vinci. 1897. 4⁰.
Den Venetianske Scole. 1898. 4⁰.
Nicolas Poussin. 1899. 4⁰.
Berómte Kunstnerne 1901. 4⁰.

G. Omboni in Venedig:

Dents di Lophiodon. 1901. 8⁰.

André Poëy in Paris:

Nouvelle conception de l'ovule. 1901. 8⁰.
La place de la mésologie dans la hiérarchie encyclopédique. 1901. 8⁰.

Oswald J. Reichel in Lympstone (England):

The Devonshire „Domesday" IV—VI. 1898—1901. 8⁰.
Extracts from the Pipe Rolls of Henry II. Relating to Devon. 1897. 8⁰.

Verlagshandlung Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und ozeanische Sprachen. 5. Jahrg. 4. Heft. 1900. 4°.

Adolf Roemer in Erlangen:

Studien zu Aristophanes. Leipzig 1902. 8°.

Lucian Schermann in München:

Orientalische Bibliographie. XIV. Jahrg. 1. Halbjahresheft, Liefg. 1, 2. Berlin 1901. 8°.

Verlagshandlung Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 10. Jahrg. No. 13—24. München. 8°.

Verlagshandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. I Heft 3 und 4. Leipzig 1901. gr. 8°.
Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. IV, 1 Heft 1; Bd. II, 2 Heft 1. Leipzig 1901. 8°.
Thesaurus linguae latinae. Vol. II fasc. 1, 2; Vol. I fasc. 3. Leipzig 1901. 4°.

A. Thieulleu in Paris:

Deuxième étude sur les pierres figures. 1901. 8°.
Varia. Os travaillés à l'époque de Chelles. 1901. 4°.

Otto Walkhoff in München:

Mikrophotographischer Atlas der pathologischen Histologie menschlicher Zähne. Text und Atlas. Stuttgart 1897. fol.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. I. Pars 3 et 5. Lipsiae 1901. 8°.

Boris Weinberg in Odessa:

† P. Passalsky, Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivöi-Rog. 1901. 4°.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.
Verlag der k. Akademie.
1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXII
Jahrgang 1902.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

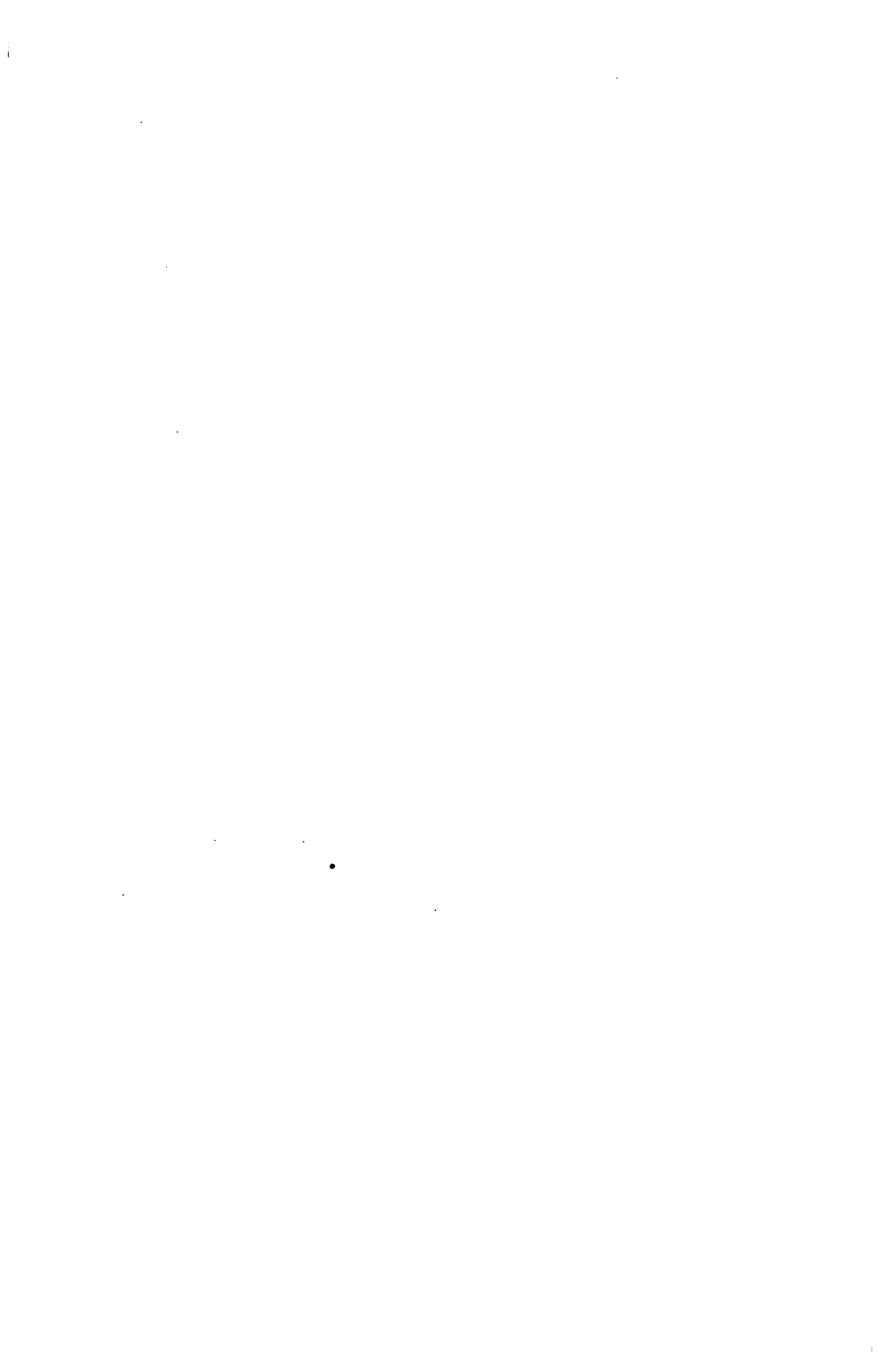
Sitzung vom 4. Januar 1902. Seite

Sitzung vom 1. Februar 1902.

Sitzung vom 1. März 1902.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1902.

Sitzung vom 6. Dezember 1902.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 4. Januar 1902.

1. Herr Ferd. Lindemann überreicht eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Loewy in Freiburg: „Ueber Differentialgleichungen, die mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören."

2. Herr H. Seeliger spricht „über die Veränderungen in den Nebeln der Nova Persei." Diese vorläufige Mittheilung wird später zur Veröffentlichung kommen.

3. Herr A. v. Baeyer theilt die Resultate seiner neuesten Arbeiten „über die Vierwerthigkeit des Sauerstoffs" mit, welche anderwärts veröffentlicht werden sollen.

Hieran knüpft Herr Ferd. Lindemann einige Bemerkungen über die Hypothesen an, welche in der mathematischen Physik in Bezug auf die Constitution der Atome gemacht worden sind.

Ueber Differentialgleichungen, die mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören.

Von **Alfred Loewy.**

(*Eingelaufen 4. Januar 1902.*)

Herr Gino Fano[1]) hat sich mehrfach mit dem Satze beschäftigt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung:

$$\text{(D)} \quad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

durch eine Transformation:

$$z = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)},$$

wobei die $a_0(x)$, $a_1(x)$, . . . $a_{n-1}(x)$ dem Rationalitätsbereiche, für den die Rationalitätsgruppe betrachtet wird, angehören, in diejenigen der adjungirten Differentialgleichung:

$$\text{(D}_1\text{)} \quad z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (p_2 z)^{(n-2)} - \ldots (-1)^n p_n z = 0$$

übergeführt werden können, dass also (D) und (D_1) zu derselben Art[2]) gehören, besteht darin, dass die Rationalitätsgruppe

[1]) G. Fano, Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte. (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 34, (1899).) Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari. (Rend. della R. Acc. dei Lincei (1899).) Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen. Math. Ann. Bd. 53, p. 568.

[2]) Vgl. Ludwig Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bd. II 1, p. 120 und 124.

von (D) aus lauter Transformationen gebildet ist, welche eine bilineare Form:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} s_{ik} y_i z_k$$

von nicht verschwindender Determinante mit cogredienten Variablenpaaren y_i, z_i in sich überführen. Es möge mir gestattet sein, dieses Resultat einerseits für die Theorie der associirten Differentialgleichungen, andererseits für die Differentialgleichungen, denen die Producte der Integrale der vorgelegten Differentialgleichung zu je zweien genügen, zu verwerthen.

§ 1.

Stellen $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem von (D) dar, und bildet man:

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \begin{vmatrix} y_{i_1} & y_{i_2} & \ldots & y_{i_m} \\ y'_{i_1} & y'_{i_2} & \ldots & y'_{i_m} \\ y''_{i_1} & y''_{i_2} & \ldots & y''_{i_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(m-1)}_{i_1} & y^{(m-1)}_{i_2} & \ldots & y^{(m-1)}_{i_m} \end{vmatrix},$$

wobei $i_1 < i_2 \ldots < i_m$ und $i_1, i_2, \ldots i_m$ eine jede Combination der Zahlen 1, 2, ... n zu je m bedeuten, so genügen diese $\nu = \binom{n}{m}$ Determinanten einer linearen homogenen Differentialgleichung, die zuerst von Herrn L. Fuchs[1]) untersucht wurde und nach Herrn Ludwig Schlesinger[2]) die n-$m$te associirte Differentialgleichung von $D = 0$ heisst; diese Differentialgleichung soll für das Folgende, wie es im allgemeinen der Fall ist, von der Ordnung $\binom{n}{m}$ angenommen werden. Ist A irgend eine lineare Substitution, welche y_i in $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} y_k$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ überführt, so erleiden die $y_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ die n-$m$te associirte Substitution $A^{(n-m)}$, nämlich die $y_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ gehen über in

$$\sum_{k_1 k_2 \ldots k_m} a_{i_1 i_2 \ldots i_m k_1 k_2 \ldots k_m} y_{k_1 k_2 \ldots k_m},$$

---

[1]) L. Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner Akademie (1888), p. 1115.

[2]) Ludw. Schlesinger, Handbuch II 1, p. 125.

dabei ist:

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_m k_1 k_2 \ldots k_m} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_m} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_m k_1} & a_{i_m k_2} & \ldots & a_{i_m k_m} \end{vmatrix},$$

und $k_1 < k_2 \ldots < k_m$ bedeutet eine jede Combination der Zahlen 1, 2, ... n zu je m. Die Theorie der associirten Differentialgleichungen beruht in ihren Grundlagen auf dem Angegebenen und dem Satze, dass die n-$m$te associirte Substitution einer aus zwei Substitutionen componirten Substitution aus den n-$m$ten associirten Substitutionen der beiden Componenten in derselben Reihenfolge zusammengesetzt ist. Ist $A \cdot B = C$, so ist:

$$A^{(n-m)} \cdot B^{(n-m)} = C^{(n-m)}.$$ [1]

Nehmen wir nun an, dass eine Differentialgleichung (D) mit der ihr adjungirten Differentialgleichung zu derselben Art gehört, so führen alle Transformationen der Rationalitätsgruppe von (D) eine und dieselbe bilineare Form φ mit cogredienten Variablenpaaren von nicht verschwindender Determinante in sich über. Die Rationalitätsgruppe der n-$m$ten associirten Differentialgleichung besteht aus den n-$m$ten associirten Substitutionen der Rationalitätsgruppe von (D). Bedenkt man, dass die transponirte Substitution von einer n-$m$ten associirten

---

[1] Die obige Formel war, wie ich bemerken möchte, schon Weierstrass im Jahre 1868 bekannt. Vgl. die in Baltzers Theorie und Anwendung der Determinanten (4. Aufl. (1875)) übergegangene briefliche Mittheilung von Weierstrass, die W. an Baltzer anlässlich der Abhandlung über bilineare und quadratische Formen (Monatsberichte der Berliner Akademie, (1868)) machte. Baltzer, a. a. O., p. 55. Es sei noch erwähnt, dass diese Untersuchungen über die associirten Differentialgleichungen mit der Theorie der sogenannten Begleitformen, Concomitanten (Smith) einer bilinearen Form in engstem Zusammenhang stehen. Ich habe im Text statt Begleitform (Bachmann) associirte Form gesetzt. Ueber die Theorie der Begleitformen vgl. man Bachmann's Arithmetik der quadratischen Formen (Leipzig, 1898, p. 389).

Substitution die *n-m* te associirte Substitution der transponirten Substitution ist, so folgt, dass, wenn:

$$P' \varphi P = \varphi$$

ist, so ist auch:

$$P^{(n-m)'} \varphi^{(n-m)} P^{(n-m)} = \varphi^{(n-m)}.$$

Man erhält also den Satz:

I. Führt eine Substitution P eine bilineare Form φ mit cogredienten Variablenpaaren in sich über, so transformirt die *n-m* te associirte Substitution von P die *n-m* te associirte Form von φ cogredient in sich.

Wendet man dieses Ergebniss auf die *n-m* te associirte Differentialgleichung einer Differentialgleichung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, an, so ergiebt sich, dass sämmtliche Transformationen der Rationalitätsgruppe der *n-m* ten associirten Differentialgleichung die bilineare Form $\varphi^{(n-m)}$ in sich überführen. Der Werth der Determinante der *n-m* ten associirten Form $\varphi^{(n-m)}$ ist die $\binom{n-1}{m-1}$ te Potenz der Determinante von φ. Falls φ eine nicht verschwindende Determinante hat, so trifft dies auch für $\varphi^{(n-m)}$ zu.

Hieraus folgt:

II. Gehört eine Differentialgleichung mit ihrer adjungirten zu derselben Art, so gehören auch alle associirten mit ihren adjungirten zu derselben Art.[1])

Wir betrachten nun den besonderen Fall $n = 2m$ und schreiben die Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m & y_{m+1} & \dots & y_{2m} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' & y_{m+1}' & \dots & y_{2m}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} & y_{m+1}^{(m-1)} & \dots & y_{2m}^{(m-1)} \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m & z_{m+1} & \dots & z_{2m} \\ z_1' & z_2' & \dots & z_m' & z_{m+1}' & \dots & z_{2m}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(m-1)} & z_2^{(m-1)} & \dots & z_m^{(m-1)} & z_{m+1}^{(m-1)} & \dots & z_{2m}^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

[1]) Vgl. auch Ludw. Schlesinger, Handbuch II 1, p. 154.

hin; transformirt man in dieser Determinante die $2m$ Variablen einer jeden Zeile cogredient durch Substitutionen mit derselben Matrix P, so multiplicirt sich diese Determinante nur mit der Substitutionsdeterminante von P. Entwickelt man die obige Determinante nach adjungirten Subdeterminanten, so findet man die bilineare Form:

$$(Q) \qquad \Sigma\, \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_m k_1 k_2 \ldots k_m}\, y_{i_1 i_2 \ldots i_m}\, z_{k_1 k_2 \ldots k_m},$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_m k_1 k_2 \ldots k_m}$ die positive oder negative Einheit, $i_1 < i_2 \ldots < i_m$ und $k_1 < k_2 \ldots < k_m$ sämmtliche Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots 2m$ bis auf die Reihenfolge darstellen. $z_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ wird aus $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ in analoger Weise wie $y_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ aus $y_1, y_2, \ldots y_{2m}$ gebildet. Wendet man die n-$m$te associirte Substitution $P^{(n-m)}$ auf die cogredienten Variablenpaare der bilinearen Form Q an, so multiplicirt sich Q mit der Determinante von P.

Wir denken uns die Rationalitätsgruppe von (D) auf ihre grösste unimodulare Untergruppe reducirt; diese Reduction erreicht man offenbar durch Adjunction der Hauptdeterminante:

$$\Delta(y_1 y_2 \ldots y_{2m}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{2m} \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{2m}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(2m-1)} & y_2^{(2m-1)} & \ldots & y_{2m}^{(2m-1)} \end{vmatrix}$$

zum Rationalitätsbereiche; denn damit $\Delta(y_1 y_2 \ldots y_{2m})$ rational bekannt ist, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten sämmtlicher Transformationen der Rationalitätsgruppe den Werth $+1$ haben. Nach Adjunction der Hauptdeterminante bleibt aber bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe für den neuen Bereich die bilineare Form Q ungeändert. Mit Hülfe des im Anfange citirten Satzes von Herrn Fano ergiebt sich der von Herrn L. Fuchs[1]) gefundene und von ihm mehrfach behandelte Satz:

---

[1]) L. Fuchs, Sitzungsber. der Berliner Akademie (1888), p. 1115 ff., sowie ebenda (1899), p. 182.

Die Bemerkung von Herrn Fano in den Atti dell. Acc. di Torino

III. Die $m$te associirte Differentialgleichung irgend einer Differentialgleichung $2m$ter Ordnung gehört mit ihrer adjungirten nach Adjunction der Hauptdeterminante der ursprünglichen Differentialgleichung zu derselben Art.

Nehmen wir nun an, dass schon die ursprüngliche Differentialgleichung mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehörte; dann hat wegen:

$$P' \varphi P = \varphi$$

die Determinante von P den Werth ± 1. In diesem Fall ist schon das Quadrat von $\Delta(y_1 y_2 \ldots y_{2m})$ rational bekannt. Um also die Rationalitätsgruppe einer Differentialgleichung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, unimodular zu machen, genügt schon die Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche. Nach Adjunction einer Quadratwurzel lässt die Rationalitätsgruppe der $m$ten associirten Differentialgleichung einer Differentialgleichung $2m$ter Ordnung die zwei bilinearen Formen $\varphi^{(m)}$ und Q invariant.

Es ist noch zu zeigen, dass sich $\varphi^{(m)}$ und Q nicht etwa nur um eine multiplicative Constante unterscheiden. Hat man eine bilineare Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} s_{ik} y_i z_k,$$

so ist:

$$\varphi^{(m)} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m k_1 k_2 \ldots k_m} \sum s_{i_1 i_2 \ldots i_m k_1 k_2 \ldots k_m} y_{i_1 i_2 \ldots i_m} z_{k_1 k_2 \ldots k_m},$$

wobei $i_1 < i_2 \ldots < i_m$ und $k_1 < k_2 \ldots < k_m$ und sowohl $i_1, i_2, \ldots i_m$ wie $k_1, k_2, \ldots k_m$ eine jede Combination der Zahlen $1, 2, \ldots 2m$ zu m bedeuten. Wäre nun $\varphi^{(m)}$ von Q nur um eine multiplicative Constante verschieden, so müsste unter anderem sein:

$$s_{12 \ldots m k_1 k_2 \ldots k_m} = 0,$$

(1899), p. 396 Anmerkung, durch die er den Satz von Herrn Fuchs beweisen will, halte ich nicht für zutreffend; denn die Gleichungen (21) auf p. 142 des zweiten Bandes des Schlesinger'schen Werkes werden für $n = 6$ linker Hand Null ergeben; es wird also die quadratische Form, die Herr Fano benützt, nicht stets existiren.

falls $k_1, k_2, \dots k_m$ irgend m geordnete von $m+1, m+2, \dots 2m$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \dots 2m$ darstellen; hingegen wäre $s_{12\dots m\,m+1\dots 2m}$ von Null verschieden. Betrachtet man die m Determinanten:

$$\begin{array}{l} s_{12\dots m\,1\,m+2\,m+3\dots\dots\dots 2m} = 0 \\ s_{12\dots m\,1\,m+1\,m+3\dots\dots\dots 2m} = 0 \\ s_{12\dots m\,1\,m+1\,m+2\,m+4\dots 2m} = 0 \\ \vdots \\ s_{12\dots m\,1\,m+1\,m+2\dots\dots 2m-1} = 0 \end{array}$$

und entwickelt sie nach den Elementen der ersten Colonne, so folgt, da $s_{12\dots m\,m+1\dots 2m}$ und mithin auch die aus den Unterdeterminanten von $s_{12\dots m\,m+1\dots 2m}$ gebildete Determinante von Null verschieden ist, dass:

$$s_{11} = s_{21} = \dots = s_{m1} = 0$$

wird. Analog braucht man nur für die m letzten Zeilen das Verschwinden von $s_{m+11}, s_{m+21}, \dots s_{2m1}$ zu zeigen. Dann wird gegen die Voraussetzung die Determinante von φ Null; mithin sind $\varphi^{(m)}$ und Q wesentlich verschieden.

Wir haben also den Satz:

IV. Die Rationalitätsgruppe der $m$ten associirten Differentialgleichung einer Differentialgleichung der $2m$ten Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, führt nach Adjunction einer Quadratwurzel eine Schaar bilinearer Formen cogredient in sich über.

Eine jede Schaar bilinearer Formen enthält auch eine bilineare Form von verschwindender Determinante; wird aber eine bilineare Form verschwindender Determinante cogredient in sich transformirt, so ist die Gruppe der überführenden Substitutionen stets auf Substitutionen mit einer geringeren Variablenzahl reducibel. Wendet man daher das Criterium von Herrn Beke[1]) für die Irreducibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung an, so ergiebt sich:

---

[1]) Beke, Die Irreducibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Annalen, Bd. 45, p. 289; vgl. auch L. Schlesinger, Handbuch, II 1, p. 106.

V. Die $m$te associirte Differentialgleichung einer Differentialgleichung $2m$ter Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, wird nach Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche reducibel.

Dieser Satz ist auch von Herrn Richard Fuchs[1]) gefunden worden; jedoch fehlt bei ihm die Bemerkung, dass die Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche unter Umständen nötig werden kann, damit die Differentialgleichung reducibel wird.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich auch auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwenden. In diesem Falle $n = 2$, $m = 1$ fällt die Differentialgleichung mit ihrer associirten zusammen. Wir finden also: Jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, ist nach Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereich reducibel, so dass sie durch die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt wird.[2])

---

1) Richard Fuchs, Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 121, p. 205. Die Gleichung (5) des § 2 der Arbeit von Herrn R. Fuchs zeigt übrigens, dass eine Adjunction nothwendig werden kann. Die Bemerkung „Der auf der linken Seite auftretende Factor $\frac{1}{\Delta}$ beeinflusst, wie leicht zu sehen, diesen Schluss nicht" (p. 207, Anmerkung) trifft also nicht zu. Vgl. auch L. Fuchs, Sitzungsber. der Berliner Akademie (1899), p. 190.

2) Dass die Adjunction einer Quadratwurzel nothwendig werden kann, um die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, reducibel zu machen, ergiebt sich auch aus Herrn Lindemann's Untersuchungen „Ueber die Differentialgleichungen der Functionen des elliptischen Cylinders" (Math. Annalen, Bd. 22). Herr Lindemann untersucht dort unter 5) Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die, wie man nach den Resultaten des folgenden Paragraphen sagen kann, falls eine gewisse transcendente Function $F(x)$ als rational bekannt angesehen wird, mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören. Ist $F(x)$ bekannt, — ich wende dieselben Bezeichnungen wie Herr Lindemann an —, so bleibt die quadratische Form $y_1 y_2$ bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe in dem

§ 2.

Für das Folgende setze ich voraus, dass die vorgelegte Differentialgleichung (D) ein derartiges Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ von Integralen besitzt, dass zwischen den gewählten Elementen $y_1, y_2, \ldots y_n$ keine homogene quadratische Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Wir betrachten die $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ Producte $y_i y_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$, die wir mit Y_{ik} bezeichnen; erfahren die y_i eine lineare homogene Substitution P, so transformiren sich auch die Y_{ik} linear; diese Substitution der Y_{ik}, soll anlehnend an Herrn Ad. Hurwitz[1]) die zweite Potenz- oder Quadrattransformation von P genannt und mit $\mathfrak{P}_2 P$ bezeichnet werden.

Unter der gemachten Annahme genügen die $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ Producte Y_{ik} einer linearen homogenen Differentialgleichung genau von der $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ten Ordnung; die Differentialgleichung hat Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche, und die Grössen Y_{ik} bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung wird erhalten, indem man die aus $Y, Y_{11}, Y_{12} \ldots Y_{nn}$ und deren Abgeleiteten bis zur Ordnung $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ gebildete Determinante durch die Wronskische Determinante der $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ Grössen $Y_{11}, Y_{12} \ldots Y_{nn}$ dividirt und Null setzt. Aus dem bekannten Appell'schen Satze (Annales de l'école normale, II, Bd. 10, p. 400) ergiebt sich nämlich, dass

---

Bereiche, der $F(x)$ und daher auch die Ableitungen von $F(x)$ enthält, ungeändert. Adjungirt man $y_1 y_2' - y_2 y_1'$, das abgesehen von einer Constanten bei Herrn L. den Werth $\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$ hat, dem Rationalitätsbereiche, so hat die Differentialgleichung des elliptischen Cylinders mit einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit Coefficienten aus dem durch $\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$ erweiterten Bereiche Integrale gemein.

[1]) A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie. Math. Annalen, Bd. 45, p. 390.

die Coefficienten dieser Differentialgleichung rational durch die Coefficienten von $D = 0$ und deren Abgeleitete darstellbar sind. Diese Differentialgleichung, die wir mit $\mathfrak{P}_2 D = 0$ bezeichnen wollen, findet man übrigens einfach, indem man y und dessen Abgeleitete aus $Y = y^2$ und den hieraus durch Differentiation hergeleiteten Gleichungen vermöge $D = 0$ eliminirt, bis man eine von y und dessen Abgeleiteten freie Gleichung erhält.[1])

Man sieht unschwer ein, dass die Rationalitätsgruppe von $\mathfrak{P}_2 D = 0$ aus den Quadrattransformationen der Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ besteht. Der Beweis kann etwa analog, wie ihn Herr L. Schlesinger im Handbuch II 1, p. 136 für die associirten Differentialgleichungen führt, erbracht werden.

Ich brauche jetzt einen Hülfssatz: Besitzt eine lineare homogene Differentialgleichung ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so bleibt dieses bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe nicht nur numerisch, sondern auch formal ungeändert.

Angenommen, irgend eine lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ besitze ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so lässt sich dieses wie jedes Integral in der Form:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots c_n y_n \tag{1}$$

darstellen, wo $y_1, y_2, \dots y_n$ ein Fundamentalsystem von (D), $c_1, c_2, \dots c_n$ Constante bedeuten. Ersetzt eine Transformation der Rationalitätsgruppe von (D) y_i durch $\sum_{k=1}^{k=n} p_{ik} y_k$, so geht das obige Integral (1) in

$$c_1 \sum_{k=1}^{k=n} p_{1k} y_k + c_2 \sum_{k=1}^{k=n} p_{2k} y_k + \dots + c_n \sum_{k=1}^{k=n} p_{nk} y_k \tag{2}$$

über; da (1) rational bekannt sein soll, so muss (1) bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe numerisch ungeändert bleiben; es muss also (1) und (2) denselben Werth haben. Wären die zwei Ausdrücke nicht identisch dieselben, so hätte

[1]) Vgl. L. Schlesinger, Handbuch II 1, p. 202.

man eine homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen einem Fundamentalsystem von Integralen von (D); dies ist aber unmöglich. Hiermit ist der Hülfssatz erwiesen.

Angenommen die Gleichung $\mathfrak{P}_2 D = 0$ besitze ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so ist dieses eine lineare Function der Y_{ik} und bleibt bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $\mathfrak{P}_2 D = 0$ formal ungeändert. Die lineare Function der Y_{ik} ist aber eine quadratische Function der $y_i y_k$, die bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ ungeändert bleibt, die quadratische Form der $y_i y_k$ kann hierbei eine verschwindende oder nicht verschwindende Determinante haben. Ist $D = 0$ irreducibel, so muss die Determinante von Null verschieden sein. Verschwindet aber die Determinante der quadratischen Form, so kann man nach den Resultaten von Herrn Fano[1]) wenigstens sagen, dass eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören und deren Integrale $D = 0$ genügen, mit der zu $D = 0$ adjungirten Differentialgleichung von derselben Art ist. Mithin erhalten wir den Satz:

I. Besitzt die Differentialgleichung $\mathfrak{P}_2 D = 0$ ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so bleibt bei sämmtlichen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ eine quadratische Form invariant, und es gehört entweder $D = 0$ oder eine Differentialgleichung, deren sämmtliche Integrale $D = 0$ befriedigen und die Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche hat, mit der adjungirten Differentialgleichung von $D = 0$ zu derselben Art.

Existirt umgekehrt eine quadratische Form, die bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ formal ungeändert bleibt, so ist diese rational bekannt und ferner auch Integral von $\mathfrak{P}_2 D = 0$. Mithin folgt:

II. Lassen alle Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ eine quadratische Form invariant, so hat $\mathfrak{P}_2 D = 0$ ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral.

---

[1]) G. Fano, Math. Annalen, Bd. 53, p. 572.

Beachtet man schliesslich, dass, falls eine bilineare Form cogredient in sich übergeführt wird und diese nicht symmetrisch oder alternirend ist, auch stets eine bilineare Form verschwindender Determinante in sich übergeht, ferner dass eine alternirende Form nur geraden Rang haben kann, so sieht man, dass die Rationalitätsgruppe einer Differentialgleichung ungerader Ordnung, die irreducibel ist und mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, nur aus Transformationen, die eine symmetrische und mithin eine quadratische Form in sich transformiren, bestehen kann. Hieraus folgt:

III. Erfüllen die Elemente eines Fundamentalsystemes einer irreduciblen Differentialgleichung $D = 0$ von ungerader Ordnung keine quadratische homogene Relation mit constanten Coefficienten, so ist nothwendig und hinreichend, damit die Differentialgleichung $D = 0$ mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, dass die Differentialgleichung $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ter Ordnung, welcher die Integralproducte $y_i y_k$ genügen, ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral besitzt.

Ist $D = 0$ irreducibel, so kann $\mathfrak{P}_2 D = 0$ niemals zwei dem Rationalitätsbereiche angehörige Integrale, die sich nicht um einen constanten Factor unterscheiden, besitzen; denn gäbe es zwei solche Integrale, so bliebe bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ eine Schaar quadratischer Formen und daher auch eine Form verschwindender Determinante invariant; es müsste mithin $D = 0$ gegen die Voraussetzung reducibel werden.

Sitzung vom 1. Februar 1902.

1. Herr SEB. FINSTERWALDER macht eine Mittheilung: „Ueber die mechanische Nachbildung von Minimalflächen“ unter Vorzeigung von drei darauf bezüglichen Modellen. Die Mittheilung wird anderweit veröffentlicht werden.

2. Herr SIGMUND GÜNTHER bringt einen Aufsatz: „Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe“ in Vorlage.

3. Herr C. v. KUPFFER spricht: „Ueber die Commissura veli transversi des Hirns.“ Die Veröffentlichung findet an einem andern Orte statt.

4. Herr WILH. CONR. RÖNTGEN legt eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten an der hiesigen Universität ARTHUR KORN: „Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie“ vor.

5. Herr K. A. v. ZITTEL überreicht eine Studie des Herrn Obermedizinalrathes JOSEPH GEORG EGGER dahier: „Der Bau der Orbitolinen und verwandter Formen“. Ferner als Anhang dazu eine Arbeit des Herrn Dr. FERD. BROILI, Assistent an der paläontologischen Sammlung: „Ueber die Fauna der Orbitolinen führenden Schichten der untersten Kreide in der Krim“. Die beiden Abhandlungen sind für die Denkschriften der Akademie bestimmt.

6. Herr FERD. LINDEMANN theilt eine Notiz des Herrn Dr. NEWEL PERRY: „Das Problem der conformen Abbildung für eine spezielle Curve von der Ordnung $3n$“ mit.



Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe.

Von **S. Günther.**

(Eingelaufen 1. Februar.)

Die Lehre von den fliessenden Gewässern erfordert zu ihrem Ausbau eine stete Rücksichtnahme auf die Terrainkunde, die wissenschaftliche Topographie. Denn ebenso, wie auf der einen Seite das strömende Wasser — hier durch Erosion und Denudation, dort durch Akkumulation des Detritus — die Oberflächengestalt wesentlich schaffen hilft, so hängt auch die Art und Weise, in welcher sich diese Agentien bethätigen, von der Struktur des Oberflächenmodelles ab, die sich zuvor herausgebildet hatte. Insbesondere wählt rinnendes Wasser stets den kürzesten unter den Wegen, welche es einem bestimmten tieferen Niveau zuführen, und es ist also von Wichtigkeit, sich über den Verlauf dieser Bahnen von vornherein zu orientieren. Will man die Gesetzmässigkeiten kennen lernen, die hier obwalten, so muss man natürlich von der so äusserst unregelmässigen Gestalt der Landoberfläche absehen und sich die Hohlräume, in denen sich die Wasserbewegung vollzieht, als von geometrischen Flächen begrenzt vorstellen. Eine von Boussinesq[1]) herrührende Definition entsprechend weiterbildend, stellen wir Folgendes fest:

Die Landoberfläche lässt sich betrachten als eine Aufeinanderfolge von Flächenstücken, welche gegen

[1]) Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Française, 23. Band, S. 165 ff.

das Meeresniveau zum einen Teile konvex, zum anderen Teile konkav gekrümmt sind.

Als XY-Ebene denken wir uns stets eine horizontale Ebene, die so gelegen sein soll, dass innerhalb des hier in betracht kommenden Bereiches die vertikal gerichteten Ordinaten z positiv bleiben. Legen wir dann eine Vertikalebene von der Gleichung $y =$ Konst. durch die Landoberfläche, so wird aus dieser eine Kurve herausgeschnitten, die so beschaffen ist, dass der zweite Differentialquotient $\frac{d^2z}{dx^2}$ irgendwo auf ihr sein Zeichen wechselt. So lange $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativ ist, verläuft die Schnittkurve konkav gegen die Horizontalebene; wenn dagegen $\frac{d^2z}{dx^2}$ positiv wird, wendet die Kurve dieser Ebene ihre konvexe Seite zu. Im allgemeinen wird also diese Grösse einmal ihr Zeichen wechseln, und da dies für jede einzelne Schnittkurve gilt, so hat man damit die Grenzlinie gefunden, welche jeweils die konvex und konkav gekrümmten Flächenteile trennen. Verfolgen wir die Schnittkurve weiter, so gelangen wir zu einem Punkte, in dem die Berührungslinie zur XY-Ebene parallel verläuft. Die Gesamtheit aller dieser Punkte verbindend, erhalten wir eine Kurve, welche als Grenzlage für diejenigen Flächenpunkte zu gelten hat, für welche die Tangentialebene bezüglich spitze und stumpfe Winkel mit der Horizontalebene bildet. Diese Grenzkurve ist, hydrologisch gesprochen, die Wasserscheide[1]) der beiden in ihr zusammenstossenden teils konvexen, teils konkaven Flächen. Jeder allseitig von wasserscheidenden Linien nach oben begrenzte Hohlraum der Landoberfläche soll als Stromgebiet oder Bassin bezeichnet werden. Wir setzen hier durchgehends die sogenannte elliptische Krümmung voraus, deren Wesen darin besteht, dass die Berührungsebene einer Fläche ganz und gar

[1]) Die von L. v. Buch gewählte Bezeichnung „Wasserteiler" (vgl. Günther, Alexander v. Humboldt, Leopold v. Buch, Berlin 1900, S. 245) hat sich nicht durchzusetzen vermocht.

auf ein und derselben Seite der letzteren verbleibt. Es kommen ja in der Natur gewiss auch Flächen von hyperbolischer Krümmung, also Sattelflächen, vor, aber für unsere Zwecke müssen solche als Ausnahmen gelten.

Damit haben wir für diesen Begriff sowohl, als auch für den der Wasserscheide Bestimmungen erhalten, welche für gewöhnlich, von Ausnahmefällen abgesehen, als eindeutig gelten können. Dass ihre Festsetzung, wie sie vielfach gegeben wird, mancherlei Bedenken unterliegt, ist von Philippson[1]) hervorgehoben worden. Letzterer gibt selbst die nachstehende Definition: „Wasserscheide ist jede Linie, in der sich zwei Gefällsrichtungen der Erdoberfläche nach oben zu schneiden." Dem Sinne nach ist dies völlig übereinstimmend. Nur wird von uns der Uebergang zunächst als ein kontinuierlicher aufgefasst, obwohl selbstverständlich auch der Fall einer Kante oder Schneide, die dann ohneweiters die Wasserscheide repräsentiert, mit inbegriffen ist.

Von den Krümmungsverhältnissen eines solchen Hohlraumes, der alles in seinem Bereiche fallende meteorische Wasser sammelt, hängt es ab, ob dasselbe in ihm verbleibt oder aber den Zugang zu seinem natürlichen Bestimmungsorte, dem Meere, findet. Wir gelangen damit auf unsere Weise zu jener Zweiteilung aller terrestrischen Einsenkungen, welche zuerst v. Richthofen[2]) durchgeführt hat, indem er den zentralen oder abflusslosen Gebieten die peripherischen Gebiete gegenüberstellte. Ist nämlich der Hohlraum eine Wanne, mit Penck[3]) zu sprechen, deren Kennzeichen darin besteht, dass eine der an die Grenzfläche gelegten Berührungsebenen zur Horizontalebene parallel wird, so kann das Regenwasser — wenigstens solange es nicht hoch genug steigt, um über eine Randlinie überzulaufen — die Mulde nicht mehr

[1]) Philippson, Studien über Wasserscheiden, Leipzig 1886, S. 14 ff.

[2]) v. Richthofen, Führer für Forschungsreisende, Berlin 1886, S. 275 ff.

[3]) Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 158.

verlassen. Von Flusssystemen innerhalb eines solchen Hohlraumes kann, obwohl man ja darauf selten zu achten pflegt, nur bedingt die Rede sein; wenigstens wollen wir gleich jetzt unsere Erklärung des Wortes Stromgebiet noch dahin ergänzen, dass dessen Begrenzungsfläche stets eine gleichsinnige Krümmung aufweisen soll. Nur mit Gebilden dieser Art wollen wir uns hier beschäftigen. Es wird angenommen, dass die Tangentialebene der in frage stehenden Fläche, die zudem als stetig gekrümmt vorausgesetzt wird, mithin aller Ecken und Kanten entbehrt, allenthalben nur Winkel mit der XY-Ebene bildet, die $< 90^0$ und $> 0^0$ sind.

Die französischen Mathematiker, welche sich der Begründung der topographischen Fundamentalbegriffe hauptsächlich angenommen haben, während man anscheinend in Deutschland diesen Untersuchungen ein geringeres Interesse entgegenbrachte,[1] haben gleichzeitig mit der Wasserscheide („ligne de faîte") auch noch eine andere ausgezeichnete Linie des Bewässerungssystemes eines Hohlraumes in betracht gezogen, nämlich den Thalweg.[2] Da durch Philippson die Morpho-

---

[1] Von einschlägigen deutschen Originalarbeiten scheint nur eine einzige anzuführen zu sein: Quidde, Kurven gleicher Steilheit auf Flächen zweiten Grades, Stargard i. P. 1879. Dieselbe verfolgt jedoch rein geometrische Zwecke. Unter dem geographischen Gesichtspunkte hat der Verf. den ganzen Komplex zusammengehöriger Studien schon früher kurz abgehandelt (Günther, Topographische Studien über die Gestalt der Flussbetten, Nachrichten über Geophysik, 1. Heft, S. 9 ff.).

[2] Dieser Ausdruck wurde, nachdem ihn der deutsche Hydrotechniker Wiebeking dem Rastatter Kongresse mundgerecht gemacht hatte — „der Thalweg des Rheins soll die Grenze zwischen Elsass und Baden sein" —, auch von den französischen Fachmännern adoptiert, und zwar so vollständig, dass dieselben ihn wörtlich, ohne Uebertragung, in die eigene wissenschaftliche Sprache herübernahmen. Näheres über dieses Vorkommnis gibt eine Lebensbeschreibung Wiebekings (Voigts Neuer Nekrolog der Deutschen, Weimar 1842). In Frankreich bedient man sich des Wortes Thalweg auch in noch erweiterter Bedeutung, ziemlich im gleichen Sinne, wie vallée; vgl. z. B. Marty, La Thalweg géologique de la moyenne vallée de la Cère (Bull. de la Société Géologique de France, (3) 22. Band, S. 34 ff.).

logie der Wasserscheiden zu einem einstweiligen Abschlusse gebracht worden ist, so haben wir es an diesem Orte wesentlich nur mit der zweiten topographischen Linie zu thun. Eine ganz einwurfsfreie Definition derselben bereitet Schwierigkeiten, und diese dehnen sich dann auch auf das Wort Stromstrich aus, weil zwischen Thalweg und Stromstrich die engste Beziehung obwaltet. Vielfach werden beide Begriffe sogar identifiziert; hier aber soll der Stromstrich diejenige Oberflächenlinie eines fliessenden Gewässers sein, in welcher dessen Fläche von einer vertikalen Zylinderfläche geschnitten wird, die den Thalweg zur Leitlinie hat.[1]) Wenn man, wie dies ein neueres Werk thut,[2]) dessen eigentliche Tendenz in der Klärung der topographischen Terminologie beruht, den Thalweg einfach als „die tiefste Linie des Thales" hinstellt, so muss man auch angeben, wie man eine solche Linie mit Maximaleigenschaft konstruiert, und so lange dies nicht geschehen, wird man mit der Definition nicht viel anfangen können.

Die erwähnten französischen Geometer, welche sich, wie wir sehen werden, sehr ernsthaft um die exakte Begriffsbestimmung bemüht haben, stellen durchweg die Wasserscheide in Parallele zum Thalwege, der die Gewässer seines Gebietes sammelt. Indessen besteht doch ein gewisser Unterschied.

---

[1]) Bei Penck (a. a. O., 2. Band, S. 73) lesen wir: „Die mittlere Richtung auch der Mäanderthäler ist eine ziemlich konstante; sie bestimmt den Thalweg oder Stromstrich." Supan (Grundzüge der physischen Erdkunde, Leipzig 1896, S. 261) charakterisiert den Stromstrich als „die Linie, welche die Punkte grösster Oberflächengeschwindigkeit verbindet". Bei Rein endlich (Bemerkungen über Veränderungen der Flussläufe, Stromstrich und Begleiterscheinungen Petermanns Geograph. Mitteil., 42. Band, S. 129 ff.) erreicht längs des Stromstriches die Wölbung, welche bei genauem Zusehen der Spiegel eines Flusses erkennen lässt, ihr Maximum; der Stromstrich ist zugleich ein eigentlicher Stromfaden im Sinne der neueren Hydrodynamik, während zu beiden Seiten sich die Bewegung des Wassers in Spiralbahnen vollzieht (vgl. Moeller, Studien über die Bewegung des Wassers in Flüssen, Zeitschr. f. Bauwesen, 1883, S. 193 ff.).

[2]) Neuber, Wissenschaftliche Charakteristik und Terminologie der Bodengestalten der Erdoberfläche, Wien-Leipzig 1901, S. 398.

Die Wasserscheide nämlich ist nicht nur im abstrakt-geometrischen Oberflächenbilde, das uns hier zunächst vorliegt, sondern auch in der Natur selbst etwas reell Vorhandenes, während im ersteren Falle der Thalweg die von den Abhängen herabfliessenden Gewässer nicht thatsächlich aufnimmt. Angedeutet wird der hier bestehende Gegensatz wohl zuerst von Breton de Champ;[1]) auffallenderweise aber ist der den Sachverhalt bestimmende einfache Lehrsatz nie als solcher beachtet und bewiesen worden. Allgemein ausgesprochen, lautet er: Wenn auf einer Fläche zwei Systeme sich rechtwinklig schneidender Kurven bestehen, so kann durch einen bestimmten Punkt nur immer je eine einzige Kurve des nämlichen Systemes hindurchgehen.

Es seien durch I und II (Fig. 1) die Individuen je einer solchen Kurvenschaar bestimmt. Wäre es möglich, dass durch den Punkt A ausser der ihm zugehörigen Systemkurve II noch eine andere Linie AA' hindurchginge, die ebenfalls auf der Kurve I in A senkrecht stände, so hätte man, da die beiden Orthogonalkurven eine unendlich benachbarte Kurve I, nämlich mm', in den Punkten B und C schneiden müssen, in dem unendlich kleinen — also ebenen — Dreiecke $ABC \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 90^0$, was nicht möglich ist. Uebrigens folgt die gleiche Thatsache auch aus dem gleich nachher zu berührenden Um-

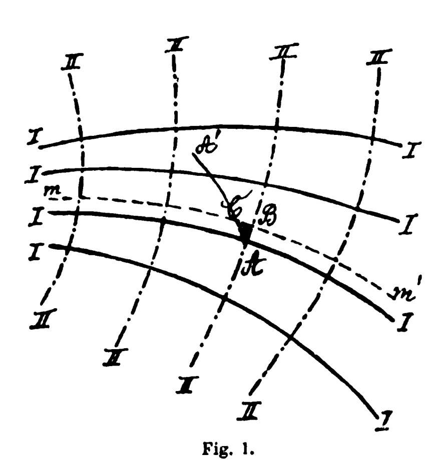


Fig. 1.

[1]) Breton de Champ, Note sur les caractères géométriques des lignes de faîte ou de thalweg, Compt. Rend. de l'Acad. Franç., 53. Band, S. 808 ff. Auf die oben genannte partielle Differentialgleichung kam auch unabhängig De Saint Venant (Surfaces à plus grande pente constituées sur des lignes courbes, Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 1852).

stande, dass die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajektorien von der ersten Ordnung sind.

Dies trifft nun in unserem Falle zu. Identifizieren wir die Kurven des Systemes I mit den Niveaulinien oder Isohypsen der Fläche, so fallen diejenigen des Systemes II mit den Linien des Wasserablaufes oder der kürzesten Verbindung mit der Horizontalebene („lignes de la plus grande pente") zusammen, welch letztere wir künftig kurz als Abflusslinien bezeichnen werden. Dann steht also Folgendes fest:

Zwei Abflusslinien können sich niemals begegnen, verlaufen vielmehr asymptotisch, so dass ihnen sämtlich der nämliche unendlich entfernte Punkt zugehört.

Nun erhebt sich sofort die weitere Frage:

Gibt es unter den unendlich vielen Abflusslinien des nämlichen Gebietes eine, die man allen übrigen gegenüber individuell auszeichnen kann, der also eine Eigenschaft zukommt, die sich bei keiner Gefährtin findet?

Wenn eine solche Kurve existiert, so müssen wir eben ihr den Namen Thalweg zuerkennen, da die ihr gewöhnlich zugeschriebene Eigenschaft, alle Gewässer zu sammeln, vorläufig, so lange wir nur flächentheoretisch urteilen, nicht vorhanden ist. Und diese Frage ist es eben, welche eine kleine Litteratur in das Leben gerufen hat.

Als erster, soweit wir die Angelegenheit rückwärts verfolgen konnten, ist derselben Breton de Champ (s. o.) näher getreten, der in der erwähnten Abhandlung für Wasserscheide und Thalweg eine gemeinsame Differentialgleichung herzuleiten suchte. Die Gleichung der die Systeme I und II enthaltenden Fläche ist $z = f(x, y)$, und wenn dann in bekannter Weise $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial p}{\partial x} = r$, $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = s$, $\frac{\partial q}{\partial y} = t$ gesetzt wird, ergibt sich für die beiden eine Ausnahmestellung einnehmenden Linien die Gleichung $p^2 r + q^2 t = 2pqs$, aus der jedoch Topographie und Erdkunde keine für sie brauchbaren Folgerungen ziehen können. Nur kurz gibt nach dieser Seite

hin Breton de Champ einen wirklich verwertbaren Anhaltspunkt. Nimmt man zwei Nachbarpunkte A_1 und A_2 und legt in jedem derselben eine Tangentialebene an die Fläche, so bildet die Schnittlinie dieser beiden Ebenen mit $A_1 A_2$ einen Winkel, der alle möglichen Werte annehmen kann. Wenn dieser Winkel gleich einem rechten geworden ist, so hat die betreffende Linie die Thalweg-Eigenschaft. Das ist ganz zutreffend, aber es wird sich empfehlen, die entscheidende Definition nicht auf eine doch mehr nur nebensächliche Eigenschaft zu begründen.

Boussinesq nahm das Problem von neuem auf, und in einer Reihe von Aufsätzen,[1] die teilweise eine polemische Auseinandersetzung mit dem auf dem gleichen Arbeitsfelde thätigen C. Jordan[2] enthalten, hat er es allseitig untersucht und mannigfach gefördert. Er hielt sich, da ja die Abflusslinien im allgemeinen Kurven doppelter Krümmung sind, an deren Schmiegungsebene[3] und fragte, wie eine solche Kurve beschaffen sein müsse, damit eben diese Ebene unter allen Umständen senkrecht auf der XY-Ebene stehe. Die Gleichungen der Kurven, die man erhält, wenn man die Niveaulinien und ihre orthogonalen Trajektorien auf jene Ebene projiziert, sind bezüglich diese:

$$p\,dx + q\,dy = 0, \quad p\,dy - q\,dx = 0.$$

---

[1] Boussinesq, Sur une propriété remarquable des points où les lignes de plus grande pente d'une surface ont leurs plans osculateurs verticaux, et sur la différence qui existe généralement, à la surface de la terre, entre les lignes de faîte ou de thalweg et celles les long desquelles la pente du sol est un minimum; Compt. Rend., 73. Band, S. 1368 ff.; Sur les lignes de faîte et de thalweg, ebenda, 75. Band, S. 198 ff., S. 835 ff.

[2] C. Jordan, Sur les lignes de faîte et de thalweg, ebenda, 74. Band, S. 1457 ff.; Sur les lignes de faîte et de thalweg, reponse aux objections de M. Boussinesq, ebenda, 75. Band, S. 625 ff.; Nouvelles observations sur les lignes de faîte et de thalweg, ebenda, 75. Band, S. 1023 ff.

[3] Vgl. hiezu: Joachimsthal-Natani, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1881.

Die Gleichung

$$\frac{\partial\left(\frac{q}{p}\right)}{\partial x} \cdot p + \frac{\partial\left(\frac{q}{p}\right)}{\partial y} \cdot q = 0$$

stellt nach Boussinesq die Projektion des Thalweges dar.

Der Thalweg kann generell alle möglichen Gestalten annehmen, je nachdem eben die Krümmungsverhältnisse der Fläche, welcher er angehört, beschaffen sind. Für jene Flächen, die uns hier ausschliesslich beschäftigen, vereinfacht sich die von Boussinesq gegebene Begriffsbestimmung erheblich. Hier existiert nämlich eine Abflusslinie, deren Oskulationsebenen nicht allein sämtlich senkrecht auf der XY-Ebene stehen, sondern in eine einzige zusammenfallen. Demgemäss ist diese Linie eine ebene Kurve, ihre Vertikalprojektion gerade, und unter der erwähnten Beschränkung gilt die nachstehende Definition:

Gibt es eine Kurve in der Schaar der als Abflusslinien gekennzeichneten Raumkurven, welche ihrem ganzen Verlaufe nach in der nämlichen — vertikalen — Ebene liegt, so hat diese ein Anrecht auf den Namen Thalweg. Gegen ihn konvergiert jede einzelne Abflusslinie asymptotisch.

Diese Auffassung deckt sich auch mit dem von Breton de Champ (s. o.) angegebenen Merkmale, dass nämlich die Schnittlinie zweier Berührungsebenen, die in den Endpunkten einer unendlich kleinen Kurvensehne an die Fläche gelegt sind, zu der Sehne selbst senkrecht stehen soll. Die Durchschnittslinie verläuft eben horizontal, während die Ebene der Kurve vertikal steht.

C. Jordan hat (s. o.) sehr entschieden behauptet, dass sich Wasserscheide und Thalweg in nichts von anderen Kurven steilsten Abfalles unterschieden;[1]) ja es gäbe unter den letz-

[1]) Der Hinweis Jordans auf anomale Verhältnisse der Wasserscheide im Isèrethale ist ohne Beweiskraft, denn jeder Geograph weiss, wenn er sich blos der von Philippson und Supan untersuchten

teren überhaupt keine mit einer sie vor den anderen auszeichnenden Eigenschaft. Im vorliegenden Falle aber ist ein solches Individuum unzweifelhaft vorhanden. Boussinesq bedient sich in seiner Erwiderung eines ganz treffenden Bildes, indem er an den menschlichen Körpers erinnert. Die gewöhnlichen Abflusslinien seien den Venen, der Thalweg sei der Arterie vergleichbar. Gleichwohl, und obwohl er nach unserer Ansicht sich durchaus im Rechte befindet, hat sich Boussinesq zuletzt in ein Kompromiss mit Jordan eingelassen, welches aber nach keiner Seite hin zu befriedigen imstande ist.

Zu bedauern ist, dass kein Versuch gemacht ward, die allgemeinen Betrachtungen am speziellen Falle zu erläutern. Diese Lücke füllen wir dadurch aus, dass wir eine Fläche einfachster Natur in angriff nehmen, nämlich die eines Kreiszylinders, dessen Achse schief zur XY-Ebene liegt. Dass alsdann der Thalweg eine Gerade sein muss, erhellt sofort. Die Achse CA (Fig. 2) des Zylinders soll der XZ-Ebene angehören und mit der X-Achse den Winkel a bilden, während $r = CD = CE$ den Radius des Grundkreises bedeutet. Durch B, einen willkürlichen Punkt des Mantels mit den Koordinaten $BF = z$, $FG = y$, $CG = x$ sei ein Schnitt senkrecht zur Achse gelegt, der den Zylinder im Kreise HJ mit dem Zentrum A schneidet. Wird dann noch $AB = r$ gezogen und BK senkrecht auf $AL = AC \sin a$, so ergeben die beiden resp. in A und K rechtwinkligen Dreiecke BAC und BKA diese Beziehungen:

$$r^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + u^2,$$
$$r^2 = (x - u \cos a)^2 + y^2 + (u \sin a - z)^2.$$

Die Hilfsgrösse u lässt sich leicht eliminieren, und es resultiert als die gesuchte Gleichung der Zylinderfläche, wenn

Thalwasserscheiden erinnert, wie kompliziert und für die mathematische Erörterung unzugänglich die Gestaltung solcher Oertlichkeiten werden kann. Auf geometrische Singularitäten, die hier nicht berücksichtigt werden dürfen, macht auch aufmerksam Breton de Champ (Note sur les lignes de faîte et de thalweg, ebenda, 39. Band, S. 647 ff.).

wir nur das positive Wurzelvorzeichen berücksichtigen, die folgende:

$$z = \frac{1}{\cos a}(x \sin a + \sqrt{r^2 - y^2}).$$

Daraus ergibt sich, wenn wir auf die früheren Bezeichnungen zurückgreifen,

$$p = \operatorname{tang} a, \; q = -\frac{y}{\cos a \sqrt{r^2 - y^2}}, \; \frac{q}{p} = -\frac{y}{\sin a \sqrt{r^2 - y^2}}.$$

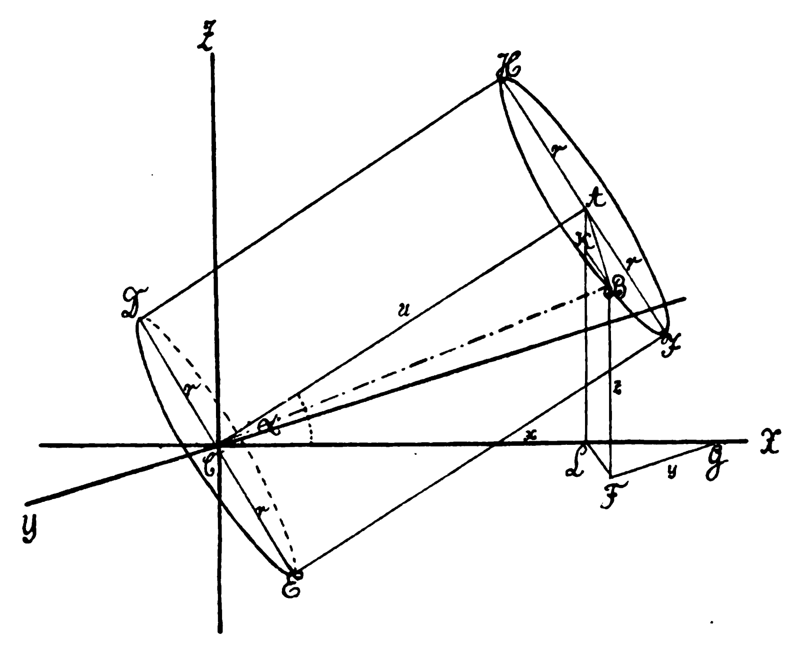


Fig. 2.

Die Gleichungen der Isohypsen sind:

$$z = \text{Konst.}; \; x = -\frac{1}{\sin a}\sqrt{r^2 - y^2} + C.$$

Wie man sieht, ist dies, indem ein schiefer Zylinderschnitt vorliegt, die Gleichung einer Ellipse, da man sie in die Form

$$x^2 \sin^2 a - 2Cx \sin^2 a + y^2 = r^2 - C^2 \sin^2 a$$

bringen kann. Sucht man nach Boussinesq die Gleichung des Thalweges, so erhält man, da die Ableitung von $\left(\frac{q}{p}\right)$ nach x gleich Null ist,

$$\frac{\partial\left(\frac{q}{p}\right)}{\partial x}\cdot p + \frac{\partial\left(\frac{q}{p}\right)}{\partial y}\cdot q = \frac{1}{\sin a \cos a}\cdot\frac{r^2 y}{(r^2 - y^2)^2} = 0.$$

Das kann nur eintreten, wenn y selbst Null wird, und die beiden Gleichungen des Thalweges sind $y = 0$, $z = 0$. In der That lehrt ein Blick auf die Figur, dass diese Linie mit der X-Achse zusammenfällt.

Um endlich auch noch den asymptotischen Verlauf der Horizontalprojektionen der Abflusslinien — und damit dieser selber — nachzuweisen, gehen wir auf die Gleichung $p\,dy - q\,dx = 0$ zurück. Wir finden durch Einsetzung

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sin a\sqrt{r^2 - y^2}}{y}, \quad x = -\sin a\int\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}\,dy + C'$$

und, mit Anwendung der hier bequemen Hyperbelfunktionen,

$$x = -\sin a\left(\sqrt{r^2 - y^2} - r\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{r}{y} + C''\right).$$

Für $y = 0$ wird der hyperbolische Arcus Cosinus, da $r:y$ der Unendlichkeit zustrebt, selbst unendlich gross, d. h. sämtliche Kurven treffen die X-Achse in ihrem unendlich entfernten Punkte. Hiemit ist also die Gesamtheit der topographisch bedeutsamen Aufgaben, zu deren Stellung die Frage nach der Natur des Thalweges Veranlassung gibt, an einer Fläche erledigt, die allerdings besonders einfache Verhältnisse gewährt, aber schon darum vorzuziehen ist, weil bei Flächen von nur etwas verwickelterer Gestalt die Sonderung der Variabeln und die Integration weit mehr Schwierigkeiten bereiten und auf völlig unübersichtliche Formeln führen.

Nunmehr handelt es sich darum, die mathematisch erzielten Ergebnisse in die Natur selbst zu übertragen, also alle die Vereinfachungen fallen zu lassen, welche notwendig waren,

um von den Hilfsmitteln der Mathematik Nutzen ziehen zu können. Da gilt denn zuerst der Erfahrungssatz:[1]) Was theoretisch als asymptotische Näherung erscheint, ist in der Natur gleichbedeutend mit der Thatsache, dass zwei konvergierende Wasseradern ihren Vereinigungspunkt möglichst weit abwärts verlegen. Zwei Flüsse, die sich vereinigen, laufen der Regel nach unter sehr spitzem Winkel gegen einander, ja sogar längere Zeit annähernd parallel, ehe die Vermischung ihrer Gewässer stattfindet. Dafür, dass es sich so verhält, bedarf es offenbar keines Beweises mehr; vielmehr liegt die unmittelbare Konsequenz einer allgemein erhärteten Wahrheit vor. Der Thalweg ist mithin jetzt ein wirklicher Wassersammler, und weil er dies ist, so eröffnet sich uns zugleich die Möglichkeit, eine alte und noch nicht ausgetragene geographische Streitfrage in ein neues Licht zu stellen.

Zuvörderst indessen soll noch vom Schnittwinkel des Thalweges mit den ihm zugeteilten Abflusslinien die Rede sein. Die Betrachtung eines beliebigen Flusssystemes, zumal in seinem Oberlaufe, auf der Karte vergewissert über die Richtigkeit und das generelle Vorkommen der Konvergenz unter kleinem Winkel. Wissenschaftliche Ueberlegungen aber scheint daran als der erste Peschel geknüpft zu haben,[2]) dem es bei seinen

[1]) Vgl. hiezu Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 813. Boussinesq drückt den Gegensatz in der zweiten seiner oben genannten Abhandlungen mit folgenden Worten aus: „Le thalweg est une ligne, à laquelle, sur tous les points de son parcours, viennent se réunir, en toute rigueur, ou de moins asymptotiquement, des lignes de plus grande pente qui en étaient d'abord à des distances sensibles.“

[2]) Peschel, Neue Probleme der vergleichenden Erdkunde, Leipzig 1878, S. 141 ff.; Peschel-Leipoldt, Physische Erdkunde, 2. Band, Leipzig 1883, S. 472 ff. Die von Peschel geltend gemachte Ursache ist freilich nicht die wahre, und wenn er mit Reclus (La Terre, 1. Band, Paris 1874, S. 443) hervorhebt, dass die Geschiebeführung den spitzen Winkel der Flussannäherung bedinge, so stellt er eine Behauptung auf, von der gemeiniglich sogar, wie wir bald erfahren werden, das Gegenteil als zutreffend anerkannt werden muss.

vergleichenden Kartenstudien, die eben doch auch in diesem Falle sich als nicht wertlos dokumentieren, auffiel, wie in manchen Ländern der Treffpunkt zusammengehöriger Flüsse weit hinausgeschoben wird. Ein besonders drastisches Beispiel bieten die Stromgebiete Nordamerikas zwischen Alleghanies und Atlantischem Ozean; ferner sind sehr geeignete Demonstrationsobjekte der Amazonenstrom und der Po. Man überzeuge sich nur auf der Karte, wie Tanaro, Ticino, Adda, Parma, Oglio, Mincio, deren Lauf ursprünglich ein meridionaler ist, allmählich gegen den Thalweg des grossen oberitalienischen Bassins, gegen den Po, hin umbiegen, um sich förmlich seiner Laufrichtung anzupassen. Gerade für die lombardisch-venetianische Tiefebene trifft auch zu, was Wisotzki, dessen Monographie uns noch weiterhin beschäftigen wird, über solche seitliche Flüsse bemerkt,[1]) die den Hauptfluss nicht mehr selbst treffen. „Auch selbständig das Meer erreichende Flüsse sind als Nebenflüsse zu bezeichnen, sobald sie eine mit anderen Nebenflüssen des betreffenden Systemes gleichartige Lage besitzen.“ So sind Reno und Panaro auf der rechten, Brenta und Piave auf der linken Seite des Po als Nebenflüsse dieses letzteren anzusehen, und erst recht gilt ein Gleiches für die Etsch, deren unterste Laufstrecke dem Po vollkommen parallel gerichtet ist. In Hochwasserzeiten, wenn die Wasserläufe über ihre nur schwach profilierten Betten übergreifen, bilden diese zusammengehörigen und da und dort ohnehin durch Altwasser und Kanäle Verbindung unterhaltenden Flüsse nur eine einzige, zusammenhängende Wasserfläche, so wie dies auch Nissen[2]) weiter oberhalb für die von Tanaro und Po gebildete Halbinsel bezeugt. Oberitalien ist überhaupt das klassische Land für die Erkenntnis hydrographischer Thatsachen, wie denn auch die wissenschaftliche Wasserbaukunde daselbst ihren natürlichen Ursprung hatte. So wäre insbesondere auch auf den Lago d'Orta zu verweisen, den einzigen unter den südalpinen

---

[1]) Wisotzki, Hauptfluss und Nebenfluss; Versuch einer begrifflichen Nachbildung derselben, Stettin 1889, S. 136.

[2]) Nissen, Italische Landeskunde, 1. Band. Berlin 1883, S. 186.

Binnenseen, der sich gegen Norden entwässert.[1]) Sein Abfluss geht der selbst von Norden kommenden Toce direkt entgegen und erfährt erst kurz vor der Vereinigung mit ihr eine Ablenkung nach Osten, so dass er sie in der mehrerwähnten Weise trifft und kurz vor der Mündung in den Langen-See verstärkt. In Fig. 3 kann man diesen abnormen entgegengesetzten Parallelismus eines Hauptflusses und des ihm zustrebenden Nebenflusses konstatieren.

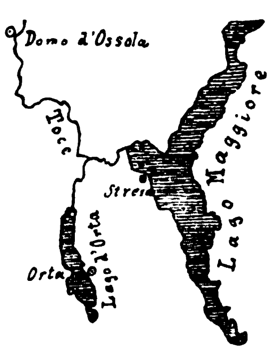


Fig. 3.

Mit der Sedimentablagerung, deren Wirkung Peschel als Ursache im Auge hatte, steht die Abwärtsverlegung des Einmündungspunktes nicht in kausalem Zusammenhange, wenngleich dieselbe hie und da eingreifen mag.[2]) Dieses Moment fällt sogar gemeiniglich im entgegengesetzten Sinne in die Wagschale. Wenn manchmal der thatsächliche Befund hinsichtlich des Einmündens eines Flusslaufes in den Thalweg ein ganz anderer ist, als nach der topographischen Regel erwartet werden sollte, so ist daran in erster Linie schuld, dass die Einmündungsstelle durch die Anhäufung von

---

[1]) De Agostini, Il Lago d'Orta, Turin 1895.

[2]) Auf eine anderweite Möglichkeit, die jedoch wohl nicht allzu häufig zu konstatieren sein wird, weist Henkel hin (Ueber das Umbiegen von Nebenflüssen in der Nähe der Mündung, Petermanns Geograph. Mitteil., 35. Band, S. 176 ff.). Es ereignet sich nämlich, dass der Nebenfluss ein Rinnsal benützt, welches in geologischer oder prähistorischer Vorzeit von dem Hauptstrome eingenommen war, der dann aus irgend einem Grunde einer Laufänderung unterlag. So verhält es sich bei der Vereinigung der Ohre mit der Elbe in der Nähe Magdeburgs; ersteres Flüsschen strömt jetzt in einem Bette dahin, das einen alten Elbearm darstellt, und dass dieser sich dem Hauptarme unter sehr spitzem Winkel nähern musste, ist an und für sich einleuchtend, da ja alle Strominseln von grösserer Ausdehnung eine längliche Gestalt besitzen oder doch ursprünglich besassen.

Sinkstoffen stromaufwärts gedrängt wird. Es wird dies besonders dann eintreten, wenn die Flussmündung den Charakter eines Deltas an sich trägt, und wenn der sich in den grösseren ergiessende kleinere Fluss reich an mitgeführten Feststoffen ist, während der erstere, wie hier der regulierte Rhein, sich dieses Ballastes zum grossen Teile bereits früher entledigt hat. So hat Naeher[1]) für den Einlauf des Neckars in den Rhein eine durch Geschiebeaufschüttung bedingte Verlegung dieser Oertlichkeit dargethan und für den Einlauf des Mains wenigstens wahrscheinlich gemacht. Das Neckardelta bei Mannheim hat sich noch in historischer Zeit beträchtlich vergrössert und die Gewässer des Flusses südlich abgedrängt. Natürlich kommt, da auf der konkaven Uferseite Sedimentation, auf der konvexen dagegen Erosion stattfindet, sehr viel darauf an, welche dieser Seiten in betracht fällt, und es ist nicht möglich, eine allgemeine Norm aufzustellen. Soviel aber darf unter allen Umständen als gesichert gelten, dass, wenn das durch das geometrische Verhalten der Abflusslinien gegebene Naturgesetz irgendwo eine Trübung oder totale Verwischung erfährt, in der Geschiebe- und Schlammführung des jener Abflusslinie folgenden Wasserlaufes die Hauptursache der anscheinenden Anomalie zu suchen ist.

Nachdem diese bisher viel zu wenig beachtete geographische Frage ihre Erledigung gefunden hat, wenden wir uns einer zweiten, mit ihr verwandten zu. Ohne Bedenken verwendet man zumeist die schon aus dem ersten Unterrichte geläufigen Begriffe Hauptfluss und Nebenfluss, ohne viel danach zu fragen, ob dieselben auch eine Formulierung zulassen, welche hinlänglich allgemein wäre, um dann, wenn irgend ein besonderer Fall der Klärung bedarf, diese herbeiführen zu können. Die uns bereits (s. o.) bekannte Schrift von Wisotzki leistet in dieser Hinsicht Alles, was mit den gewöhnlichen, rein geographischen Mitteln geschehen konnte.

[1]) Naeher, Ueber den Kulturzustand des oberen Rheinthales zur Römerzeit, Zeitschr. f. wissenschaftl. Geogr., 2. Jahrgang, S. 179.

und muss sich ebendeshalb mit einem Resultate bescheiden, welches nicht als ein vollkommen befriedigendes erscheinen kann, weil danach die Feststellung, ob ein gegebener Fluss der einen oder anderen Kategorie zuzuordnen sei, von einer ganzen Anzahl von Faktoren abhängen soll. Wisotzki durchmustert eine sehr stattliche Litteratur, welche bereits bei den Schriftstellern des XVIII. Jahrhunderts beginnt. Es zeigt sich, dass unter den Methodikern eine gewisse Verwirrung eingerissen ist, weil dieselben teilweise dem rein zufälligen Umstand der einmal bestehenden Nomenklatur zu viel Rechnung getragen haben. Es ist ja freilich nicht daran zu denken, dass man einer in die Denkweise der ganzen gebildeten Welt aufgenommenen Namengebung entgegentreten könnte; Roskoschny betont dies[1]) mit Recht anlässlich der von russischen Forschern vertretenen Meinung, dass eigentlich die Oka und Wolga ihre Rollen als Neben- und Hauptfluss zu tauschen hätten. Allein diese Rücksicht auf das Herkommen, welches sich ohnehin nicht mehr verändern liesse, darf doch nicht verhindern, der prinzipiellen Seite des Problemes gerecht zu werden, was denn auch Wisotzki mit allem Ernste anstrebt. Allein seine allseitig ausgreifende Untersuchung wird zwar, soweit es sich um die Bekämpfung unstichhaltiger Kriterien handelt, als mustergiltig anerkannt werden müssen, nicht aber ebenso bezüglich der von ihm am Schlusse aufgestellten These:[2]) „Als charakteristisches, unterscheidendes Merkmal erweist sich allein die Lage, in ihrer vertikalen wie horizontalen Erscheinung, unter steter Berücksichtigung der Gesamtverhältnisse des betreffenden Gebietes.“ Dieses Merkmal ist, so wenig auch sachlich gegen die Einzelheiten des Satzes einzuwenden sein mag, denn doch ein viel zu unbestimmtes.[3]) Wir halten dafür,

---

[1]) Roskoschny, Die Wolga und ihre Zuflüsse; Geschichte, Ethnographie, Hydro- und Orographie, Leipzig 1887, S. 268.

[2]) Wisotzki, a. a. O., S. 136.

[3]) Auch die Bezeichnung Quellflüsse leidet unter dieser Unbestimmtheit. So ist ohne allen Zweifel der Hinterrhein ein Nebenfluss des strenge den Thalweg einhaltenden Vorderrheins, und die Eigenschaft,

dass unsere geometrischen Ergebnisse eine viel bestimmtere, ja sogar eine ganz eindeutige Fassung gestatten; hat nämlich, wie wir mit Boussinesq gegen Jordan es vertraten, der Thalweg wirklich eine ihn vor allen Abflusslinien auszeichnende Eigenart, so dürfen wir behaupten:

Der Thalweg eines Stromgebietes ist immer mit dem Hauptstrome desselben identisch, und die übrigen Abflusslinien bezeichnen die Bahnen der Nebenflüsse.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass auch die Zu- und Beiflüsse, überhaupt alle Wasserläufe, die irgendwie einem grösseren Strome tributär sind, in dieser Definition mit einbegriffen werden können. Der Nebenfluss hat eben sein besonderes Untersystem, für welches er selbst den Thalweg abgibt, und in gleicher Weise zerfällt auch dieses sekundäre Gebiet wieder in Teilgebiete.

Allein so klar das Wort Thalweg unseren Ermittelungen zufolge ist, wenn eine geometrische Hohlfläche vorliegt, so wenig scheint dasselbe Wort sich bestimmt fassen lassen zu wollen, sobald man zu den Stromgebieten der Erdoberfläche übergeht, die ja selbst wieder einen ganz ungeregelten Wechsel von Erhöhungen und Vertiefungen wahrnehmen lassen. Sowie wir jedoch die Eigenschaft des Thalweges zur Richtschnur nehmen, dass seine Horizontalprojektion eine gerade Linie ist, schwindet jene Schwierigkeit, und wir sehen uns so ganz von selbst zu einer zumeist allen Zweifel ausschliessenden Definition geführt:

Als Hauptstrom oder Thalweg ist beim Zusammentreffen zweier Flussrinnen diejenige anzusprechen, welche am wenigsten von einer geraden Linie abweicht und insbesondere auch an der Vereinigungs-

der eigentliche Rhein zu sein, kann dem sogenannten Vorderrhein auch dadurch nicht genommen werden, dass, wie auch Rein (a. a. O.) bemerkt, der Hinterrhein, vermöge seines grösseren Gefälles, die Gewässer des ersteren bei der Konfluenzstelle in Reichenau ganz und gar bei Seite drängt und so den Eindruck erweckt, als stelle er das namhaftere Kontingent zum Gesamtstrome.

stelle die geringste Ablenkung von ihrer bisher eingehaltenen Richtung erleidet.

Hiezu eine bestimmte Stellung zu nehmen, ist in der Regel durchaus nicht schwierig, indem weiter nichts als eine gute Karte erfordert wird. Die bisherige Lauflänge, deren genaue Feststellung zu den schwierigsten Pflichten der Kartenkunde gehört, tritt gegen das Moment einer möglichst wenig gestörten Geradlinigkeit ganz in den Hintergrund, und nicht anders verhält es sich mit der Wasserfülle, die auch nicht zu den leicht zu ermittelnden Grössen gehört. Wollte man auf alle diese Dinge als auf massgebende Elemente bedacht nehmen, so würde die Entscheidung darüber, ob ein Fluss den Haupt- oder Nebenflüssen zuzuzählen sei, eine sehr verwickelte und in unzählig vielen Fällen, wenn z. B. ferne und wenig erforschte Länder in betracht kommen, so gut wie unlösbare Aufgabe werden. An der Hand unseres obigen Kriteriums ist hingegen diese Entscheidung unverhältnismässig leichter zu treffen. Auffallen kann es nicht, dass auch früher schon gelegentlich dieser Punkt mehr oder weniger scharf betont worden ist, doch verzichten wir auf die Häufung von Belegen, da doch zumeist der Standpunkt, von dem aus man die Sache ansah, ein anderer war.

Wohl aber sei an zwei weitbekannten und viel erörterten Beispielen erläutert, dass die Uebertragung des von hause aus rein geometrischen Begriffes des Thalweges den Sachverhalt zutreffend darstellt. Schon alt ist die Alternative: Soll von Passau ab Donau oder Inn die Berechtigung erhalten, als Hauptfluss respektiert zu werden? C. Gruber gedenkt[1]) einlässlich früherer Meinungsäusserungen über diese strittige Frage der bayerischen Hydrographie. Gegen Ende des XVIII. Jahrhunderts erschienen zwei Reisebeschreibungen,[2]) deren eine

[1]) C. Gruber, Die landeskundliche Erforschung Altbayerns im XVI., XVII. und XVIII. Jahrhundert, Stuttgart 1894, S. 56 ff.

[2]) Gercken, Reise durch Schwaben und Bayern, 1. Teil, Stendal 1783, S. 57; Briefe eines reisenden Franzosen über Deutschland an seinen Bruder zu Paris, 1. Band, Zürich 1785, S. 171. Erstgenannter tritt für den Inn ein; der Anonymus ist der Verteidiger des Vorranges der Donau.

ebenso entschieden für das Recht des Inns eintrat, wie sich die andere zu gunsten der Donau erklärte. Sehr eingehend, und unter Anrechnung aller der Momente, die sich in das Gefecht führen lassen, hat neuerdings Penck[1]) der herkömmlichen Anschauung ihre Begründung gegeben, indem er namentlich auch darauf Gewicht legte, dass das Entwässerungsgebiet der oberen Donau, wenn wir diese bei ihrem Eintritte in österreichisches Gebiet enden lassen, an Arealgrösse dasjenige des Inns nicht unbeträchtlich übertrifft. An Wassermenge sind die beiden Flüsse fast gleich, doch wiegt auch da die Donau ein wenig vor. Jedenfalls behält letztere ihre Richtung, der Hauptsache nach, wiewohl sie in Oberösterreich viele und starke Krümmungen macht, ungleich entschiedener als der Inn bei, der — kurz vor Passau allerdings in dem bekannten spitzen Winkel scharf umbiegend — eine fast rechtwinklige Knickung erleidet. Zum zweiten mögen Mississippi und Missouri unserem Merkmale unterstellt werden. Hier kann es nun gar keinem Zweifel unterliegen, dass dem ersteren, dessen Quelle hart an der kanadischen Grenze zu suchen ist, bis zum Zusammenflusse bei St. Louis eine weit geringere Lauflänge eignet als dem Missouri zwischen den Black Hills und jener Stadt; ebenso führt dieser letztere, durch den Yellowstone River und andere Seitenflüsse verstärkt, mehr Wasser mit sich. Trotzdem hat die Volksstimme ganz recht gethan, den Mississippi zum Hauptstrome zu erheben, dessen Lauf bis zur Vereinigung und auch nachher strenge die meridionale Richtung einhält, wogegen den Missouri das Schicksal des Inns in noch erhöhtem Masse betrifft. So beurteilt den Sachverhalt auch Wisotzki, der nebenher auch noch mit der Thatsache rechnet, dass die beiden geneigten Flächen, welche von den Appalachen auf der einen Seite, von den Felsengebirgen auf der anderen Seite ausgehen, sich im Mississippithale begegnen.[2]) Damit ist der Fluss selbst eben wieder recht ausgesprochen als ein Thalweg charakterisiert.

[1]) Penck, Die Donau. Wien 1891, S. 12 ff.

[2]) Wisotzki, S. 110 ff.

Ein drastischer Fall von Nichtübereinstimmung zwischen unserer Begriffsfestsetzung und der landläufigen Geographie tritt uns entgegen, wenn wir unser Augenmerk auf Rhône und Saone lenken. Mit Bezug auf diese beiden Flüsse sucht E. Reclus[1]) die Schwierigkeit einer bündigen Regel klar zu machen; wäre, so meint er, die relative Geradlinigkeit entscheidend, so wäre ebenso der Rhône ein Nebenfluss der Saone, wie die Seine ein Nebenfluss der Yonne. Hätte man vor Zeiten die Yonne als Hauptfluss anerkannt, so würde auch in der That Jedermann damit zufrieden gewesen sein. Allein der Sieg der an sich minder richtigen Namenzuteilung ist einmal in diesem, wie auch in dem Falle Rhône-Saone entschieden. Dass übrigens auch erst in jüngerer historischer Zeit Veränderungen in der Bezeichnung von Flussstrecken sich ergeben, zeigt uns die Salzach in ihrem obersten Laufe.[2]) Hier hat sich ganz von selbst im Verlaufe weniger Jahrzehnte die — im Sinne der vorstehenden Darlegungen — richtigere Auffassung zur Geltung gebracht, und man betrachtet jetzt als oberste Salzach denjenigen der beiden sich nahe bei Krimml vereinigenden Flussäste, welcher annähernd geradlinig dahinzieht, mag auch sein Wasserreichtum der zweifellos geringere sein.

Diese Studie hat ausgesprochenermassen nicht den Zweck, eine neue Inangriffnahme strittiger Fragen, eine Revision des onomatologischen Besitzstandes der Geographie in Anregung

---

[1]) E. Reclus, La Terre, 1. Band, Paris 1874, S. 341. Wer hinwiederum die Lauflänge zum alleinigen Massstabe erheben wollte, der müsste sowohl Saone als auch Rhône als Tributäre des Doubs erklären, dessen sonderbare Krümmung ihm eine sehr ansehnliche Erstreckung verleiht.

[2]) Vgl. Schjerning, Der Pinzgau; Physikalisches Bild eines Alpengaues, Stuttgart 1897, S. 69. „Fast alle Reiseberichte aus dem vorigen Jahrhundert lassen die Salzach am Krimmler Tauern entspringen." Der Autor ist geneigt, sich auf den gleichen Boden zu stellen, während doch die von ihm als oberster Salzachlauf angesprochene Krimmler Ache ganz offenkundig aus einem Seitenthale kommt. Ein Beleg mehr dafür, wie notwendig eine erneute Prüfung dessen war, was man unter Thalweg und Hauptthal zu verstehen habe.

bringen zu wollen. Sie ging vielmehr lediglich darauf aus, darzuthun, dass die zutreffende Fixierung gewisser Begriffe, bezüglich deren sich ein Gebrauchsrecht herausgebildet hat, schliesslich doch nur durch eine theoretische Behandlung, bei welcher möglichst die geometrische Gesetzmässigkeit zur Norm genommen wird, in einwurfsfreier Weise erzielt werden kann. Hier also kam es darauf an, für die schwankende Bedeutung des Wortes Thalweg eine ganz sichere Grundlage zu gewinnen und im Anschlusse daran auch die Beziehungen zwischen Haupt- und Nebenfluss derart festzulegen, dass für dieselben nicht mehr eine Vielzahl sich häufig widersprechender Faktoren, sondern nur ein einziges Kriterium massgebend sein soll. Nebstdem erwies es sich als möglich, für das hydrographische Gesetz der Konvergenz zweier Wasserläufe eine ausschliesslich von topologischen Gesichtspunkten ausgehende Begründung zu erhalten.

Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 1. Februar.*)

Bei Gelegenheit von Untersuchungen über Strahlungen, welche von den Elektroden einer zu Drucken von 0,2 bis 2 mm evakuierten Röhre ausgehen, wenn man den Elektroden Hertz'-sche Schwingungen zuführt, legte mir die Beobachtung der Empfindlichkeit,[1]) mit der diese Strahlungen auf kleine Veränderungen in der Zuleitung reagieren, den Gedanken nahe, diese photographisch ausserordentlich wirksamen Strahlungen zu einer Methode der elektrischen Fernphotographie zu benützen.

Bei allen solchen Methoden handelt es sich darum, im Geber Lichtintensitäten in Stromintensitäten und im Empfänger umgekehrt Stromintensitäten in Lichtintensitäten umzusetzen (oder in Strahlungen, welche photographisch wirksam sind).

Das Princip des Gebers beruht, wie bei allen in ähnlicher Richtung bereits gemachten Versuchen,[2]) auf der Eigenschaft des Selens, durch Belichtung seinen ausserordentlich grossen elektrischen Widerstand teilweise zu verlieren; das Grundprincip des von mir konstruierten E m p f ä n g e r s beruht auf folgender Erscheinung:

---

[1]) Annalen der Physik (4) 5 S. 136 „Ueber die helle J-Fläche Jaumanns.

[2]) Eine gute historische Uebersicht über solche Versuche findet man in den Schriften von Liesegang (Ed. Liesegangs Verlag, Düsseldorf).

Schaltet man in die Leitung von einem Teslapole zu einer Elektrode einer zu 0,2 bis 2 mm Druck evakuierten Röhre (deren zweite Elektrode zur Erde abgeleitet ist) eine Funkenstrecke ein, so kann man durch Aenderung dieser Funkenstrecke die Intensität der in der Röhre auftretenden Strahlungen regulieren. Bei zu tiefem Druck in der Röhre gehen die Hertz'schen Schwingungen nicht mehr durch die Röhre (wenn man die excitierenden Funken des Teslaapparates nicht sehr gross macht), und bei zu hohen Drucken sind die Strahlungen zu schwach, so dass für die hier angestrebten Verwendungen ein Druck von 0,2 bis 2 mm am geeignetsten ist.

Um nun die Funkenstrecke durch die vom Geber kommenden elektrischen Ströme zu regulieren, wird ein astatisches Multiplikator-Galvanometer benützt; der Coconfaden, an dem das astatische Nadelpaar hängt, wird verkürzt und in demselben ein kleines Kautschukstäbchen eingeschaltet, das in der Mitte eine zu dem Stäbchen senkrechte Messingnadel mit umgebogener Spitze trägt; der Spitze gegenüber wird eine feste Nadel aufgestellt, die bewegliche Nadel wird mit dem Teslapole, die feste mit der Elektrode der Röhre verbunden. Je nach der Intensität des vom Geber kommenden und durch den Multiplikator gehenden Stromes wird die Funkenstrecke zwischen der festen und der beweglichen Nadel kleiner oder grösser und entsprechend die Strahlung in der Röhre mehr oder weniger intensiv.

Wenn man im Geber zwischen einer Lichtquelle und einer Selenzelle eine photographische Platte (oder Film) zeilenweise vorbeizieht, so wird ein durch die Zelle und den Multiplikator im Empfänger geleiteter Strom je nach den helleren und dunkleren Stellen des Bildes abwechselnd grösser und kleiner werden und in der Röhre des Empfängers abwechselnd mehr oder weniger intensive Strahlungen erzeugen. Wenn man die Röhre mit Staniol und schwarzem Papier überklebt und nur ein kleines Fenster freilässt, können auf photographischem Papier, das an dem Fenster ähnlich wie eine Phonographenwalze an der Membran vorbeiläuft, jene Strahlungen das Bild des Gebers reproducieren.

Eine eingehende Beschreibung eines nach diesen Principien konstruierten Apparates werde ich demnächst an anderer Stelle geben, es sei hier nur ein Punkt noch besonders hervorgehoben: Zur Erzeugung der Strahlungen in der evakuierten Röhre können nicht etwa Schwingungen gebraucht werden, welche direkt z. B. von den Funken einer Influenzmaschine erzeugt werden, weil in diesem Falle die bewegliche Nadel, durch welche die Leitung zur Röhre geht, grösseren elektrostatischen Wirkungen ausgesetzt wäre und die von ihr verlangte Funktion nicht erfüllen könnte; aus diesem Grunde sind grade zur Erzeugung der Strahlungen die Hertz'schen Schwingungen gewählt, wie sie durch die sog. Teslaströme geliefert werden.



Das Problem der conformen Abbildung für eine specielle Kurve von der Ordnung $3n$.

Von **Newel Perry.**

(Eingelaufen 1. Februar.)

§ 1.

Die Gleichung einer circularen Kurve dritter Ordnung in der Ebene $t = u + iv$ ist:

$$t t_1 (a t + a_1 t_1 + \beta) + \gamma t^2 + \gamma_1 t_1^2 + \delta t + \delta_1 t_1 + \varepsilon = 0, \quad (1)$$

wobei $t_1 = u - iv$ gesetzt ist.

Macht man die Transformation

$$t = \varphi(z), \text{ wo}$$

$$\varphi(z) \equiv z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n, \quad (2)$$

so erhält man in der Ebene $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ eine „n-fach circulare" Kurve von der Ordnung $3n$, nemlich:

$$\varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1) \cdot [a \varphi(z) + a_1 \varphi_1(z_1) + \beta] + \gamma \cdot \varphi^2(z) + \gamma_1 \varphi_1^2(z_1) + \delta \varphi(z) + \delta_1 \varphi_1(z_1) + \varepsilon = 0. \quad (3)$$

Im Anschlusse an eine von Herrn Lindemann gegebene Methode,[1]) nach der Herr Göttler die Kurve (1) behandelt hat,[2]) habe ich in meiner Inaugural-Dissertation[3]) die Kurve (3)

[1]) Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie d. Wiss. 1895 und 1896; Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., Bd. 32, 1894.

[2]) Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie d. Wiss. 1900.

[3]) Das Problem der conformen Abbildung für eine specielle Kurve von der Ordnung $3n$. München 1901.

näher untersucht und gezeigt, dass das Problem der conformen Abbildung für ein von einer derartigen Kurve begrenztes Flächenstück immer mit Hilfe einer integrierbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden kann, wenn bei Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned} 2 + 2\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i + \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - 2) - 2s + \sum_{i=1}^{\mu} (a_i - 1) \\ + \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\beta_i - 1}{2} - \sigma + \pi = 0 \text{ ist.}^{1)} \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin sind die Constanten $\varkappa_i$, λ_i, a_i, β_i, s, σ, π durch folgende Festsetzungen erklärt.

Wenn die vier Brennpunkte der Kurve (1) $t = a_1$, $t = a_2$, $t = a_3$, $t = a_4$ von einander verschieden sind, so sei

$$\begin{aligned} R(z) &= [\varphi(z) - a_1][\varphi(z) - a_2][\varphi(z) - a_3][\varphi(z) - a_4] \\ &= \prod_{i=1}^{i=\nu''} (z - h_i)^{\lambda_i}, \text{ wo } \nu'' \leqq 4n, \; \Sigma\lambda_i = 4n. \end{aligned}$$

Hat jene Kurve aber einen Doppelpunkt, so sei $a_1 = a_2 = a$; und es wird:

$$\varphi(z) - a = \prod_{i=1}^{n'} (z - g_i)^{\tau_i}$$

$$R(z) = \prod_{i=1}^{n''} (z - h_i)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i=1}^{n'} (z - g_i)^{2\tau_i},$$

wobei

$$n' \leqq n; \; n'' < 2n; \; \Sigma\lambda_i = 2n; \; \Sigma\tau_i = n.$$

Es ist $n' = n$, wenn alle τ_i gleich 1 sind, ebenso $n'' = 2n$, wenn alle λ_i gleich 1 sind. Die Constanten $\varkappa_i$ sind durch die Gleichung

$$\varphi'(z) = \prod_{i=1}^{\nu'} (z - q_i)^{\varkappa_i}, \text{ wo } \nu' \leqq n - 1, \; \Sigma\varkappa_i = n - 1$$

definirt, welche die Brennpunkte der Kurve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung (3) bestimmt.

---

[1]) Inaug.-Diss. Gleichung (22) pag. 23.

Die Zahl σ gibt an, durch wie viele Windungspunkte der t-Ebene (entstanden durch die Beziehung $t = \varphi(z)$) die Kurve (1) hindurchgeht ($\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ oder $n-1$), während τ solche Windungspunkte noch in den Brennpunkten a_1, a_2, a_3, a_4 liegen können. Die Kurve (3) hat dann σ Doppelpunkte, τ andere zweifache Brennpunkte und $4n - 2\tau$ einfache Brennpunkte.

Hat aber die Kurve (1) einen Doppelpunkt, so hat die Kurve (3) $\sigma + n$ Doppelpunkte, τ andere zweifache Brennpunkte und $2n - 2\tau$ einfache Brennpunkte.

Liegt der Doppelpunkt von (1) in einem Windungspunkte, so hat die Kurve (3) $n + \sigma - 2$ Doppelpunkte, und an einer andern Stelle noch zwei zusammenfallende Doppelpunkte.

Die Zahlen α_i, β_i und π beziehen sich auf die Winkel, welche in den Verzweigungspunkten bei der Abbildung auf die Halbebene zu berücksichtigen sind.

Ist die Bedingung (4) nicht erfüllt, so führt folgender Weg zum Ziel.

Die Gleichung (3) ergab durch Differentiation

$$\frac{\varphi'(z) \cdot z'}{\sqrt{R(z)}} = -\frac{\varphi_1'(z_1) \cdot z_1'}{\sqrt{R_1(z_1)}}. \tag{5}$$

Hiebei ist:

$$\begin{aligned} R(z) = \; & \alpha^2 \varphi^4(z) + \varphi^3(z) \cdot [2\alpha\beta - 4\alpha_1\gamma] \\ & + \varphi^2(z)[\beta^2 + 2\alpha\delta_1 - 4\alpha_1\delta - 4\gamma\gamma_1] \\ & + \varphi(z) \cdot [2\beta\delta_1 - 4\alpha_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta] \\ & + (\delta_1^2 + 4\gamma_1\varepsilon). \end{aligned}$$

Setzt man

$$s' = \frac{ds}{dZ} = \frac{\varphi'(z)\, z'}{\sqrt{R(z)}},$$

so ist nach Gleichung (5)

$$s' = -s_1'.$$

Man erhält leicht:

$$\frac{d^2}{dZ^2}[\log s'] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dZ}\log s'\right]^2 = \frac{d^2}{dZ^2}[\log s_1'] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dZ}\log s_1'\right]^2.$$

Setzt man noch:

$$\{s, Z\} = \frac{d^2}{dZ^2}[\log s'] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dZ}\log s'\right]^2,$$

so ist $\{s, Z\}$ die bekannte Schwarz'sche Funktion, die bei der Abbildung eines Kreisbogenpolygons auftritt.

$\{s, Z\}$ ist also eine Funktion, welche für reelle Werte von Z reell ist, solange z einen Punkt der Kurve (3) bezeichnet.

Berechnet man $\frac{d}{dZ}[\log s']$ und $\frac{d^2}{dZ^2}[\log s']$, so ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned}\{s, Z\} = {} & \frac{\varphi'''}{\varphi'}z'^2 - \tfrac{3}{2}\cdot\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}z'^2 + \frac{z'''}{z'} - \tfrac{3}{2}\frac{z''^2}{z'^2} \\ & - \tfrac{1}{2}\frac{R''}{R}z'^2 + \tfrac{3}{8}\frac{R'^2}{R^2}z'^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\cdot\frac{R'}{R}z'^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Hiebei ist $\varphi''' = \frac{d^3\varphi(z)}{dZ^3}$ u. s. w.; $z''' = \frac{d^3 z}{dZ^3}$, dagegen $R'' = \frac{d^2 R(z)}{dz^2}$ u. s. w.

§ 2.

Die Pole der Funktion $\{s, Z\}$ sind offenbar die Nullpunkte der Funktionen φ und R, d. h. die früher mit $z = q_i$, $z = h_i$ und $z = g_i$ bezeichneten Punkte, welche im Innern oder am Rande des betrachteten Flächenstückes liegen.

Die Funktion $\frac{d}{dZ}[\log s']$ ist identisch mit der in der Inaugural-Dissertation in Gleichung (11 a) und (11 b) definierten Funktionen $F(z, Z)$. Dort sind im zweiten Kapitel die Pole von $F(z, Z)$ in den Abschnitten I bis VIII untersucht, und es ist die analytische Darstellung von $F(z, Z)$ in der Nähe der Pole bereits gegeben.

Es hat sich gezeigt, dass $F(z, Z)$ nur Pole erster Ordnung besitzt und als Funktion von Z in der Nähe eines jeden Poles $Z = K$ somit die Darstellung hat

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{k}{Z-K} + k_0 + k_1(Z-K) + \ldots \tag{7}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2}{dZ^2}[\log s'] = \frac{-k}{(Z-K)^2} + k_1 + 2k_2(Z-K) + \ldots$$

und:

$$\left[\frac{d}{dZ}\log s'\right]^2 = \frac{k^2}{(Z-K)^2} + \frac{2kk_0}{Z-K} + (k_0^2 + 2kk_1)$$
$$+ 2(k_0 k_1 + kk_2)\cdot(Z-K) + \ldots,$$

folglich:

$$\{s, Z\} = -\frac{k}{2}(k+2)\cdot\frac{1}{(Z-K)^2} + \frac{k'}{Z-K} + \mathfrak{P}(Z-K). \quad (8)$$

Hiebei ist $k' = -kk_0$. Ist also das Residuum in irgend einem Pol der Funktion $\frac{d}{dZ}[\log s']$ bekannt, so ist auch das zweite Residuum der Funktion $\{s, Z\}$ in diesem Pole gegeben, dagegen ist das erste Residuum dieser letzteren Funktion eine unbestimmte Constante k'.

I. Liegt ein Punkt $z = q_i$, welcher nicht mit einem Punkt g_i oder h_i zusammenfällt, im Innern des betrachteten Flächenstückes und ist die komplexe Zahl $Z = A_i$ sein Bild, so haben wir (nach Inaug.-Diss. 13b) die Darstellung

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\varkappa_i}{Z-A_i} + \mathfrak{P}(Z-A_i),$$

folglich ist nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = -\frac{\varkappa_i}{2}(\varkappa_i + 2)\cdot\frac{1}{(Z-A_i)^2} + \frac{a_i}{Z-A_i} + \mathfrak{P}(Z-A_i). \quad (9)$$

II. Liegt ein Punkt $z = h_i$ im Innern des Flächenstückes und ist die komplexe Zahl $Z = B_i$ dessen Bild, so ist (nach Inaug.-Diss. 14b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\lambda_i - 2}{2}\cdot\frac{1}{Z-B_i} + \mathfrak{P}(Z-B_i),$$

folglich nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{4-\lambda_i^2}{8}\cdot\frac{1}{(Z-B_i)^2} + \frac{b_i}{Z-B_i} + \mathfrak{P}(Z-B_i). \quad (10)$$

III. Liegt ein Punkt $z = g_i$ im Innern des Flächenstückes und ist die komplexe Zahl $Z = C_i$ dessen Bild, so ist in der Nähe dieser Stelle (Inaug.-Diss. 15 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{-1}{Z-C_i} + \mathfrak{P}(Z-C_i),$$

folglich nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{(Z-C_i)^2} + \frac{c_i}{Z-C_i} + \mathfrak{P}(Z-C_i). \qquad (11)$$

IV. Liegt ein Punkt $z = q_i$, welcher nicht mit einem h_i oder g_i zusammenfällt, am Rande des Flächenstückes und ist die reelle Zahl $Z = D_i$ sein Bild, so ist (Inaug.-Diss. 16 c)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{a_i - 1}{Z-D_i} + \mathfrak{P}(Z-D_i),$$

folglich nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{1-a_i^2}{2}\cdot\frac{1}{(Z-D_i)^2} + \frac{d_i}{Z-D_i} + \mathfrak{P}(Z-D_i). \qquad (12)$$

V. Liegt $z = h_i$ am Rande des Flächenstückes und ist $Z = E_i$ dessen Bild, so ist (Inaug.-Diss. 17 c)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\beta_i - 1}{2}\cdot\frac{1}{Z-E_i} + \mathfrak{P}(Z-E_i),$$

und mithin nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{(1-\beta_i)(3+\beta_i)}{8}\cdot\frac{1}{(Z-E_i)^2} + \frac{e_i}{Z-E_i} + \mathfrak{P}(Z-E_i). \quad (13)$$

VI. Liegt $z = g_i$ am Rande des Flächenstückes mit dem Bildpunkte $Z = F_i$, so ist (Inaug.-Diss. 18 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{-1}{Z-F_i} + \mathfrak{P}(Z-F_i),$$

mithin nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{(Z-F_i)^2} + \frac{f_i}{Z-F_i} + \mathfrak{P}(Z-F_i). \qquad (14)$$

VII. Liegt der Punkt $z = \infty$ im Innern des Flächenstückes und ist $Z = G$ das Bild dieses Punktes, so ist (Inaug.-Diss. 19b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{n-1}{Z-G} + \mathfrak{P}(Z-G),$$

Gleichung (8) ergibt hieraus:

$$\{s, Z\} = \frac{1-n^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G)^2} + \frac{g}{Z-G} + \mathfrak{P}(Z-G). \quad (15)$$

VIII. Liegt der Punkt $z = \infty$ ν-mal am Rande des Flächenstückes und sind die entsprechenden Bildpunkte $Z = G_i$, so ist (Inaug.-Diss. 20b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\delta_i - 1}{Z-G_i} + \mathfrak{P}(Z-G_i),$$

mithin nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{1-\delta_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G_i)^2} + \frac{g_i}{Z-G_i} + \mathfrak{P}(Z-G_i). \quad (16)$$

Das abzubildende Flächenstück habe die folgenden Eigenschaften (vgl. Inaug.-Diss. pag. 19):

1. Die m Punkte $z = q_i$, $i = 1, 2 \ldots . m$, welche nicht mit einem h_i oder g_i zusammenfallen, liegen im Innern des Flächenstückes; das Bild des Punktes q_i sei die komplexe Zahl $Z = A_i$.

2. Die r Punkte $z = h_i$, $i = 1, 2 \ldots . r$ liegen im Innern; das Bild des Punktes $z = h_i$ sei die komplexe Zahl $Z = B_i$.

3. Die s Punkte $z = g_i$, $i = 1, 2 \ldots . s$ liegen im Innern; das Bild des Punktes $z = g_i$ sei die komplexe Zahl $Z = C_i$.

4. Die μ Punkte $z = q_i$, $i = 1, 2 \ldots . \mu$ liegen am Rande des Flächenstückes; der Winkel an der Ecke $z = q_i$ sei $\frac{a_i \cdot \pi}{\varkappa_i + 1}$, wo a_i eine der Zahlen $1, 2, 3 \ldots . 2 \cdot (\varkappa_i + 1)$ ist; das Bild des Punktes $z = q_i$ sei die reelle Zahl $Z = D_i$.

5. Die ϱ Punkte $z = h_i$, $i = 1, 2 \ldots . \varrho$ liegen am Rande des Flächenstückes; der Winkel an der Ecke $z = h_i$ habe die Grösse $\frac{\beta_i \cdot \pi}{\lambda_i}$, wo β_i eine der Zahlen $1, 2, 3 \ldots . (2 \cdot \lambda_i)$ ist; das Bild des Punktes $z = h_i$ ist die reelle Zahl $Z = E_i$.

6. Die σ Punkte $z = g_i$, $i = 1, 2 \ldots \sigma$ liegen am Rande; der Winkel im Punkte $z = g_i$ habe die Grösse $\frac{\gamma_i \cdot \pi}{\tau_i}$; das Bild des Punktes $z = g_i$ sei die reelle Zahl $Z = F_i$.

7. Wenn der Punkt $z = \infty$ im Innern des Flächenstückes liegt, so sei die komplexe Zahl $Z = G$ sein Bild.

8. Liegt $z = \infty$ ν mal am Rande des Flächenstückes, so seien die Winkel in diesen Punkten $\frac{\delta_i \cdot \pi}{n}$, $i = 1, 2, 3 \ldots \nu$, wobei δ_i eine der Zahlen $1, 2, 3 \ldots 2n$ ist. Das Bild derjenigen Ecke $z = \infty$, die den Winkel $\frac{\delta_i \cdot \pi}{n}$ besitzt, sei die reelle Zahl $Z = G_i$.

Zur Abkürzung setzt man, wenn A_i und A_i' ebenso a_i und a_i' u. s. w. konjugierte Zahlen sind,

$$\begin{aligned}\Psi(z, Z) = \{s, Z\} &- \sum_{i=1}^{m}\left[-\frac{\varkappa_i}{2}(\varkappa_i + 2)\frac{1}{(Z - A_i)^2} + \frac{a_i}{Z - A_i}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{m}\left[-\frac{\varkappa_i}{2}(\varkappa_i + 2)\frac{1}{(Z - A_i')^2} + \frac{a_i'}{Z - A_i'}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{4 - \lambda_i^2}{8} \cdot \frac{1}{(Z - B_i)^2} + \frac{b_i}{Z - B_i}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{4 - \lambda_i^2}{8} \cdot \frac{1}{(Z - B_i')^2} + \frac{b_i'}{Z - B_i'}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{s}\left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z - C_i)^2} + \frac{c_i}{Z - C_i}\right] \qquad (17) \\ &- \sum_{i=1}^{s}\left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z - C_i')^2} + \frac{c_i'}{Z - C_i'}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{\mu}\left[\frac{1 - \alpha_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z - D_i)^2} + \frac{d_i}{Z - D_i}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{\varrho}\left[\frac{(1 - \beta_i)(3 + \beta_i)}{8} \cdot \frac{1}{(Z - E_i)^2} + \frac{e_i}{Z - E_i}\right] \\ &- \sum_{i=1}^{\sigma}\left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z - F_i)^2} + \frac{f_i}{Z - F_i}\right] \\ &- S.\end{aligned}$$

Die Grösse S ist eingeführt, um die drei Fälle, wo der Punkt $z = \infty$ im Innern, auf dem Rande oder ausserhalb des Flächenteiles liegt, zugleich behandeln zu können. Es ist nemlich:

a) wenn $z = \infty$ weder im Innern noch am Rande liegt

$$S = 0;$$

b) wenn $z = \infty$ im Innern liegt

$$S = \frac{1-n^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G)^2} + \frac{g}{Z-G} + \frac{1-n^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G')^2} + \frac{g'}{Z-G'};$$

c) wenn $z = \infty$ ν-mal am Rande liegt

$$S = \sum_{i=1}^{\nu} \left[\frac{1-\delta_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G_i)^2} + \frac{g_i}{Z-G_i} \right].$$

Diese Funktion $\Psi(z, Z)$ hat im Endlichen keinen Pol und ist reell, wenn Z reell und z ein Punkt der Kurve (3) ist.

§ 3.

Um das Verhalten der Funktion $\Psi(z, Z)$ in der Nähe des Punktes $Z = \infty$ zu studieren, setzen wir $Z = \frac{1}{\zeta}$ und bilden $\Psi\left(z, \frac{1}{\zeta}\right)$.

Es ist:

$$\frac{dz}{dZ} = -\frac{dz}{d\zeta} \cdot \zeta^2$$

$$s' = \frac{-\varphi'(z)}{\sqrt{R(z)}} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \cdot \zeta^2$$

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \left[\frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') - \tfrac{1}{2} \frac{d}{d\zeta}(\log R) + \frac{2}{\zeta} \right] \cdot (-\zeta^2)$$

$$= -\zeta^2 \cdot \frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') + \tfrac{1}{2} \zeta^2 \frac{d}{d\zeta}(\log R) - 2\zeta$$

$$\{s, Z\} = \zeta^4 \frac{d^2}{d\zeta^2}(\log \varphi') - \tfrac{1}{2} \zeta^4 \frac{d^2}{d\zeta^2}(\log R) - \tfrac{1}{2} \zeta^4 \left[\frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') \right]^2 - \tfrac{1}{8} \zeta^4 \left[\frac{d}{d\zeta}(\log R) \right]^2 + \tfrac{1}{2} \zeta^4 \cdot \frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') \cdot \frac{d}{d\zeta}(\log R). \tag{18}$$

Durch die Substitution $Z = \frac{1}{\zeta}$ ist ferner

$$\begin{aligned} \frac{k'}{(Z-K)^2} + \frac{k}{Z-K} &= k'\zeta^2(1-K\zeta)^{-2} + k\zeta(1-K\zeta)^{-1} \\ &= k'\zeta^2[1 + 2K\zeta + 3K^2\zeta^2 + \ldots] \\ &= k\zeta[1 + K\zeta + K^2\zeta^2 + K^3\zeta^3 + \ldots]. \end{aligned} \tag{19}$$

Da $\left\{s, \frac{1}{\zeta}\right\}$ für $\zeta = 0$ Null von der Ordnung vier wird, so muss $\Psi\left(z, \frac{1}{\zeta}\right)$ ebenfalls Null von der Ordnung vier werden für $\zeta = 0$; d. h. in $\Psi\left(z, \frac{1}{\zeta}\right)$ muss der Faktor von ζ, ζ^2 und von ζ^3 einzeln Null ergeben. Hiernach haben wir für die Constanten a_i, b_i, c_i u. s. w. die folgenden drei Bedingungsgleichungen.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \sum_{i=1}^{m}(a_i + a_i') + \sum_{i=1}^{r}(b_i + b_i') + \sum_{i=1}^{s}(c_i + c_i') \\ & + \sum_{i=1}^{\mu} d_i + \sum_{i=1}^{\varrho} e_i + \sum_{i=1}^{\sigma} f_i + S_1 = 0. \end{aligned} \tag{20a}$$

Hiebei ist:

a) wenn $z = \infty$ weder im Innern noch am Rande liegt,

$$S_1 = 0;$$

b) wenn $z = \infty$ im Innern liegt,

$$S_1 = g + g';$$

c) wenn $z = \infty$ ν-mal am Rande liegt,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\nu} g_i.$$

$$
\begin{aligned}
\text{II.}\quad & \sum_{i=1}^{m}[-\varkappa_i(\varkappa_i+2)+a_i A_i+a_i' A_i'] \\
& +\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{4-\lambda_i^2}{4}+b_i B_i+b_i' B_i'\right] \\
& +s+\sum_{i=1}^{s}\left[c_i C_i+c_i' C_i'\right] \\
& +\sum_{i=1}^{\mu}\left[\frac{1-\alpha_i^2}{2}+d_i D_i\right] \qquad\qquad (20\text{b}) \\
& +\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{(1-\beta_i)(3+\beta_i)}{8}+e_i E_i\Big] \\
& +\sum_{i=1}^{\sigma}(f_i F_i)+\frac{\sigma}{2}+S_2=0.
\end{aligned}
$$

Hiebei ist bez. in den drei obigen Fällen

a) $S_2=0,$

b) $S_2=1-n^2+gG+g'G',$

c) $S_2=\sum_{i=1}^{\nu}\left[\frac{1-\delta_i^2}{2}+g_i G_i\right].$

$$
\begin{aligned}
\text{III.}\quad & \sum_{i=1}^{m}\left[-\frac{\varkappa_i}{2}(\varkappa_i+2)(A_i+A_i')+a_i A_i^2+a_i' A_i'^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{4-\lambda_i^2}{8}(B_i+B_i')+b_i B_i^2+b_i' B_i'^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{s}[\tfrac{1}{2}(C_i+C_i')+c_i C_i^2+c_i' C_i'^2] \\
& +\sum_{i=1}^{\mu}\left[\frac{1-\alpha_i^2}{2}D_i+d_i D_i^2\right] \qquad\qquad (20\text{c}) \\
& +\sum_{i=1}^{\varrho}\left[\frac{(1-\beta_i)(3+\beta_i)}{8}E_i+e_i E_i^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{\sigma}[\tfrac{1}{2}\cdot F_i+f_i F_i^2]+S_3=0.
\end{aligned}
$$

Hiebei ist bez. in den drei obigen Fällen

a) $S_3 = 0$,

b) $S_3 = \frac{1-n^2}{2}(G+G') + gG^2 + g'G'^2$

c) $S_3 = \sum_{i=1}^{\nu}\left[\frac{1-\delta_i^2}{2}G_i + g_i G_i^2\right]$

Da die Funktion $\Psi(z, Z)$ für keinen Wert von Z unendlich wird und überall in der Z-Ebene holomorph ist, so ist sie nach den Lehren der Funktionentheorie eine Constante.

Für $Z = \infty$ oder $\zeta = 0$ ist aber $\Psi = 0$; und folglich ist die Abbildung eines beliebigen Flächenstückes, das von der Kurve (3) begrenzt wird, abhängig von der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\Psi(z, Z) = 0. \tag{21}$$

Für den Fall, dass die in obiger Gleichung (4) angegebene Bedingung für das abzubildende Flächenstück erfüllt ist, ist unsere Gleichung $\Psi(z, Z) = 0$ zurückgeführt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche in Gleichung (23) der Inaugural-Dissertation angegeben ist, und welche durch Quadraturen gelöst werden konnte.

Sitzung vom 1. März 1902.

1. Herr Karl Göbel hält einen Vortrag: „Ueber Homologie in der Entwicklung weiblicher und männlicher Geschlechtsorgane." Derselbe wird anderweitig veröffentlicht werden.

2. Herr Richard Hertwig spricht „über das Befruchtungsproblem".

3. Herr Richard Hertwig legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Franz Doflein, Custos an der zoologisch-zootomischen Sammlung „über Decapoden Ostasiens" vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr Siegmund Günther trägt über „die Entwicklung des Winkelmessens mit dem Jakobsstabe" vor. Es wird darüber an einer anderen Stelle eine Veröffentlichung erfolgen.

5. Herr Alfred Pringsheim überreicht einen Aufsatz des Herrn Dr. Arthur Korn, Privatdozenten an der hiesigen Universität: „Ueber den einfachsten semidefiniten Fall in der eigentlichen Variationsrechnung."

6. Herr Gustav Bauer legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Hermann Brunn, Privatdozenten an der hiesigen Universität, „ein Mittelwerthssatz über bestimmte Integrale" vor.

7. Herr Adolf v. Baeyer macht eine Mittheilung „über Abkömmlinge des Triphenylmethan's". Dieselbe kommt an einem andern Orte zur Veröffentlichung.



Ueber Wesen und Bedeutung der Befruchtung.

Von **Richard Hertwig.**

(Eingelaufen 26. März.)

Als mein Bruder zum ersten Mal durch seine Untersuchungen an Seeigeleiern eine sichere Beobachtungsbasis für die Lehre von der Befruchtung schuf, definirte er den Vorgang der Befruchtung als die Vereinigung geschlechtlich differenzirter Kerne. Diese Auffassung wurde dann schärfer ausgeprägt durch v. Beneden, welcher die beiden Geschlechtskerne, den „pronucleus mâle“ und „pronucleus femel“ für Halbkerne erklärte, welche sich vereinigen müssten, um einen mit allen Eigenschaften des Zellkerns ausgerüsteten, für die Entwicklung nothwendigen Furchungskern zu liefern. Von Anfang an geneigt den Grund zum sexuellen Dimorphismus in den verschiedenen Eigenschaften der Geschlechtskerne zu suchen, kam ich von dieser Auffassung bald zurück, als ich an Eiern die völlige Gleichartigkeit von Samen- und Eikern nachweisen konnte, wenn man durch geeignete Eingriffe ihre Vereinigung verhindert, als ich ferner die Befruchtungsvorgänge der Infusorien kennen lernte, bei denen die Unterschiede „männlich“ und „weiblich“ meistentheils überhaupt nicht durchführbar sind. Indem ich so die vollkommene Gleichwerthigkeit der Geschlechtskerne erwies, musste aus der Definition meines Bruders der Zusatz „geschlechtlich differenzirt“ gestrichen werden, so dass demnach die Befruchtung nur als die Vereinigung von Geschlechtskernen definirt werden konnte.

In eine neue Phase schien die Befruchtungslehre zu treten, als v. Beneden und Boveri an den Eiern von Ascaris megalo-

cephala nach der Befruchtung ein besonderes Zelltheilungsorgan, das Centrosoma, auffanden, welches letzterer unter Benutzung correspondirender Vorgänge am Seeigelei als ein Derivat des Spermatozoon hinstellte. Nach Boveri ist die Befruchtung die Einführung eines dem Ei fehlenden Theilungsorgans, des Centrosoma, in das Ei, welches seinerseits das dem Spermatozoon fehlende, zur Theilung ebenfalls nöthige Archoplasma besitzt.

Die beiden soeben besprochenen Definitionen: „Die Befruchtung ist die Vereinigung zweier Geschlechtskerne“ und „Die Befruchtung ist die Einführung eines Centrosoma in das nur mit Archoplasma ausgerüstete Ei“ sind von einander völlig verschieden, weil sie zwei ganz verschiedene Vorgänge, welche bei der Befruchtung vielzelliger Thiere und Pflanzen vereint sind, ihrem Wesen nach aber nicht nothwendig zusammengehören, ins Auge fassen. Die Befruchtung der vielzelligen Thiere und Pflanzen ist einerseits „Entwicklungserregung“, ein Vorgang, welcher zur Fortpflanzung führt, welcher Ursache ist, dass das bis dahin unthätige Ei durch das hinzutretende Spermatozoon befähigt wird, einen neuen Organismus aus sich heraus zu erzeugen. Andererseits ist aber auch die Befruchtung ein die Vererbung vermittelnder Vorgang. Bei der Befruchtung werden zwei Individualitäten oder richtiger gesagt die Anlagen dazu vereinigt zu einem neuen Gebilde, welches die Resultante beider ist, wie denn das Entwicklungsproduct des befruchteten Eies, der junge Organismus, im Allgemeinen gleich viel väterliche und mütterliche Eigenschaften besitzt. Wir haben alle Ursache anzunehmen, dass die beiden kurz charakterisirten Vorgänge durch ganz verschiedene Substanzen vermittelt werden; die Entwicklungserregung geht vom Centrosoma aus, die Combination zweier Individualitäts-Anlagen ist an Ei- und Samenkern geknüpft. „Entwicklungserregung“ und „Vereinigung zweier Individualitäten“ sind somit zwei ganz verschiedene Dinge. Wenn wir den Begriff „Befruchtung“ definiren wollen, können wir somit nicht beide Erscheinungen in die Definition aufnehmen, sondern müssen uns für eine von beiden entscheiden. Wir werden uns dabei für den Vorgang zu entscheiden haben,

welcher für die Befruchtung das Wesentliche und Charakteristische ausmacht, durch welchen sie sich von anderen Entwicklungsvorgängen unterscheidet.

In den Augen des Laien erscheint als das Wichtige bei der Befruchtung die Entwicklungserregung, die Erscheinung, dass das Ei die Fähigkeit gewinnt einen neuen Organismus zu bilden; und so war es auch lange bei den Vertretern der Wissenschaft. Trotzdem ist diese Auffassung unhaltbar. Sowohl die Erfahrungen über die Fortpflanzung der vielzelligen Thiere als auch der Nachweis von Befruchtungsvorgängen bei den Protozoen führen übereinstimmend zu dem Resultat, dass das Charakteristische der Befruchtung nur die Vereinigung zweier Kerne ist.

In dieser Hinsicht ist zuerst zu betonen, dass die Eientwicklung auch ohne Befruchtung, parthenogenetisch, vor sich gehen kann. Man hat vorübergehend daran gedacht, dass auch bei der Parthenogenesis eine Art Befruchtung vorkommt, dass der im Ei verbleibende oder mit ihm wieder verschmelzende II. Richtungskörper die Rolle des Spermatozoon spielt. Indessen giebt es Fälle, in denen nach endgiltiger Eliminirung des zweiten Richtungskörpers gleichwohl Parthenogenesis noch möglich ist. Die spontane Entwicklungsfähigkeit des völlig gereiften Eies ist vor Allem durch die Versuche Loeb's bewiesen. Nachdem ich selbst schon Theilungen unbefruchteter Eier durch Strychnin-Einwirkung erzielt hatte, ist es ihm unter Anwendung 12 % Lösungen von Magnesiumchlorid gelungen, die Entwicklung von Eiern, die unter gewöhnlichen Verhältnissen sich ohne Samenzusatz nicht theilen würden, bis zur Bildung normaler Larven zu fördern.

Giebt es somit Fälle von Entwicklungserregung, welche sich ohne Befruchtung vollziehen, so giebt es andererseits ächte Befruchtungsvorgänge, bei denen die Entwicklungserregung fehlt, mit anderen Worten, bei denen die befruchtete Zelle sich gar nicht theilt oder sich nicht anders theilt als es ohnedem geschehen sein würde. Ein Fall der letzteren Art ist die Conjugation der Infusorien, ein ächter Befruchtungsvorgang, welcher keinenfalls einen befördernden, eher einen hemmenden Einfluss

auf die Theilung ausübt. Wenn man conjugirende Infusorien trennt, ehe die Befruchtung eingeleitet ist, so theilen sie sich rascher als wenn sie die Conjugation zu Ende geführt hätten. Ich habe derartige „entcopulirte“ Paramaecien Monate lang gezüchtet. In vielen anderen Fällen tritt bei Protozoen und einzelligen Pflanzen sogar das Entgegengesetzte von Entwicklungserregung ein. Nachdem ohne Befruchtung lebhafte Theilungen vor sich gegangen sind, tritt Befruchtung ein; damit hören die Theilungen auf; die Zelle geräth in einen Wochen und Monate lang andauernden Ruhezustand.

Seitdem im Lauf des letzten Decenniums über die Befruchtung der Protozoen reichliches Material bekannt geworden ist, kennen wir alle nur denkbaren Beziehungen zwischen Fortpflanzung (Theilung und Knospung) und Befruchtung. Wir haben soeben Fälle kennen gelernt, in denen die Befruchtung keinen oder wenigstens keinen erheblichen Einfluss auf die Fortpflanzungsfähigkeit der Thiere hat. Wir haben ferner gesehen, dass sie die Fortpflanzungsfähigkeit lähmen kann. Ausserdem kommt es vor z. B. bei den Malariaparasiten, dass der Lebenscyclus eines Protozoen sich aus Theilungen von zweierlei Art zusammensetzt; die gewöhnliche Vermehrung ist von der Befruchtung unabhängig, ist, wie man sich ausdrückt, eine ungeschlechtliche Fortpflanzung. Beim Malariaparasiten sind es die im Blut des Menschen vor sich gehenden, die Fieberparoxysmen verursachenden Theilungen. Zeitweilig tritt dann Befruchtung auf und in ihrem Gefolge Theilungen einer besonderen Art. Beim Malariaparasiten sind es die in der Mücke sich abspielenden Theilungen, vermöge deren die befruchteten Ovocyten in die sichelförmigen Keime zerfallen. Endlich scheint es bei Protozoen auch vorzukommen, dass die ungeschlechtlichen Theilungen ganz fehlen und die Vermehrung ausschliesslich im Gefolge der Befruchtung eintritt. Und so ist die Befruchtung bei den Protozoen ein Vorgang für sich, welcher in der Mehrzahl der Fälle mit der Fortpflanzung nichts zu thun hat, aber schon die Tendenz erkennen lässt, mit der Fortpflanzung in Verbindung zu treten, so dass man

dann von geschlechtlicher Fortpflanzung reden kann. Unverändert kehrt dagegen überall der eine Process wieder, die Vereinigung zweier Kerne, welche von verschiedenen Thieren stammen, was nach unseren Auffassungen von der Wirkungsweise der Kerne die Aufgabe hat, die Individualitäten beider Thiere zu einer einzigen zu verschmelzen.

Wie kommt es nun, dass die Befruchtungsvorgänge vielzelliger Thiere und Pflanzen stets mit der Fortpflanzung verknüpft sind? Es lässt sich mit Leichtigkeit erweisen, dass diese Verknüpfung eine nothwendige Consequenz der Vielzelligkeit ist. Soll bei vielzelligen Organismen eine Individualitätenmischung, eine Amphimixis (Weismann) eintreten, so ist das nur zu der Zeit möglich, wo der Organismus auf den Zustand einer einzigen Zelle reducirt ist, den Zustand der Fortpflanzungszelle. Dauernde Vereinigung zweier vielzelliger Organismen oder Organismenstücke ist zwar möglich. Das zeigen die Ergebnisse des Pfropfverfahrens bei Pflanzen. In ähnlicher Weise hat man auch niedere Thiere, selbst Thiere verschiedener Art, zum Zusammenheilen gebracht. Allein bei diesen Versuchen hat sich herausgestellt, dass jeder Theil seine Eigenart beibehält und keine Vermischung der Eigenschaften eintritt. Höchstens ist nur in sehr untergeordnetem Maasse eine Beeinflussung des einen Organismus durch den anderen möglich. Eine vollkommene Durchdringung von zweierlei Individualitäten, eine Durchdringung, an welcher jede Zelle des Organismus Antheil hat, wird dagegen erreicht, wenn die Eizelle befruchtet wird und so eine Combinationszelle geschaffen wird, aus welcher sämmtliche Zellen eines Thieres oder einer Pflanze durch successive Theilung entstehen.

Aus den angestellten Erörterungen ergiebt sich mit Nothwendigkeit folgendes Problem. Wenn die Befruchtung ihrem innersten Wesen nach nicht den Zweck hat, die Bildung eines neuen Organismus einzuleiten, wenn diese Entwicklungserregung nur etwas Accessorisches ist, welches sich secundär ihr beigesellt hat, worin ist dann die Aufgabe der Befruchtung zu suchen? Ihre Aufgabe muss von fundamentaler Bedeutung

sein. Denn seitdem wir aus allen Classen der Protozoen Befruchtungsvorgänge kennen gelernt haben, gewinnt die Anschauung immer mehr an Sicherheit, dass die Befruchtung eine mit dem Wesen der lebenden organischen Substanz nothwendig verbundene Erscheinung ist.

Man kann die Lösung dieses Problems nach zwei verschiedenen Richtungen suchen. In seiner Lehre von der Amphimixis hat Weismann die Vermuthung ausgesprochen, die Individualitätenmischung sei für die Fortbildung der Art von Wichtigkeit, es würde damit eine Fülle von Eigenschafts-Combinationen geschaffen, aus welcher die Natur durch Auslese das Geeignetste festhalte. Viele Forscher, unter ihnen Boveri, haben sich dieser Auffassung angeschlossen. Ihr zufolge wäre die Amphimixis eine Erscheinung, die sich zwar an dem einzelnen Individuum ausbilde, in ihrer Wirkungsweise aber erst an dem gesammten Individuenbestand einer Art zum Austrag käme; sie würde sich damit wie die ganze Lehre vom Kampf um's Dasein der Controlle durch exacte Beobachtung entziehen. Auch würde das Befruchtungsproblem dann kein einheitliches mehr sein, es würde aus einer endlosen Summe von Einzelproblemen bestehen. Für jeden einzelnen Fall wäre zu entscheiden, welche Combination von Eigenschaften wohl die zweckmässigste ist.

Man kann aber noch in einer anderen Richtung die Lösung der Frage anstreben. Es wäre denkbar, dass die Befruchtungsbedürftigkeit eine nothwendige Consequenz des Lebensprocesses ist, dass, wie eine Maschine sich allmählig verbraucht, so auch die lebende Substanz eine Abnützung erleidet, wenn sie nicht in grösseren oder geringeren Intervallen durch die Befruchtung eine Kräftigung erfährt. Wir wissen nun zwar, dass zwischen einer Maschine und einem Organismus ein gewaltiger Unterschied gegeben ist, welcher darin besteht, dass der Organismus die Fähigkeit hat, die durch Function entstandenen Verluste am Organ wieder auszugleichen, ja sogar mehr als das; denn ein Organ kräftigt sich durch normale Function. Aber wir wissen nicht, ob diese Compensationsfähigkeit in's Unbegrenzte

fortgeht, ob nicht vielmehr hiebei der Organismus doch mit einer stets zunehmenden Unterbilanz arbeitet. Nehmen wir diesen Gedankengang an, so würden im Lebensprocess als solchem die Keime zu seiner Zerstörung enthalten sein, der Tod würde dann nicht, wie Weismann will, eine im Kampf um's Dasein erworbene Anpassung, sondern eine nothwendige Consequenz des Lebensprocesses darstellen, die nur dadurch vermieden werden kann, dass zeitweilig eine Reorganisation der lebenden Substanz stattfindet. Eine solche Reorganisation hätten wir in der Befruchtung zu erblicken; ob die einzig mögliche? das sei zunächst dahin gestellt. Aber wenn auch noch andere Möglichkeiten der Reorganisation gegeben sein sollten, würde die Befruchtung, wie wir aus ihrer weiten Verbreitung schliessen können, immer als die wichtigste angesehen werden müssen.

Von vornherein sind nun zwei Möglichkeiten gegeben, in denen man sich die reorganisirende Wirkungsweise der Befruchtung vorstellen kann. Man könnte daran denken, dass die Befruchtung die Aufgabe hat, eine Steigerung der Lebensenergie herbeizuführen, einen Verjüngungsprocess der organischen Substanz zu bewirken, sowie man durch das Aufziehen eine Uhr in den Gang setzt. Diese Lehre wurde von Bütschli für die Befruchtungsvorgänge der Infusorien aufgestellt: es sei durch fortgesetzte Theilung die Fortpflanzungsfähigkeit herabgesetzt und bedürfe einer Auffrischung; diese werde durch die Befruchtung bewirkt. Die Verjüngungstheorie ist schon für die Infusorien ganz unhaltbar. Denn wie ich durch ein oben schon erwähntes Experiment nachgewiesen habe, ist die Theilfähigkeit entcopulirter Infusorien eher grösser als die Theilfähigkeit befruchteter Thiere. Die Verjüngungstheorie lässt uns gänzlich im Stich bei den Vielzelligen. Denn die Eizellen, welche befruchtet werden, sind im Vergleich zu den übrigen Körperzellen jugendliche Zellen, die sich nicht durch Antheilnahme an den Lebensprocessen erschöpft haben.

Und so wurde meine Auffassung bei meinen Infusorienuntersuchungen nach der entgegengesetzten Richtung gelenkt.

Zur normalen Erledigung der Lebensprocesse bedarf es nicht nur der treibenden Kräfte, sondern auch der regulirenden. Die Befruchtung, die Vereinigung zweier verschiedenartiger Organisationen in eine, hat den Zweck, diese regulirenden Einrichtungen zu verstärken; sie ist daher um so nothwendiger, je lebhafter der Lebensprocess, je höher die Organisation ist, was in Uebereinstimmung steht mit der relativen Häufigkeit der Befruchtung bei den höheren Organismengruppen.

Von diesen Gesichtspunkten aus habe ich schon seit einer Reihe von Jahren Experimente an einzelligen Thieren unternommen, zunächst an Infusorien, später aus Gründen, die ich hier übergehe, an Actinosphärien, einem in unserem Süsswasser weit verbreiteten Rhizopoden. Da ich für dieses Thier den Nachweis der Befruchtung erbracht hatte, legte ich mir die Frage vor: unter welchen Bedingungen tritt Befruchtungsbedürftigkeit auf? und ferner: ist es möglich, die Cultur der Actinosphärien so einzurichten, dass die Befruchtung ausbleibt und dass die Thiere schliesslich aus eigenen inneren Ursachen nur in Folge ihrer Lebensfunction zu Grunde gehen?

Ehe ich auf die Darstellung meiner Versuchsergebnisse eingehe, muss ich Einiges vorausschicken. Die Function einer Zelle beruht auf der Wechselwirkung von Kern und Protoplasma; wie diese Wechselwirkung vor sich geht, entzieht sich noch unserer Kenntniss. Bei Actinosphärien findet sich eine Einrichtung, welche es vielleicht ermöglicht, der Prüfung dieser Frage näher zu treten. Bei einem in Verdauung begriffenen Actinosphärium finden sich ausser den Kernen im Protoplasma zerstreut noch kleine Körperchen, welche ich „Chromidien“ nennen will, weil ihre Substanz höchst wahrscheinlich mit dem an Nucleolarsubstanz gebundenen Chromatin des Kerns identisch ist. Was ihre Entstehung anlangt, so müssen wir zwei Möglichkeiten in Betracht ziehen: 1. sie können vom Protoplasma abgespalten sein, 2. sie können aus den Kernen ausgestossen sein. Dass letzteres vorkommt, dafür habe ich Beobachtungen. Wenn man Actinosphärien hungern lässt, so können drei Fälle eintreten. 1. die Thiere

verhungern allmählich, 2. sie encystiren sich, sie umgeben sich mit einer festen Hülle, innerhalb deren die Befruchtung vollzogen wird, 3. sie lösen ihre Kerne auf. Im letzteren Fall verwandeln sich unter Auflösung der Kernmembran die Kernsubstanzen — offenbar ziemlich rasch, da es schwer fällt, Umbildungsstadien zu finden — in Chromidien um. Das Thier zieht seine Pseudopodien ein und wird eine Protoplasmakugel, deren Inneres nach allen Richtungen von Chromidien durchsetzt ist. Leider ist es mir bisher noch nicht geglückt, die besonderen Bedingungen festzustellen, unter denen der sehr interessante Vorgang eintritt, da die zu den Hungerculturen verwandten Thiere frisch eingefangen worden waren.

Ich bemerke noch, dass die Chromidialmasse sich allmählich in eine bräunliche Substanz verwandelt, welche aus dem Thier ausgestossen wird. Einen ganz analogen Vorgang kenne ich von Infusorien.

Ich habe nun in folgender Weise experimentirt. In Uhrgläschen wurden Actinosphärien mit blauen und grünen Stentoren gefüttert und immer Sorge getragen, dass ein Ueberfluss von Nahrung vorhanden war. Ferner wurde durch tägliches Erneuern des Wassers die Ansammlung schädlicher Stoffe verhütet. Da die Actinosphärien durchsichtig sind und das Futter intensiv gefärbt, kann man den Grad der Fütterung und an der eintretenden Verfärbung auch genau den Grad der Verdauung feststellen. An circa 40 Culturen, die ich zum Theil vor 2 Jahren, zum Theil in den letzten Monaten einrichtete und von denen manche noch im Gang sind, konnte ich feststellen, dass unter günstigen Verhältnissen ein Actinosphärium etwa das 10—20 fache seiner Masse im Lauf eines Tags frisst, was dann zu einer ganz colossalen Vermehrung führt, so dass ich in der Lage bin, an einem enormen planmässig eingelegten Material die Zellveränderungen genauer zu studiren, wovon ich in Zukunft noch manche Aufklärung erwarte. Die starke Fütterung hält nicht an; nach einigen Tagen wird sie geringer und es treten Zeiten freiwilligen Hungers ein. Diese Hungerperioden lehren, dass in der That ein fortgesetztes

Assimiliren und zur Vermehrung führendes Wachsthum nicht möglich ist, dass vielmehr nach einiger Zeit eine Erschöpfung des Organismus eintritt und dass eine erneute Aufnahme der Function nur möglich ist, wenn eine Reorganisation der lebenden Substanz stattgefunden hat. Mit dem Fortschreiten der Cultur verschärfen sich die Constraste. Die Fütterung wird enormer, andererseits wachsen die Zeiten freiwilligen Hungerns. Es können Pausen von 3—5 Tagen eintreten. Diese Unfähigkeit, Nahrung aufzunehmen, kann zu einem dauernden Zustand werden. Es ist ein merkwürdiges Bild, Thiere trotz aller Sorgfalt der Cultur inmitten einer Fülle von Nahrung verhungern zu sehen; oder es werden wieder schwache Versuche zu fressen gemacht; das Aufgenommene wird aber so langsam verdaut, dass kein Wachsthum und keine Vermehrung eintritt. Ab und zu encystiren sich im Stadium dieser Assimilationsunfähigkeit die Actinosphärien; sie nehmen, um nicht zu Grunde zu gehen, den Ausweg der Befruchtung.

Noch häufiger als Verhungern und Encystirung ist ein dritter Ausgang meiner Culturen; er ist zugleich bei weitem der interessanteste. Bei Actinosphärien, die wochenlang in einer Ueberfülle von Nahrung cultivirt worden waren, kommt es vor, dass sich nach mehrtägigem Fasten enorme Fütterung einstellt und dass dann eine wahre Revolution im Kernapparat beginnt. Ein Theil der Kerne wird aufgelöst, andere wachsen dagegen heran. In letzteren sondert sich die Nucleolarsubstanz vom Chromatin; sie ist es, die an Masse zunimmt, das Chromatin herausdrängt, welches sich im Protoplasma vertheilt. Die Nucleolarmasse eines Kerns kann in solchen Fällen so colossal zunehmen, dass, während alle übrigen Kerne aufgelöst werden, ein einziger Riesenkern übrig bleibt, welcher etwa die tausendfache Masse eines gewöhnlichen Actinosphärienkerns besitzt. Gewöhnlich bleiben aber mehrere Kerne von gleicher Grösse erhalten. Die ihres Chromatins beraubten Riesenkerne werden ausgestossen und das dadurch kernlos gewordene Thier geht zu Grunde.

Es liegt nahe, bei den geschilderten Vorkommnissen an

Folgen von Schädlichkeiten, sei es chemischer Substanzen, sei es parasitärer Organismen, zu denken. Ich habe daher, um diese Frage zu prüfen, eine Menge Versuche angestellt, über die ich hier im Einzelnen nicht berichten kann. Nur um eine Versuchsweise zu erwähnen, ich habe wiederholt Culturen, in denen noch einige in Kerndegeneration begriffene Actinosphärien enthalten waren, ohne Veränderung des Wassers und des Futterbodens mit neuen Actinosphärien besiedelt und stets feststellen können, dass dieselben sich bei mässiger Ernährung viele Wochen lang gesund weiter entwickelten. Ausser diesen Experimenten spricht gegen die Annahme einer infectiösen Natur und lässt dieselbe geradezu ausgeschlossen erscheinen die Art, mit welcher sich die Kerndegeneration entwickelt, und die Häufigkeit, mit welcher ich sie durch lange zum Theil Monate dauernde Cultur habe hervorrufen können. Von 40 Culturen sind mehr als die Hälfte in dieser Weise zu Grunde gegangen und zwar zu ganz verschiedenen Zeiten, was offenbar mit der Verschiedenartigkeit des Ausgangsmaterials zusammenhängt, zum Theil auch wohl damit, dass es bei der grössten Sorgfalt nicht möglich ist, völlig gleichartige Fütterungsbedingungen herzustellen, nicht einmal in dem Uhrgläschen einer und derselben Cultur. Und so komme ich zu dem Schluss, dass eine functionelle Degeneration vorliegt; ich nehme an, dass die in ganz aussergewöhnlicher Weise gesteigerten Lebensfunctionen, welche in einer ganz enormen Vermehrung der Thiere zum Ausdruck kommen, das Gleichgewicht der Zelltheile erschüttern, dass der Organismus Versuche macht, durch Hungerpausen dieses Gleichgewicht wieder herzustellen, dass im Verlauf die Schädigungen immer intensiver, die regulatorischen Vorgänge immer unzureichender werden, bis schliesslich eine letzte übermässige Functionsanstrengung den Zusammenbruch der Zelle bedingt.

Es wäre nun wünschenswerth, die im Lauf der Cultur eintretenden Veränderungen im Zellenleben nicht ausschliesslich nach den Erscheinungen der Nahrungsaufnahme zu beurtheilen, sondern noch nach anderweitigen Kriterien. Als

ein solches Kriterium käme zunächst in Betracht die Fortpflanzungsenergie. Hierzu ist das Actinosphärium gänzlich unbrauchbar, weil seine Grösse zu sehr variirt. Oft kommt es vor, dass im Lauf eines Tages ein riesiges Actinosphärium sich in 20, 30 selbst hundert kleinere Thiere auflöst, und dass im weiteren Verlauf die Zahl durch partielle Verschmelzung wieder eine bedeutende Reduction erfährt. Auch können Thiere von gleicher Grösse ganz verschieden reich an Substanz sein, je nachdem sie stärker oder weniger stark vacuolisirt sind. Nur durch mühsames Zählen der Kerne, welches nur an conservirtem Material möglich ist, würde man die Zunahme an lebender Substanz genauer bestimmen können. In dieser Hinsicht würden Infusorien viel günstigere Objecte sein, weil hier die individuelle Grösse bei gleichartigen Fütterungsbedingungen eine bestimmte ist. Bei analogen Fütterungsexperimenten mit Paramaecium caudatum, bei dem man leider die Intensität der Nahrungsaufnahme nicht in der Weise wie bei Actinosphärien bemessen kann, habe ich feststellen können, dass bei lang fortgesetzten Culturen die Perioden der Vermehrung durch Perioden unterbrochen werden, in denen Tage lang keine Theilungen stattfinden, bis nach längerer Ruhe die Vermehrung von Neuem beginnt. Hiermit ist auf einem anderen Wege bewiesen, dass der Organismus zeitweiliger Reorganisation bedarf.

Eine Art Reagens auf den jeweiligen Organisationszustand der Protozoen ist ferner in der Einrichtung von Hungerculturen gegeben. Ich habe von diesem Verfahren bei meinen Actinosphärienzuchten ausgiebigen Gebrauch gemacht. Man bekommt dabei äusserst mannichfache Resultate. Es kann vorkommen, dass alle zur Hungercultur verwendeten Thiere sich in den ersten 3 Tagen encystiren. Man kann dann, da die Encystirung mit Befruchtungsvorgängen combinirt ist, von einer Art geschlechtlichen Reife reden. Es kann aber auch vorkommen, dass alle Thiere infolge lange fortgesetzten Hungerns zu Grunde gehen, ohne sich zu encystiren. Dazwischen giebt es mittlere Zustände. Klare übersichtliche Resultate

habe ich bisher auf diesem Wege noch nicht gewinnen können mit Ausnahme des einen, dass ungünstige Encystirungsbedingungen sowohl vor als nach dem Zeitpunkt geschlechtlicher Reife eintreten. Jedenfalls hat dieses scheinbar gleichartige Verhalten vor und nach dem Encystirungsoptimum ganz verschiedene Bedeutung. Klarheit kann jedoch hierüber nur gewonnen werden, wenn die Veränderungen, welche die Zellbestandtheile des Actinosphärium auf den verschiedenen Stadien der Cultur erfahren, einer genauen Untersuchung unterworfen worden sind. Ich komme hiermit auf einen Punkt, welcher für die Verwerthung der durch Züchtung gewonnenen Resultate unerlässlich ist.

Ich habe leider bisher noch nicht Zeit gehabt, das reiche Material, welches ich von den verschiedenen Entwicklungsserien conservirt habe, genauer zu studiren. Um völlige Sicherheit zu erzielen, müssen von verschiedenen Stadien Querschnitte angefertigt und diese in ganz übereinstimmender Weise gefärbt werden. Gleichwohl stehen mir jetzt schon genügende Erfahrungen an gefärbten ganzen Thieren zu Gebote, um mit Bestimmtheit sagen zu können, dass bei all den geschilderten Vorgängen das Massenverhältniss von Protoplasma und Kernsubstanz eine Ausschlag gebende Rolle spielt. Nimmt die Masse an Kernmaterial rascher zu als die Masse des Protoplasma, so muss sie durch theilweise Auflösung eine Reduction erfahren. Es mehren sich dann die Chromidien, sie werden in die oben schon gelegentlich erwähnte bräunliche Masse verwandelt, welche ausgestossen wird. Diese Verminderung der Chromatinmasse habe ich oben für hungernde Actinosphärien beschrieben, bei denen der Schwund von Körpermasse, zunächst also von Protoplasma, stets auch einen Schwund von Kernen zu folge hat. Analoge Verhältnisse treten bei stark fütternden Actinosphärien ein: bei der Function nimmt das Kernmaterial rascher zu als das Protoplasma und muss daher beständig durch theilweise Auflösung und Ausstossung reducirt werden. Erreicht diese Chromatin-Ausstossung eine grosse Energie, so verliert die Zelle die Fähigkeit, zu assimiliren und Nahrung aufzunehmen.

Es treten Hungerperioden trotz reichlichen Nährmaterials ein. Wie nun bei Hungerculturen unter bestimmten Verhältnissen die kernauflösende Kraft des Protoplasma so gross werden kann, dass alle Kerne in Chromidien verwandelt werden, so kann auch bei fortgesetzter Ueberanstrengung der assimilirenden Thätigkeit der Zelle schliesslich ein Zustand eintreten, der nicht mehr durch die gewöhnlichen Mittel ausgeglichen werden kann; es tritt dann die soeben besprochene Erscheinung ein: ein grosser Theil der Kerne wird aufgelöst, ein Rest in die Bahnen der Riesenkernbildung geleitet. Ich schliesse aus gewissen Erscheinungen, dass man bei geeigneter Durchführung des Experiments auch durch Futtercultur die nahezu gleichzeitige Auflösung sämmtlicher Kerne erzielen kann, die ich durch Hungercultur bei Actinosphärien, die im Freien gesammelt worden waren, erzielt habe. Wir haben somit in den besprochenen verschiedenen Formen der Kernreduction dieselbe Grunderscheinung vor uns, nur in verschiedenen Graden der Intensität.

Starke Reduction des Kernmaterials geht nun auch den Befruchtungsvorgängen voraus. Bei der Encystirung von Actinosphärien werden etwa 90 % der Kerne aufgelöst und etwa 10 % zur Befruchtung verwandt. Das befruchtete Actinosphärium repräsentirt den Zustand der Zelle, in welcher das im normalen Leben vorkommende Mindestmaterial von Kernsubstanz erreicht ist. Das Gleiche gilt für Infusorien, bei denen während der Conjugation der chromatinreiche Hauptkern aufgelöst wird und die chromatinarmen Nebenkerne übrig bleiben. Die aus den befruchteten Nebenkernen hervorgehenden „Placenten", die Anlagen der neuen Hauptkerne, sind ganz ausserordentlich chromatinarm. Auch bei den vielzelligen Thieren ist der Kern des befruchteten Eies, der Furchungskern, ganz unglaublich klein und chromatinarm. Die Reduction der Masse von Kernsubstanz bei Befruchtungsprocessen ist somit für eine so grosse Zahl von Fällen beschrieben worden, dass wir in ihr eine allen Befruchtungsvorgängen zukommende Erscheinung zu erblicken haben.

Die Reduction der Kernmasse beim Befruchtungsprocess würde sich somit den regulatorischen Vorgängen anschliessen, welche während des Lebens der Protozoen zu beobachten sind; sie ist aber nur eine Begleiterscheinung der Befruchtung, macht dagegen nicht das Wesentliche derselben aus. Wie ich oben durchgeführt habe, ist das Wesentliche der Befruchtung in der Vereinigung zweier Kerne gegeben, welche von verschiedenen Zellen stammen und daher individuelle Unterschiede erkennen lassen. Diese Unterschiede dürfen nicht zu gering sein wie bei Inzucht, noch zu gross wie bei Bastardirung, damit gute Resultate durch die Befruchtung erzielt werden. Die Erfahrungen der Züchter machen es wahrscheinlich, dass ein gewisses, im Einzelnen nicht genauer definirbares Optimum der Unterschiede gegeben sein muss.

Ist es nun möglich, die bei der Befruchtung zu Stande kommende Vereinigung verschieden gearteter Kerne als einen Process sich vorzustellen, der in ähnlichem Sinne regulatorisch wirkt, wie die besprochenen Vorgänge der Kernreduction? Ich glaube, dass das in der That der Fall ist. Wenn es für die Integrität des Zellenlebens von Wichtigkeit ist, ein bestimmtes Wechselverhältniss von Kern und Protoplasma aufrecht zu erhalten, so wird diese Aufgabe viel besser durch Einrichtungen gelöst, welche Störungen verhindern, als durch Einrichtungen, welche eingetretene Störungen ausgleichen. Es wäre aber sehr gut denkbar, dass durch Einführen eines fremden Zellkerns in das Protoplasma, wie es bei der Befruchtung geschieht, ein übermässiges Anwachsen der Wechselwirkungen zwischen Kern und Protoplasma und damit eine übermässige Zunahme der Kernsubstanz auf längere Zeit hinaus verhindert wird.

Was durch Addiren eines fremden Kerns zu einer Zelle erreicht wird, müsste, so sollte man meinen, auch durch Mischung von Protoplasma zweier Zellen erreicht werden können. Bezeichnen wir mit *a* und *b* Kern und Protoplasma einer Zelle und mit *α* und *β* die entsprechenden Theile einer zweiten Zelle, so würde durch Protoplasmamischung ein ähn-

liches Verhältniss der Zellbestandtheile $\left(\frac{b+\beta}{2}:a\right)$ erreicht werden, wie durch reine Kernbefruchtung $\left(b:\frac{a+\alpha}{2}\right)$. Es würde nur der erstere Vorgang schwieriger zu bewerkstelligen sein als der zweite.

In dieser Weise erklärt sich vielleicht die sogenannte „Plasmogamie", die bei Rhizopoden weit verbreitete Erscheinung, dass Thiere nur mit ihren Plasmaleibern verschmelzen. Von vielen Seiten werden Plasmogamien als Vorläufer ächter Befruchtung (Karyogamie) aufgefasst. Nach meiner Auffassung würde es sich vielmehr um ein Surrogat handeln, und zwar ein minder wirksames, weil eine gleichmässige Durchmischung zweier Zellplasmen nur durch völlige auch die Kerne betreffende Verschmelzung herbeigeführt werden kann. Die gewöhnlichen Verschmelzungen zweier Rhizopoden werden immer nur einen geringfügigen Stoffaustausch herbeiführen.

Bei Actinosphärium ist Plasmogamie eine weit verbreitete Erscheinung; man hat sich daher daran gewöhnt, ihr keine grössere Bedeutung beizumessen und hat diese Auffassung auch damit gestützt, dass keine besonderen Vorgänge in ihrem Gefolge auftreten. Ich habe lange Zeit auch dieser Auffassung gehuldigt, bin aber von ihr zurückgekommen, seitdem ich durch intensives Studium eine intimere Kenntniss der Lebensvorgänge des Rhizopoden gewonnen habe. Ich habe feststellen können, dass Plasmogamien immer nur unter bestimmten Bedingungen auftreten. Man findet sie bei Culturen, wie ich sie angestellt habe, in den ersten Zeiten so gut wie gar nicht; nach wochenlanger Fütterung werden sie immer häufiger und ausgiebiger, so dass man Plasmogamien findet, deren Producte vielleicht aus 100 Actinosphärien von mittlerer Grösse bestehen und mehrere Millimeter gross sind. Plasmogamien treten ein am Ende gewaltiger Futterperioden oder auch in den Zeiten, in denen die Assimilationsfähigkeit aufgehört hat, d. h. zu Zeiten, in denen Störungen im Wechselverhältniss von Kern und Protoplasma eingetreten sind. Actinosphärien in Riesen-

kernbildung sind sehr häufig plasmogamirt, was man, abgesehen von der Grösse, häufig auch darin erkennen kann, dass die einzelnen Regionen des Riesenthiers sich auf verschiedenen Entwicklungsstufen der Kernumwandlung befinden.

Ich habe in dieser Arbeit versucht, die zur Zeit noch völlig unbestimmten Anschauungen über das Wechselverhältniss, welches bei den Zellfunctionen zwischen Kern und Protoplasma besteht, wenigstens etwas bestimmter zu gestalten. Im Anschluss hieran habe ich ferner versucht, für die physiologische Bedeutung des in seinen morphologischen Erscheinungen so gut erforschten Befruchtungsprocesses eine einheitliche Auffassung zu gewinnen. Diese Auffassung führt, wie ich oben schon andeutete, mit Nothwendigkeit zur Annahme, dass zwischen dem Verlauf der Lebensfunctionen und dem natürlichen Tod, dem durch keine äusseren Schädlichkeiten bedingten Lebensende, ein causaler Zusammenhang besteht. Im Gegensatz zu Weismann nehme ich an, dass schon im normalen Lebensprocess die Keime des Todes enthalten sind, dass der Tod keine zufällige Anpassung ist, sondern die nothwendige Consequenz des Lebens selbst. Somit können auch die Protozoen nicht unsterblich sein in dem Sinne wie Weismann will; sie würden ebenso zu Grunde gehen müssen wie die vielzelligen Thiere, wenn nicht Einrichtungen getroffen wären, welche die schädlichen Wirkungen des Lebensprocesses compensiren. Die wirksamste Einrichtung in dieser Hinsicht ist die Befruchtung, ein Vorgang, bei dem aus dem Material zweier allmählich zum Untergang hinneigender Individuen ein neues lebenskräftigeres Thier geschaffen wird.



Ueber den einfachsten semidefiniten Fall in der eigentlichen Variationsrechnung.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 1. März.*)

Das einfachste Problem der eigentlichen Variationsrechnung besteht darin, eine Funktion

$$y\,(x)$$

so zu finden, dass das Integral zwischen zwei festen Grenzen x_1 und x_2:

$$1)\qquad J \equiv \int_{x_1}^{x_2} f\,(x, y, y')\,d\,x = M_a^i \text{ (d. h. Maximum oder Minimum)}$$

wird, wenn f eine gegebene Funktion von x, y und der Ableitung

$$2)\qquad y' = \frac{d\,y}{d\,x}$$

vorstellt.

Wir setzen fest, dass wir nur solche Funktionen y in betracht ziehen und nur mit solchen Funktionen $y + \delta\,y$ vergleichen wollen, die im Intervall $x_1\,x_2$ eindeutig und stetig sind und eindeutige und stetige erste und zweite Ableitungen nach x besitzen, für welche ferner die Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

im Intervall $x_1\,x_2$ eindeutig und stetig sind.

Das folgende Resultat ist durch die bisherigen Untersuchungen über den Gegenstand sichergestellt:

Ist:

3) $$y = y(x\, c_1\, c_2)$$

die Lösung der Differentialgleichung 2. O.:

4) $$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

und bezeichnen wir die Substitution 3) und die Substitution der Auflösungen der Gleichungen:

5)[1] $$\begin{cases} |\, y\, |_{x=x_1} = y_1, \\ |\, y\, |_{x=x_2} = y_2, \end{cases}$$

nach c_1 und c_2 durch Einschliessung in [ ], so wird $[y]$ eine Lösung des Problemes sein, wenn im ganzen Intervall $x_1\, x_2$

I) $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right]$ ein festes Zeichen hat und $\neq 0$ ist,

II) $\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1} \neq 0$ ist $(x_1 \gtrless x \gtrless x_2)$,

und zwar ist (für $x_1 < x_2$) ein Maximum vorliegend, wenn $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right]$ stets < 0, ein Minimum, wenn diese Grösse stets > 0 ist.

Ein M_a^i ist nicht vorhanden, wenn der Ausdruck I) positive und negative, von Null verschiedene Werte besitzt, oder wenn die oft mit

$$\Delta(x\, x_1)$$

bezeichnete Determinante II) für einen in strengem Sinne der Ungleichung

$$x_1 \gtrless x \gtrless x_2$$

genügenden Wert von x verschwindet.

Eine weitere Untersuchung durch Betrachtung höherer Variationen als der zweiten ist notwendig, wenn

(1. semidefiniter Fall) der Ausdruck I) ein festes Zeichen hat und $\neq 0$ ist, und wenn der Ausdruck II) zwar in dem Intervall

---

[1]) $y_1\, y_2$ gegebene Konstanten.

$$x_1 \gtrless x \gtrless x_2$$

$\neq 0$ ist, aber für $x = x_2$ verschwindet.

(2. semidefiniter Fall) der Ausdruck II) im ganzen Intervall

$$x_1 \gtrless x \underline{\gtrless} x_2$$

$\neq 0$ ist, der Ausdruck I) ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann.[1])

Die vorliegende Abhandlung wird sich mit dem 1. semidefiniten Falle, dem einfachsten semidefiniten Fall der eigentlichen Variationsrechnung beschäftigen und für diesen Fall die nächsten Kriterien des M_a^i geben.

§ 1.

Wir machen zur Vereinfachung der Ausdrucksweise etwas weitere Stetigkeitsvoraussetzungen über y und f, als eigentlich für das Endresultat erforderlich wäre, indem wir nicht nur alle Ableitungen von f, soweit dieselben in betracht kommen, als eindeutig und stetig (im Intervalle $x_1\, x_2$) annehmen, sondern auch δJ als der Taylor'schen Entwickelung fähig annehmen:[2])

$$\delta J = \delta^1 J + \delta^2 J + \delta^3 J + \delta^4 J + \dots$$

oder bei Substitution der Funktion $[y]$

$$6)\qquad [\delta J] = [\delta^2 J] + [\delta^3 J] + [\delta^4 J] + \dots$$

Hier ist:

$$7^{a})\quad [\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\delta y^2}\right]\delta y^2 + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\delta y\, \delta y'}\right]\delta y\, \delta y' + \left[\frac{\partial^2 f}{\delta y'^2}\right]\delta y'^2\right\}dx;$$

oder:

$$7^{b})\quad [\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}(f_{11}\,\delta y^2 + 2 f_{12}\,\delta y\,\delta y' + f_{22}\,\delta y'^2)\,dx,$$

---

[1]) Der allgemeine semidefinite Fall ist eine Mischung der beiden genannten Fälle.

[2]) Sobald

$$\text{abs. } \delta y \underline{\underline{<}}\, \varepsilon, \quad \text{abs. } \delta y' \underline{\underline{<}}\, \varepsilon,$$

wo ε eine positive, im übrigen beliebig kleine Konstante ist.

wenn wir:

8)
$$\begin{cases} f_{11} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right], \\ f_{12} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right], \\ f_{22} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right] \end{cases}$$

setzen; wir werden in ähnlicher Weise auch die höheren Ableitungen von f abkürzen, so dass z. B.

$$f_{122} = \left[\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y'^2}\right].$$

Wir führen jetzt — geleitet durch die Jacobi'schen und Lipschitz'schen Transformationen der 2. Variation — an Stelle von $\delta y'$ die Grösse δZ durch die Substitution:

9)
$$\delta y' = \delta Z + \frac{z'}{z} \delta y$$

ein, wobei wir z und z' durch die Gleichungen:

10)
$$\begin{cases} z = \left[\dfrac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} \left[\dfrac{\delta y}{\partial c_1}\right] - \left[\dfrac{\delta y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1} \left[\dfrac{\delta y}{\partial c_2}\right], \\ z' = \dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$

definieren.

z verschwindet nach Voraussetzung nirgends im Intervalle

$$x_1 \gtrless x \gtrless x_2,$$

wohl aber für $x = x_1$ und $x = x_2$; da aber gleichzeitig auch δy an diesen Grenzen verschwindet und z' wegen der leicht aus 4) folgenden Identität

11)
$$f_{11} z + f_{12} z' \equiv \frac{d}{dx}(f_{12} z + f_{22} z'), \quad (x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2)$$

für $x = x_1$ und $x = x_2$ von null verschieden sein muss, so ist δZ im ganzen Intervall $x_1 x_2$ eindeutig und stetig und kann durch genügende Verkleinerung von ε von der Art

endl. Konst. ε

unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden.

Durch die Substitution 9) wird:[1])

$$[\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}\,\delta Z^2\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left[\delta y^2\,\frac{f_{12}z + f_{22}z'}{z}\right] dx,$$

oder:

$$12)\quad [\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}\,\delta Z^2\,dx.$$

Es wird ferner:

$$13)\left\{\begin{aligned}[\delta J] = {} & \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}(1+E)\,\delta Z^2\,dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} D(f)\,dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta Z\,dx,\end{aligned}\right.$$

wenn wir unter $D(f)$ und $D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ die Ausdrücke $[\delta f]$ und $\left[\delta\,\frac{\partial f}{\partial y'}\right]$ nach Substitution von

$$\delta y' = \frac{z'}{z}\cdot\delta y$$

verstehen, so dass:

$$14^a)\left\{\begin{aligned} D(f) &= D^3(f)\,\delta y^3 + D^4(f)\,\delta y^4 + \ldots, \\ D^3(f) &= \tfrac{1}{6}\left\{f_{111} + 3f_{112}\frac{z'}{z} + 3f_{122}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + f_{222}\left(\frac{z'}{z}\right)^3\right\}, \\ D^4(f) &= \tfrac{1}{24}\left\{f_{1111} + 4f_{1112}\frac{z'}{z} + 6f_{1122}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + 4f_{1222}\left(\frac{z'}{z}\right)^3 + f_{2222}\left(\frac{z'}{z}\right)^4\right\},\end{aligned}\right.$$

— — — — — — — — — — —

[1]) Da:

$$-f_{22}\frac{z'}{z} + \frac{f_{12}z + f_{22}z'}{z} = f_{12},$$

und

$$f_{22}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left[\frac{f_{12}z + f_{22}z'}{z}\right] = f_{22}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \frac{z(f_{11}z + f_{12}z') - z'(f_{12}z + f_{22}z')}{z^2},$$

$$= f_{11}.$$

$$14^{b})\begin{cases} D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y^2 + D^3\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\partial y^3 + \ldots, \\ D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{1}{2}\left\{f_{112} + 2f_{122}\frac{z'}{z} + f_{222}\left(\frac{z'}{z}\right)^2\right\}, \\ D^3\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{1}{6}\left\{f_{1112} + 3f_{1122}\frac{z'}{z} + 3f_{1222}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + f_{2222}\left(\frac{z'}{z}\right)^3\right\}, \\ \text{— — — — — — — — — — —,} \end{cases}$$

und wo ferner E eine Grösse vorstellt, die ihrem absoluten Werte nach

$$\overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } \varepsilon.$$

§ 2.

Wir können die Formel 13) auch folgendermassen schreiben:

$$15)\begin{cases} [\delta J] = \int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{1}{1+E}\left\{\frac{1}{2}f_{22}\left[\delta Z(1+E) + \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{f_{22}}\right]^2\right. \\ \qquad\left. + (1+E)\,D(f) - \frac{1}{2}\,\frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}^2}{f_{22}}\right\}d\,x. \end{cases}$$

Nennen wir ε_1 den absolut grössten Wert von δZ, ε_2 den absolut grössten Wert von δy, so werden offenbar die beiden Fälle

$$\text{I.} \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_1,$$
$$\text{II.} \quad \varepsilon_1 \overline{\overline{<}} \varepsilon_2,$$

alle möglichen Fälle umfassen. In dem Falle I. muss nach 13) $[\delta J]$ das Zeichen von f_{22} haben, so dass wir nur den Fall II. noch zu untersuchen haben, in dem wir

$$16) \qquad \text{abs. } E < \text{endl. Konst. } \varepsilon_2$$

haben.

Die Gleichung 15) zeigt, dass jedenfalls $[\delta J]$ nur dann ein anderes Zeichen als f_{22} haben kann, wenn:

17[a])
$$\delta Z(1+E) = -\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{f_{22}} + \sigma,$$
wo:
$$\sigma^2 \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst.} \left\{(1+E)\,D(f) - \tfrac{1}{2}\,\frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}^2}{f_{22}}\right\},$$
also mit Rücksicht auf 14[a]), 14[b]):

17[b])
$$\text{abs. } \sigma \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Es kann nach 17[a]) und 17[b]) mit Rücksicht auf den Wert 14[b]) von $D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ dieser Fall jedenfalls nur eintreten, wenn:

18[a])
$$\delta Z = \gamma \cdot z\,^{1})$$
und:

18[b])
$$\text{abs. } \gamma \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Aus 18[a]) folgt nun weiter:[2])

19[a])
$$\delta y = a \cdot z \cdot \varepsilon_2 + \Gamma,$$
wo a eine bestimmte endliche Konstante ist und

19[b])
$$\text{abs. } \Gamma < \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Da wir uns nur mit Funktionen y (resp. $y + \delta y$) beschäftigen, welche mit ihren ersten und zweiten Ableitungen eindeutig und stetig ist, so folgt aus 19[a]) auch:

20[a])
$$\delta y' = a \cdot z' \varepsilon_2 + \Gamma',$$
wo auch:

20[b])
$$\text{abs. } \Gamma' \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Nur diese Fälle 19), 20) bedürfen einer besonderen Untersuchung.

---

[1]) Man kann δZ mit z proportional setzen, da beide an den Grenzen verschwinden und im Intervall $x_1\,x_2$ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig vorausgesetzt werden.

[2]) Da nach 18[a]) und 9):
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{z}\right) = \gamma,$$
somit:
$$\delta y = \text{const. } z + \Gamma.$$

§ 3.

Bevor wir zu dieser Untersuchung übergehen, fügen wir in der Formel 13) zu der rechten Seite noch den Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{F_3 \delta y^3}{z^3}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{F_3}{z^3}\right)\delta y^3 + 3\frac{F_3}{z^3}\delta y^2\left(\delta Z + \frac{z'}{z}\delta y\right)\right] dx$$

hinzu und subtrahieren denselben Ausdruck:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{F_3 \delta y^3}{z^3}\right) dx = \left|\frac{F_3 \delta y^3}{z^3}\right|_{x=x_1}^{x=x_2} = \left[\frac{F_3 \delta y'^3}{z'^3}\right]_{x=x_1}^{x=x_2},$$

wo F_3 eine eindeutige und stetige Funktion von x im Intervall

$$x_1 \gtreqless x \gtreqless x_2$$

sein soll, über die wir uns noch eine weitere Bestimmung vorbehalten.

Es folgt dann:

$$21)\quad \begin{cases} [\delta J] = -\left|\frac{F_3 \delta y'^3}{z'^3}\right|_{x=x_1}^{x=x_2} + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}(1+E)\,\delta Z^2\,dx \\ \qquad + \int_{x_1}^{x_2}\left[D(f) + \delta y^3\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{F_3}{z^3}\right) + 3\,\frac{F_3 z'}{z^4}\right\}\right] dx \\ \qquad + \int_{x_1}^{x_2}\left[D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2\right]\delta Z\,dx. \end{cases}$$

Wir wählen jetzt F_3 so, dass:

$$D^3(f) + \frac{d}{dx}\left(\frac{F_3}{z^3}\right) + 3\,\frac{F_3 z'}{z^4} = 0,$$

also:

$$\frac{dF_3}{dx} = -z^3 D^3(f)$$

oder:

$$22)\quad \frac{dF_3}{dx} = -\frac{1}{6}\{f_{111} z^3 + 3f_{112} z^2 z' + 3f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3\},$$

dann können wir 21) auch so schreiben (man vergl. die Formel 15)):

$$
23)\left\{\begin{aligned}
[\delta J] = &-\left|\frac{F_3\,\delta y'^3}{z'^3}\right|_{x=x_1}^{x=x_2}\\
&+\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{1+E}\left\{\tfrac{1}{2}f_{22}\left[(1+E)\,\delta Z+\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{3F_3}{z^3}\delta y^2}{f_{22}}\right]^2\right.\\
&\left.+(1+E)(D^4(f)\,\delta y^4+..)^{1)}-\tfrac{1}{2}\frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{3F_3}{z^3}\delta y^2\right\}^2}{f_{22}}\right\}dx.
\end{aligned}\right.
$$

An der Hand dieser Formel werden wir jetzt die Fälle 19) 20) diskutieren.

§ 4.

Wir folgern zunächst aus 23) die für ein festes Zeichen von $[\delta J]$ notwendige Bedingung, es muss

$$|F_3|_{x=x_1}^{x=x_2} = 0$$

sein, also:

$$24)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\{f_{111}\,z^3+3f_{112}\,z^2z'+3f_{122}\,z\,z'^2+f_{222}\,z'^3\}\,dx = 0;$$

denn wäre dieser Ausdruck $\neq 0$, so folgte aus 23) nach den Substitutionen 19) 20):

$$[\delta J] = c\cdot\varepsilon_2^2+\delta,$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante und

$$\text{abs. } \delta \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } \varepsilon_2^{3+\frac{1}{2}},$$

wenn wir nur Γ und Γ' so einrichten, dass

$$\text{abs.}\left[(1+E)\,\delta Z+\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2}{f_{22}}\right] \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst } \varepsilon_2^2,$$

was ja stets möglich ist.

Wir können sogleich aus 23) eine weitere notwendige Bedingung ableiten. F_3 ist nach 22) noch mit einer willkürlichen Konstanten behaftet, wir wählen dieselbe so, dass:

---

[1]) Das ist $D(f)$ abgesehen von den Gliedern 3. Ordnung $D^3(f)\,\delta y^3$.

25ᵃ) $$|F_3|_{x=x_1} = 0,$$
somit nach 24) auch:

25ᵇ) $$|F_3|_{x=x_2} = 0,$$

dann folgt aus 23), dass $[\delta J]$ ein festes Zeichen nur dann haben kann, wenn der Ausdruck:

26) $$\int_{x_1}^{x_2}\left[D^4(f) - \frac{1}{2}\frac{\left\{D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + 3\frac{F_3}{z^3}\right\}^2}{f_{22}}\right] z^4\, dx$$

das Zeichen von f_{22} besitzt, denn nennen wir C den Wert dieses Ausdruckes, so folgt aus 23) nach den Substitutionen 19), 20):

$$[\delta J] = C\cdot a^4\cdot \varepsilon_2^4 + \Delta,$$

wo

$$\text{abs. } \Delta \overline{<} \text{ endl. Konst. } \varepsilon_2^{4+\frac{1}{2}},$$

wenn wir nur Γ und Γ' so einrichten, dass:

$$\left[(1+E)\,\delta Z + \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2}{f_{22}}\right]^2 \overline{<} \varepsilon_2^{4+\frac{1}{2}},$$

was ja stets möglich ist.

Die Bedingung, dass der Ausdruck 26) das Zeichen von f_{22} hat und von Null verschieden ist, ergiebt sich auch sofort als eine hinreichende Bedingung für das Eintreten eines M_a^i, da nach den Substitutionen 19) und 20) dann der Ausdruck

$$\left\{\int_{x_1}^{x_2}(1+E)(D^4(f)\,\delta y^4 + \ldots) - \frac{1}{2}\frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2\right\}^2}{f_{22}}\right\} dx$$

das Zeichen von f_{22} besitzt und somit auch der Ausdruck $[\delta J]$.

Wir erhalten so das folgende Endresultat:

In dem semidefiniten Falle, in welchem f_{22} im Intervalle $x_1 x_2$ stets dasselbe Zeichen besitzt und nirgends verschwindet, und in dem

27) $$z = \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1}$$

nirgends **innerhalb** des Intervalles $x_1 x_2$ verschwindet, wohl aber an den **beiden** Grenzen $x = x_1$ und $x = x_2$, erhält man die folgenden nächsten Kriterien für das Auftreten eines M_a^i:

Es muss für ein M_a^i

$$28)\quad \int_{x_1}^{x_2} \{f_{111} z^3 + 3 f_{112} z^2 z' + 3 f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3\} dx = 0$$

sein. Es wird dann thatsächlich ein M_a^i stattfinden, wenn der Ausdruck

$$29)\quad \int_{x_1}^{x_2} z^4 \left\{ D^4(f) - \frac{1}{2} \frac{\left\{ D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3 F_3}{z^3} \right\}^2}{f_{22}} \right\} dx,$$

in dem

$$30)\quad F_3 = -\frac{1}{6} \int_{x_1}^{x} \{f_{111} z^3 + 3 f_{112} z^2 z' + 3 f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3\} dx,$$

$$31)\quad D^4(f) = \frac{1}{24} \left\{ f_{1111} + 4 f_{1112} \frac{z'}{z} + 6 f_{1122} \left(\frac{z'}{z}\right)^2 + 4 f_{1222} \left(\frac{z'}{z}\right)^3 + f_{2222} \left(\frac{z'}{z}\right)^4 \right\},$$

$$32)\quad D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{1}{2} \left\{ f_{112} + 2 f_{122} \frac{z'}{z} + f_{222} \left(\frac{z'}{z}\right)^2 \right\},$$

das Zeichen von f_{22} besitzt und von Null verschieden ist; hat der Ausdruck ein von f_{22} verschiedenes Zeichen, ohne zu verschwinden, so wird ein M_a^i nicht vorhanden sein; verschwindet der Ausdruck, so ist eine weitere Untersuchung erforderlich (semidefiniter Fall höherer Ordnung).

§ 5.

Vor längerer Zeit hat bereits G. Erdmann[1]) Kriterien für den hier behandelten semidefiniten Fall aufgestellt, und

---

[1]) G. Erdmann, Untersuchung der höheren Variationen einfacher Integrale (Z.-S. f. Math. u. Phys. XXII, 1877, p. 324); ich verdanke einer freundlichen, brieflichen Mitteilung von Herrn A. Mayer den Hinweis auf diese Arbeit.

ich möchte hier zeigen, dass die Erdmann'schen Kriterien aus den obigen Kriterien einwandsfrei folgen, während mir der von Erdmann gegebene Beweis nur für die notwendigen Bedingungen streng erscheint. Zu diesem Zwecke werden wir die Bezeichnungen von Erdmann einführen, durch welche die Kriterien in einer wesentlich eleganteren Form dargestellt werden können.

Wir definieren die Operation $\frac{d(-)}{dc}$ durch die Formel:

33) $$\frac{d(-)}{dc} = \frac{\partial(-)}{\partial c_1} \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial c_2}\right|_{x=x_1} - \frac{\partial(-)}{\partial c_2} \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial c_1}\right|_{x=x_2}$$

und setzen:

34) $$\begin{cases} u = \dfrac{dy}{dc}, \\ v = \dfrac{d^2 y}{dc^2}, \\ w = \dfrac{d^3 y}{dc^3}, \end{cases}$$

dann verschwinden offenbar u, v, w für $x = x_1$, und es ist:

35) $$z = \left[\frac{dy}{dc}\right] = [u],$$

so dass $[u]$ auch für $x = x_2$ bei unseren Voraussetzungen verschwindet:

Wir setzen ferner:

36) $$a_{mn} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial y'^n}, \quad \begin{matrix} m = 0, 1, 2 \ldots \\ n = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

und:

37) $$\begin{cases} \Omega_2 = \int_{x_1}^{x_2} (a_{20} u^2 + 2a_{11} u u' + a_{02} u'^2)\, dx,^{1)} \\ \Omega_3 = \int_{x_1}^{x_2} (a_{30} u^3 + 3a_{21} u^2 u' + 3a_{12} u u'^2 + a_{03} u'^3)\, dx, \\ \Omega_4 = \int_{x_1}^{x_2} (a_{40} u^4 + 4a_{31} u^3 u' + 6a_{22} u^2 u'^2 + 4a_{13} u u'^3 + a_{04} u'^4)\, dx. \end{cases}$$

---

[1]) Bei der Festsetzung $u' = \frac{du}{dx}$, analog $v' = \frac{dv}{dx}$.

Dann ist wegen der (aus 4) analog der Gleichung 11) folgenden Relation:

$$38) \qquad a_{20} u + a_{11} u' = \frac{d}{dx}(a_{11} u + a_{02} u')$$

zunächst:

$$\Omega_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \{ u (a_{11} u + a_{02} u') \} \, dx,$$

oder:

$$39) \qquad \Omega_2 = | u (a_{11} u + a_{02} u') |_{x = x_2}.$$

Es ist weiter nach der zweiten und ersten Formel 37):

$$\Omega_3 = \frac{d\,\Omega_2}{dc} - \int_{x_1}^{x_2} (2a_{20} uv + 2a_{11}(uv' + vu') + 2a_{02} u'v') \, dx,$$

$$= \frac{d\,\Omega_2}{dc} - 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \{ v (a_{11} u + a_{02} u') \} \, dx,$$

oder mit Rücksicht auf 39):

$$\Omega_3 = | v(a_{11} u + a_{02} u') + u(a_{11} v + a_{02} v') - 2v(a_{11} u + a_{02} u') |_{x = x_2},$$

oder schliesslich:

$$40) \quad \Omega_3 = | a_{02}(uv' - vu') |_{x = x_2} + | u(a_{21} u^2 + 2a_{12} uu' + a_{03} u'^2) |_{x = x_2}.$$

Wegen der Identität:

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_{111} z^3 + 3f_{112} z^2 z' + 3f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3) \, dx = [\Omega_3]$$

und der Relation 40) können wir jetzt die für ein M_u^i notwendige Bedingung 28) in der Form schreiben:

$$41) \qquad [v]_{x = x_2} \equiv \left[\frac{d^2 y}{dc^2} \right]_{x = x_2} = 0.$$

Wir können ferner — analog der Ableitung von 40) — die durch 30) definierte Funktion F_3 in der Form darstellen:

$$42) \quad F_3 = -\tfrac{1}{6} f_{22} [uv' - vu'] - \tfrac{1}{6} [u(a_{21} u^2 + 2a_{12} uu' + a_{03} v'^2)],$$

und wir gehen nun zur Vereinfachung des Ausdruckes 29) über.

Wir bedenken hier zunächst, dass nach der dritten un zweiten Formel 37):

$$\Omega_4 = \frac{d\,\Omega_3}{d\,c} - 3\int_{x_1}^{x_2}(a_{30}\,u^2 v + a_{21}\,u\,(2u'v + u\,v') + a_{12}\,u'\,(u\,v + 2u'\,v') + a_{03}\,u'^2\,v')\,d\,x,$$

$$= \frac{d\,\Omega_3}{d\,c} - 3\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\,x}\{v\,(a_{11}\,v + a_{02}\,v' + a_{21}\,u^2 + 2a_{12}\,u\,u' + a_{03}\,u'^2)\}\,d\,x$$

$$+ 3\int_{x_1}^{x_2}(a_{20}\,v^2 + 2a_{11}\,v\,v' + a_{02}\,v'^2)\,d\,x,^{1)}$$

somit mit Rücksicht auf 40) und 41):

$$[\Omega_4] = -\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2} + 3\int_{x_1}^{x_2}\{f_{11}\,[v^2] + 2f_{12}\,[v\,v'] + f_{22}\,[v'^2]\}\,d\,x,$$

und da nach 31) und 37)

$$\int_{x_1}^{x_2} z^4\,D^4\,(f)\,d\,x = \tfrac{1}{24}\,[\Omega_4]:$$

$$43)\quad \int_{x_1}^{x_2} z^4\,D^4\,(f)\,d\,x = -\,\tfrac{1}{24}\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2} + \tfrac{1}{8}\int_{x_1}^{x_2}\{f_{11}\,[v^2] + 2f_{12}\,[v\,v'] + f_{22}\,[v'^2]\}\,d\,x.$$

Wir brauchen jetzt noch diesen Ausdruck und den Ausdruck:

$$44)\quad z^4\left\{D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\right\}^2 = +\,\tfrac{1}{4}\,f_{22}^2\,\frac{[u\,v' - v\,u']^2}{[u]^2}$$

in 29) einzusetzen, um für 29) den folgenden Wert zu erhalten:

---

1) Mit Rücksicht auf die aus 38) folgende Relation:

$$a_{20}\,v + a_{11}\,v' + a_{30}\,u^2 + 2\,a_{21}\,u\,u' + a_{12}\,u'^2 = \frac{d}{d\,x}\,(a_{11}\,v + a_{02}\,v' + a_{21}\,u^2 + 2\,a_{12}\,u\,u' + a_{03}\,u'^2).$$

$$45) \qquad -\tfrac{1}{24}\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2} + \tfrac{1}{8}\int_{x_1}^{x_2}\Big\{f_{11}\,[v^2] + 2f_{12}\,[v\,v'] + f_{22}\,[v'^2] - f_{22}\,\frac{[u\,v' - v\,u']^2}{[u]^2}\Big\}\,d\,x.$$

Nun ist leicht zu zeigen, dass das Integral in diesem Ausdruck verschwindet, denn es ist:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{22}\Big\{\frac{u\,v' - v\,u'}{u}\Big\}^2 d\,x = \int_{x_1}^{x_2} f_{22}\,u^2\Big\{\frac{d}{d\,x}\Big(\frac{v}{u}\Big)\Big\}^2 d\,x$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\Big\{f_{11}\,v^2 + 2f_{12}\,v\,v' + f_{22}\,v'^2 - \frac{d}{d\,x}\Big\{f_{12}\,v^2 + f_{22}\,\frac{v^2\,u'}{u}\Big\}\Big\}\,d\,x,$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\{f_{11}\,v^2 + 2f_{12}\,v\,v' + f_{22}\,v'^2\}\,d\,x,$$

sobald $v = 0$ für $x = x_1$ und $x = x_2$.

Der Ausdruck 29) reduciert sich somit auf

$$46) \qquad -\tfrac{1}{24}\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2}.$$

Wir können hiernach jetzt den Kriterien S. 10 die elegante Form der Erdmann'schen Kriterien geben:

Definiert man die Operation $\frac{d(-)}{d\,c}$ durch die Formel:

$$47) \qquad \frac{d(-)}{d\,c} = \frac{\partial(-)}{\partial c_1}\cdot\left|\frac{\partial y}{\partial c_2}\right|_{x=x_1} - \frac{\partial(-)}{\partial c_2}\cdot\left|\frac{\partial y}{\partial c_1}\right|_{x=x_1},$$

so ist in dem betrachteten semidefiniten Falle für ein M_a^i notwendig, dass:

$$48) \qquad \left[\frac{d^2 y}{d\,c^2}\right]_{x=x_2} = 0;$$

es wird dann thatsächlich ein M_a^i stattfinden, wenn

$$49) \qquad \left[\frac{d\,y'}{d\,c}\cdot\frac{d^3 y}{d\,c^3}\right]_{x=x_2} \text{ negativ}$$

und von Null verschieden ist; ist der Ausdruck 49) positiv und von Null verschieden, so wird ein M_a^i nicht vorhanden sein; ist

$$\left[\frac{d^3 y}{d c^3}\right]_{x=x_2} = 0,$$

so ist eine weitere Untersuchung erforderlich (semidefiniter Fall höherer Ordnung).

Neue Mittelwerthssätze über bestimmte Integrale.

Von **Hermann Brunn.**

(Eingelaufen 1. März.)

Geometrische Einleitung.

1. In jeder unserer Figuren 1, 2 und 3 haben wir zwei zu einander senkrechte Ebenen I und II und einen in ihrem Winkel liegenden Körper: K_1 in Fig. 1, K_2 in Fig. 2, K_3 in Fig. 3.

2. Jeder dieser Körper ist ausser durch I und II durch zwei ebene und zwei cylindrische auf I oder II senkrechte Flächen begrenzt, z. B. K_1 durch die ebenen Flächen $a c \gamma C$, $b d \delta D$ und die cylindrischen $C \gamma \delta D$ und $c \gamma \delta d$.

3. Sämmtliche drei Körper werden von Ebenen, die senkrecht zur Schnittlinie $a b$ der Ebenen I und II sind, nach Rechtecken geschnitten.

4. Die drei Figuren sind nur der Deutlichkeit wegen auseinander gezeichnet. Man soll sie sich eigentlich in einander geschoben vorstellen, so dass man drei Körper zwischen einem einzigen Paar von Ebenen hat.

5. Dann wird die ebene Grundfläche $abdec$, wie schon durch die gleichbleibende Bezeichnung angedeutet in allen drei Fällen identisch dieselbe. Die drei Flächen $abDEC$, $abD'E'C'$, $a b D'' E'' C''$ werden nicht identisch, sind aber als inhaltsgleich vorausgesetzt.

6. Wichtig ist nun die Charakterisirung der in I und II liegenden Leitlinien der verschiedenen Cylinderflächen. Die Curven CED und ced, jene von C nach D, diese von c nach d hin durchlaufen, sollen dabei beide entweder der Linie ab niemals näher kommen, oder niemals von ihr sich entfernen. Anders ausgedrückt, sie sollen durch monotone Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ gleichen Charakters (durch „isomonotone", kürzer „isotone" Funktionen) sich ausdrücken, wenn man ab als Abscissenaxe, die Ordinaten in den zu ab senkrechten Richtungen aC, resp. ac nimmt.

7. $C''E''D''$ soll symmetrisch zu CED, das Flächenstück $abC''E''D''$ eine einfache Umlegung von $abCED$ sein. $C''E''D''$ ist somit ebenfalls monoton, aber nicht gleichen Charakters („anisoton") mit CED. $C'E'D''$ ist eine Parallele zu ab.

8. Den nichtssagenden Fall, dass CED selbst parallel zu ab ist, und in Folge dessen (s. 5) mit $C'E'D'$ und $C''E''D''$ zusammenfällt, können wir als ausgeschlossen, bezw. von vorneherein erledigt betrachten.

9. Es gilt nun

$$K_1 > K_2 > K_3$$

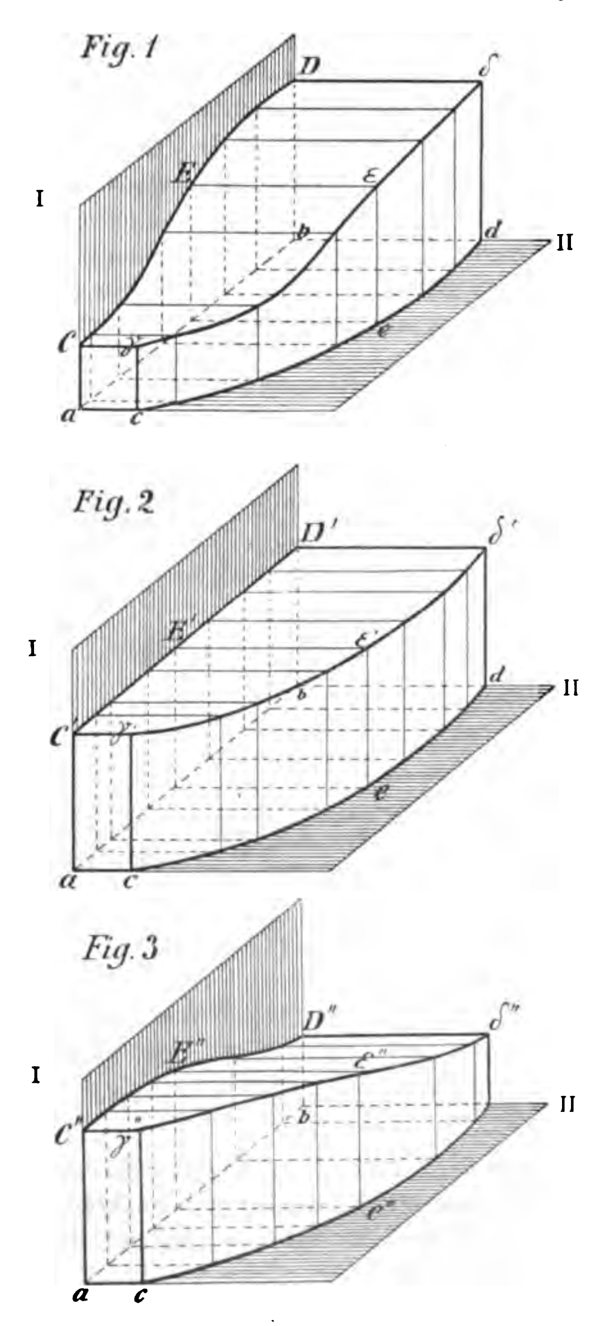
und diese Beziehung, analytisch eingekleidet (s. VIII und XXII) und bewiesen, sowie mehrfach verallgemeinert, bildet den Inhalt der folgenden Betrachtungen.[1])

I. Capitel.

10. $f(x)$ und $g(x)$ seien in dem endlich begrenzten Intervall $a \leq x \leq b$ endliche, eindeutige, monotone Funktionen, somit auch integrabel im ganzen Intervall und über jede beliebige Theilstrecke desselben.

---

[1]) Herr Gust. Bauer macht mich aufmerksam, dass die nemliche Art geometrischer Repräsentation für den Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthssatz angewendet wurde von C. Neumann (Ueber die nach Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen etc. Leipzig 1881).


Fig. 1
D
δ
E
ε
I
b
d
II
C
γ
e
a
c
Fig. 2
D'
δ'
E'
ε'
I
b
d
II
C'
γ
e
a
c
Fig. 3
D''
δ''
E''
ε''
I
b
II
C''
γ
e''
a
c

11. Die Integrabilität des Produktes $f(x) \cdot g(x)$ im nemlichen Intervall ist für das Folgende ebenfalls nothwendig, sie ergibt sich aber, wie man weiss, aus den gemachten Voraussetzungen bereits als nothwendige Folge.

12. Zunächst seien $f(x)$ und $g(x)$ nicht nur monoton, sondern — um beim ersten Beweisschritt unseres bevorstehenden Satzes nicht gleich eine Menge verschiedener parallel laufender Fälle zu gleicher Zeit im Auge behalten zu müssen, — auch isoton, und zwar niemals abnehmend, dazu im ganzen Intervall positiv. Schliesslich sei auch der Fall eines völligen Gleichbleibens im ganzen Intervall für beide Funktionen vorläufig ausgeschlossen.

Dann ist

$$\text{I)} \qquad f(a)\int_a^b dx < \int_a^b f(x)\,dx < f(b)\int_a^b dx$$

oder — es ist ja $b - a$ positiv (s. 10) —

$$\text{II)} \qquad f(a) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < f(b).$$

13. Es ist also

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f_m$$

ein mittlerer Werth zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und es lässt sich auf alle Fälle ein zwischen a und b liegender Werth x_m bestimmen, für welchen gilt:

$$\text{III)} \qquad f(x_m - \varepsilon) \leqq f_m \leqq f(x_m + \delta)$$

wobei

$$0 < \varepsilon < x_m - a; \quad 0 < \delta \leqq b - x_m$$

ist und die beiden Gleichheitszeichen in III) nach Absatz 12 nicht gleichzeitig für alle zugelassenen Werthe von ε und δ gelten können.

14. Ob dabei f_m mit $f(x_m)$ zusammenfällt, bleibt unentschieden; die Voraussetzungen über die Funktion sind derartige, dass auch ein Unstetigkeitssprung der Funktion bei

$x = x_m$ zulässig ist, der sie von einem Werthe unterhalb f_m nach einem solchen oberhalb fortreisst.[1])

15. In Worten: Es existirt sicher eine Theilung des Intervalls von der Art, dass die zum einen Theil gehörigen x-Werthe die Funktion sämmtlich $\leqq f_m$, die zum andern Theil gehörigen sämmtlich sie $\geqq f_m$ machen.

16. Dann gilt weiter:

$$\text{IV)}\left\{\begin{array}{c} \int\limits_a^{x_m} f(x)\,g(x)\,dx \leqq \int\limits_a^{x_m} f_m \cdot g(x) \cdot dx \\ (= \text{ nur, wenn } f(x) \text{ von } a \text{ bis } x_m \text{ constant } = f_m \text{ ist}) \\ \int\limits_{x_m}^b f(x)\,g(x)\,dx \geqq \int\limits_{x_m}^b f_m \cdot g(x) \cdot dx \\ (= \text{ nur, wenn } f(x) \text{ von } x_m \text{ bis } b \text{ constant } = f_m \text{ ist}) \end{array}\right.$$

oder — indem man die beiden vorstehenden Ungleichungen leicht umformt und neue wichtige daran kettet:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V}^{a}) & 0 \leqq \int\limits_a^{x_m}(f_m - f(x))\,g(x)\,dx < g(x_m)\int\limits_a^{x_m}(f_m - f(x))\,dx \\ & \quad \text{"} \qquad \leqq g(x_m)\left[f_m(x_m - a) - \int\limits_a^{x_m} f(x)\,dx\right] \\ \text{und} & \\ \text{V}^{b}) & 0 \leqq \int\limits_{x_m}^b (f(x) - f_m)\,g(x)\,dx \geqq g(x_m)\int\limits_{x_m}^b (f(x) - f_m)\,dx \\ & \quad \text{"} \qquad \geqq g(x_m)\left[\int\limits_{x_m}^b f(x)\,dx - f_m(b - x_m)\right] \end{array}\right\}\text{beachte III)}$$

Die zweiten Gleichheitszeichen in V_a) resp. V_b) gelten nur, wenn $g(x)$ von a bis x_m, resp. von x_m bis b constant gleich $g(x_m)$ ist oder wenn $f_m - f(x)$ im ganzen Intervall von a bis x_m, resp. von x_m bis b gleich Null ist.

---

[1]) Möglicherweise existiren mehrere Werthe für x_m; sind x'_m und x''_m zwei davon, so ist sicher $f(x'_m) = f(x''_m) = f_m$ und auch $f(x_m) = f_m$ für jeden beliebigen Werth $x_m = x'''_m$, der zwischen x'_m und x''_m liegt.

17. Hier ist eine Erläuterung der Bedeutung von $g(x_m)$ erforderlich. Sobald $g(x)$ bei x_m keine Unstetigkeit erleidet, ist ein Zweifel darüber, was für $g(x_m)$ zu setzen ist, ausgeschlossen. Sobald $g(x)$ aber dort einen Sprung macht von $g(x) = \alpha$ bis $g(x) = \beta$, so kann für $g(x_m)$ jeder Werth zwischen α und β mit Einschluss dieser Grenzen gesetzt werden, und man kann auch, um die Ungleichungen möglichst stringent zu machen, in V_a) einen möglichst kleinen Werth, also α, in V_b) einen möglichst grossen, also β für $g(x_m)$ einsetzen.

18. Wir kehren zur Entwickelung unseres Satzes zurück. Die beiden eckigen Klammern in V_a) und V_b) erweisen sich als gleich, wie man durch Subtraktion ersieht:

$$\text{VI)}\quad \begin{aligned} & f_m(x_m - a) - \int_a^{x_m} f(x)\,dx - \int_{x_m}^b f(x)\,dx + f_m(b - x_m) \\ & \qquad = f_m(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \text{(nach 13).} \end{aligned}$$

Wenn also der mit $g(x_m)$ multiplicirte Werth der eckigen Klammern mit F bezeichnet wird, so ist

$$\text{VII)}\quad \begin{aligned} & \int_a^{x_m} (f_m - f(x))\,g(x)\,dx \lesseqgtr F \leqq \int_{x_m}^b (f(x) - f_m)\,g(x)\,dx \\ & \int_a^{x_m} (f_m - f(x))\,g(x)\,dx \leqq \int_{x_m}^b (f(x) - f_m)\,g(x)\,dx, \end{aligned}$$

wo das Gleichheitszeichen nur gelten könnte, wenn $g(x)$ im ganzen Intervall, mit Ausnahme etwa der Grenzen a und b selbst, constant gleich $g(x_m)$ wäre, was wir ausgeschlossen haben (s. 12).

Durch andere Vertheilung und Wiederzusammenfassung der Theilintegrale auf die Seiten der Ungleichung ergibt sich hieraus:

$$\text{VIII)}\quad \begin{aligned} & f_m \int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \qquad \text{oder} \\ & \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$

19. Wir wollen nun den Satz von allerhand Beschränkungen befreien, welche ihm vorläufig noch anhaften.

Aus der erhaltenen Ungleichung ergibt sich auch die Richtigkeit der folgenden, in der k, l beliebige constante Grössen sind:

$$\text{IX)} \quad \int_a^b [f(x)+k][g(x)+l]\,dx > \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)+k]\,dx \int_a^b [g(x)+l]\,dx$$

und umgekehrt, aus dem Bestehen der letzteren für irgend zwei Werthe k, l folgt VIII).

Denn durch Ausführung der Multiplikationen und Integrationen ergibt sich für IX) eine Form, die sich von VIII) nur durch die Hinzufügung gleicher Glieder

$$\text{X)} \qquad l\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx + kl(b-a)$$

rechts und links vom Ungleichheitszeichen unterscheidet.

20. Sind nun $f(x)$, $g(x)$ irgend zwei im Intervall a bis b nirgends fallende endliche eindeutige Funktionen, deren Vorzeichen nicht oder nicht überall im Intervall positiv ist, so lassen sich doch stets endliche Constante k, l angeben, welche $f(x)+k$ und $g(x)+l$ zu nirgends fallenden, im Intervall stets positiven Funktionen machen, für welche IX) Geltung hat. Dann gilt aber, wie eben ausgesprochen, auch VIII).

Also die das Vorzeichen von $f(x)$ und $g(x)$ beschränkende Bedingung aus Abs. 12 können wir fallen lassen.

21. Ferner: Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei im Intervall niemals steigende, so sind $-f(x)$, $-g(x)$ zwei im Intervall niemals fallende Funktionen, für welche gilt:

$$\text{XI)}\begin{cases} \displaystyle\int_a^b [-f(x)][-g(x)] > \frac{1}{b-a}\int_a^b [-f(x)]\,dx \cdot \int_a^b [-g(x)]\,dx \quad (\text{s.VIII}); \\ \text{somit gilt auch} \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx \end{cases}$$

d. h. der Satz gilt auch für niemals steigende Functionen, die endlich und eindeutig sind.

22. Ist schliesslich $f(x)$ eine im Intervall niemals fallende, $g(x)$ eine ebenda niemals steigende endliche eindeutige Funktion — oder umgekehrt — so ist nach dem Vorhergehenden der Satz sicher giltig für das Paar Funktionen $f(x)$ und $-g(x)$ und es kommt

$$\text{XII)}\quad \begin{cases} -\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > -\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \\ \text{oder} \\ \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx. \end{cases}$$

Für „anisotone" Funktionen dreht sich also das Ungleichheitszeichen unseres Satzes um.

23. Sobald wir das von Kronecker eingeführte Zeichen

$$\operatorname{sgn} A = \pm 1 \left(\text{je nachdem } A \begin{matrix}\text{pos}\\ \text{neg}\end{matrix}\right)$$

benutzen, ist

$$\text{XIII)}\quad \begin{aligned} &\operatorname{sgn}[f(b)-f(a)]\cdot\operatorname{sgn}[g(b)-g(a)] \\ &= \operatorname{sgn}\{[f(b)-f(a)][g(b)-g(a)]\} \end{aligned}$$

$$\text{abgekürzt} = \operatorname{sgn} q = \pm 1 \left(\text{je nachdem } f \text{ und } g \begin{matrix}\text{isoton}\\ \text{anisoton}\end{matrix}\right).$$

Die bisherigen Resultate lassen sich daher in der folgenden Form des Satzes zusammenfassen:

$$\text{XIV)}\quad \operatorname{sgn} q\cdot\int_a^b f(x)\,g(x) > \operatorname{sgn} q\,\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx.$$

24. Um endlich auch noch die in 10. gemachte Voraussetzung $b > a$ zu beseitigen, sei $b < a$; dann gilt nach dem bisherigen sicher

$$\text{XV)}\begin{cases} \operatorname{sgn} q \int\limits_b^a f(x)\, g(x)\, dx > \dfrac{\operatorname{sgn} q}{a-b} \int\limits_b^a f(x)\, dx \int\limits_b^a g(x)\, dx \\ \text{oder} \\ -\operatorname{sgn} q \int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx > -\operatorname{sgn} q \dfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \int\limits_a^b g(x)\, dx. \end{cases}$$

Die beiden für die entgegengesetzten Annahmen $b > a$ und $b < a$ geltenden Formen der Ungleichung können wieder in eine zusammengefasst werden, indem man in XIV) links wie rechts noch den Factor $\operatorname{sgn}(b-a)$ hinzufügt.

25. Setzt man schliesslich zur Abkürzung das Produkt

$$\text{XVI)} \qquad [f(b) - f(a)]\,[g(b) - g(a)]\,[b - a] = p,$$

so kommt als endgiltige Form des Satzes:

$$\text{XVII)} \quad \operatorname{sgn} p \int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \int\limits_a^b g(x)\, dx,$$

der nun für beliebige endliche, eindeutige monotone Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und beliebige endliche Grenzen a, b gilt mit Ausnahme des Falles $a = b$, bei dem die beiden Seiten der Ungleichung als verschwindend und so einander gleichwerdend zu betrachten sind, und des Falles, wo eine der Funktionen f, g oder auch beide im ganzen Intervall constant sind und wo ebenfalls Gleichheit eintritt.

26. Eine Vervollständigung des Satzes kann gewonnen werden, indem man der einen Funktion, etwa $f(x)$, die Funktion $f(a + b - x)$ an die Seite stellt, welche im Intervall von a bis b die nemlichen Werthe wie jene, aber in umgekehrter Reihenfolge annimmt, somit ebenfalls endlich, eindeutig und monoton ist, und der Ungleichung

$$\text{XVIII)} \quad \operatorname{sgn} p' \int\limits_a^b f(a+b-x) g(x) dx > \frac{\operatorname{sgn} p'}{b-a} \int\limits_a^b f(a+b-x)\, dx \int\limits_a^b g(x) dx$$

Genüge thut.

Aber es ist, wie die Substitution $x = a + b - y$ sofort erweist

XIX) $$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

und es ist ferner

XX) $$\operatorname{sgn} p' = \operatorname{sgn}\{[f(a)-f(b)]\,[g(b)-g(a)]\,[b-a]\} = -\operatorname{sgn} p,$$

so dass sich ergibt

XXI) $$\operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\,g(x)\,dx < \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$$

und wir unserer Ungleichung XVII) noch ein Glied anfügen können:

XXII) $$\begin{aligned}\operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx &> \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \\ &> \int_a^b f(a+b-x)\,g(x)\,dx.\end{aligned}$$

27. Die vollständig symmetrische Rolle, welche $f(x)$ und $g(x)$ spielen, lässt erkennen, dass $f(x)$ und $g(x)$ im letzten Integral auch vertauscht werden können.

II. Capitel.

28. Die im ersten Capitel entwickelte Ungleichung hat in einer Beziehung etwas unbefriedigendes. Sie schliesst das Produkt der beiden Integrale über die Factoren $f(x)$ und $g(x)$ in Grenzen ein, für das Integral des Produktes gibt sie nur eine einseitige Grenze. Meist wiegt aber der Wunsch vor, gerade über das Integral des Produktes näher belehrt zu werden.

29. Versuchen wir zuerst, durch eine Transformation der Ungleichung diesem Mangel abzuhelfen. Es sei jetzt eine Funktion $m(x)$ und ihr Produkt mit einer andern $h(x)\cdot m(x)$ eindeutig, endlich und monoton. Dann wird auch $\frac{1}{m(x)}$ die nemlichen Eigenschaften haben, wenn nur kein Werth des x-Intervalls, auf welches sich die Betrachtung beschränkt, $m(x)$ zu Null macht. Dies sei jetzt vorausgesetzt.

30. Wir wenden nun unsern Satz auf den Fall $f(x) = h(x)m(x)$ und $g(x) = \frac{1}{m(x)}$ an und erhalten, wenn der Abkürzung wegen

$$[b-a]\,[h(b)\,m(b) - h(a)\,m(a)]\left[\frac{1}{m(b)} - \frac{1}{m(a)}\right] = p''$$

XXIII) oder

$$-[b-a]\,[m(b) - m(a)]\left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right] = p''$$

gesetzt wird:

XXIV)
$$\operatorname{sgn} p'' \int_a^b h(x)\,dx > \operatorname{sgn} p'' \int_a^b h(x)\cdot m(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{m(x)}$$
$$> \operatorname{sgn} p'' \int_a^b \frac{h(a+b-x)\,m(a+b-x)\,dx}{m(x)}.$$

Wir setzen, um die Division mit $\int_a^b \frac{dx}{m(x)}$ vorzubereiten,

XXV)
$$p'' \cdot \int_a^b \frac{dx}{m(x)} = r,$$

dann wird

XXVI)
$$\operatorname{sgn} r \frac{\int_a^b h(x)\,dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}} > \operatorname{sgn} r \int_a^b h(x)\,m(x)\,dx$$
$$> \operatorname{sgn} r \frac{\int_a^b \frac{h(a+b-x)\,m(a+b-x)\,dx}{m(x)}}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}}.$$

31. Unser Augenmerk richtet sich natürlich weniger auf die zweite, als auf die erste in XXVI) enthaltene Ungleichung und auf die Frage, ob vielleicht diese sich an die erste Ungleichung von XXII), welche für die bei monotonem $h(x)$ zulässige Verfügung $f(x) = h(x)$, $g(x) = m(x)$ die Form

XXVII) $$\operatorname{sgn} p \int_a^b h(x)\, m(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b h(x)\, dx \cdot \int_a^b m(x)\, dx$$

annimmt, — nach vorn angliedern lasse. Dies ist dann der Fall, wenn

$$\operatorname{sgn} r = \operatorname{sgn} p$$

oder wenn

XXVIII) $$-\operatorname{sgn} \int_a^b \frac{dx}{m(x)} \cdot \left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right] = 1$$

ist. Ist dagegen

$$\operatorname{sgn} r = -\operatorname{sgn} p;$$

XXIX) $$-\operatorname{sgn} \int_a^b \frac{dx}{m(x)} \cdot \left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right] = -1,$$

so ändre man die Vorzeichen der Glieder von XXVI), drehe dem gemäss die Ungleichheitszeichen um, und man wird erkennen, dass das weniger willkommene Glied

$$\operatorname{sgn} p \frac{\int_a^b \frac{h(a+b-x)\, m(a+b-x)}{m(x)}\, dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}}$$

sich vorn an XXII) anschliesst.

32. Nur die erste Ergänzung von XXII) scheint uns wichtig und wir wollen sie hier ausführlich anschreiben:

XXX) $$\operatorname{sgn} p \frac{\int_a^b h(x)\, dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}} > \operatorname{sgn} p \int_a^b h(x)\, m(x)\, dx$$

$$> \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b h(x)\, dx \int_a^b m(x)\, dx.$$

Wir sind ihrer Geltung auf Grund der bisherigen Entwicklung nur sicher, wenn XXVIII) und die bei 29. gemachten Voraussetzungen gelten, dazu noch die in 25. für $f(x)$ und $g(x)$

gemachten und nun gemäss 31. auf $h(x)$ und $m(x)$ zu übertragenden, so dass nun also $f(x)$, $m(x)$ und $h(x) \cdot m(x)$ monoton sein müssen. Diese Einschränkungen bilden die Schwäche von XXX).

33. Unser erster Versuch der Vervollständigung unserer Formel ist daher nur theilweise gelungen und lässt den Wunsch rege, eine bessere Ergänzung ausfindig zu machen.

34. Man könnte auf den Gedanken kommen, Ungleichungen wie

$$\text{XXXI)} \quad \begin{cases} \int_a^b \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}\, dx > \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ \int_a^b \left(\frac{f(x) + g(x)}{2}\right)^2 dx > \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \end{cases}$$

welche zunächst für positive $f(x)$, $g(x)$, dx gelten, zu diesem Zwecke heranzuziehen, aber dergleichen würde wenig Verdienst haben, denn diese neuherangezogenen Ungleichungen gelten schon für die Differentiale, stellen also keine den Integralen eigenthümlichen Sätze vor, sondern sind einfache Integrationen bekannter Sätze über integralfreie Funktionen.

Das Gute an unserer Ungleichung XXII) ist eben, dass sie nicht für die Differentiale gilt, sondern den Integralen eigenthümlich ist. Werthvoll wird also die Vervollständigung nur sein, wenn sie gleichen Charakter hat.

III. Capitel.

35. Die im I. Capitel angestellten Betrachtungen sind einer Verallgemeinerung fähig.

36. Es seien $f(x)$ und $F(x)$ für ein von a bis b laufendes x endliche, eindeutige monotone und zwar zunächst nie abnehmende Funktionen, und es sei

$$\text{XXXII)} \quad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx, \qquad \text{dabei } b > a.$$

Es sei ferner ξ ein Werth von x im Intervall und

$$\text{XXXIII)} \quad \begin{array}{ll} F(x) \leqq f(x) & \text{für jedes } x \text{ von } a \text{ bis } \xi, \\ F(x) \geqq f(x) & \text{für jedes } x \text{ von } \xi \text{ bis } b, \end{array}$$

wobei es für das Folgende ganz gleichgiltig ist, ob die Grenzwerthe $x = a$, $x = b$ mit einbezogen werden oder nicht und was man für $x = \xi$ festsetzt.

37. Wenn ξ in einem Intervall liegt, dessen sämmtliche Werthe $F(x) = f(x)$ machen, so kann jeder beliebige Werth dieses Intervalls die Stelle von ξ vertreten.

38. Das Bestehen der Gleichungen

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_a^\xi F(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_\xi^b f(x) = \int_\xi^b F(x),$$

von denen (mittels XXXII) eine die andere nach sich zieht, soll ausgeschlossen sein.

Das Bestehen dieser Gleichungen würde die Identität der Funktionen an allen Stetigkeitsstellen nach sich ziehen.

39. Es werden also die Werthe der beiden Funktionen sicher weder im Intervall von a bis ξ, noch in dem von ξ bis b überall gleich sein.

40. Denkt man sich die Integrale XXXII) in bekannter Weise durch Flächenstücke repräsentirt, so ist der Inhalt bei beiden gleich, beim Integral $\int_a^b F(x)\,dx$ aber mehr nach der einen Seite (b) verschoben.

41. Unter den gemachten Voraussetzungen ist nun:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$\text{XXXIV)} = \int_a^\xi [f(x) - F(x)]\,dx + \int_\xi^b [f(x) - F(x)]\,dx = 0$$

oder

$$\int_a^\xi [f(x) - F(x)]\,dx = \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\,dx,$$

wobei rechts und links unter dem Integralzeichen positive, höchstens zu Null werdende Funktionen (in den eckigen Klammern) stehen.

Weiter gilt:

$$\text{XXXV)}\quad \begin{aligned} &\int_a^\xi [f(x) - F(x)]\, g(x) \cdot dx \leqq g(\xi) \int_a^\xi [f(x) - F(x)]\, dx \\ &= g(\xi) \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\, dx \leqq \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\, g(x)\, dx. \end{aligned}$$

42. Das erste Gleichheitszeichen gilt nur für den Fall, dass $g(x)$ im Intervall von a bis ξ constant gleich $g(\xi)$, das zweite nur, wenn es im Intervall von ξ bis b constant gleich $g(\xi)$ ist.

43. Bezüglich der Bedeutung von $g(\xi)$ vergleiche man die Bemerkungen unter 17. Wird, um die Ungleichungen stringenter zu machen, die gelegentlich sich bietende Möglichkeit, für $g(\xi)$ zwei verschiedene Werthe zu setzen, ergriffen, so ist in der letzten Formel das mittlere Gleichheitszeichen durch $<$ zu ersetzen.

44. Durch Subtraktion des ersten Gliedes folgt aus unserer Ungleichung — nach Weglassung der beiden Mittelglieder —

$$0 \leqq \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\, g(x)\, dx - \int_a^\xi [f(x) - F(x)]\, g(x)\, dx$$

$$\text{XXXVI)}\quad 0 \leqq \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{oder}$$

$$\int_a^b F(x)\, g(x)\, dx \geqq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn $g(x)$ im ganzen Intervall von a bis b constant gleich ξ ist.

45. Bei Umkehr der Grenzen dreht sich das Ungleichheitszeichen um; beide Formen der Ungleichung sind zusammengefasst unter

$$\text{XXXVII)}\quad \operatorname{sgn}(b-a) \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx \geqq \operatorname{sgn}(b-a) \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

46. Gilt der Satz für $f(x)$ und $F(x)$, so gilt er auch für $f(x) - c$ und $F(x) - c$, wodurch die Beschränkung $f(a) > 0$ wegfällt; gilt er für $f(x)$, $g(x)$ und $F(x)$, so gilt er auch für $-f(x)$, $-g(x)$ und $-F(x)$, d. h. auch für Funktionen, die niemals zunehmen. Und: Wie $F(x)$ eine Funktion war, welche (mindestens stellenweise) grössere Werthe als $f(x)$ aufweist in jenem von ξ ausgehenden Intervall, in welchem $f(x)$ selbst grössere Werthe aufweist als im andern, so ist auch $-F(x)$ eine Funktion von analogem Verhalten gegenüber $-f(x)$, oder, um zur Beförderung des Verständnisses den Sachverhalt noch in einer andern Weise auszudrücken: Es ist die durch $-\int_a^b F(x)\,dx$ ausgedrückte Fläche im Vergleich mit der durch $-\int_a^b f(x)\,dx$ ausgedrückten etwas einseitiger massirt nach der Seite, nach der schon die Fläche $\int_a^b f(x)\,dx$ selbst stärker massirt ist. Für den Fall negativer Ordinaten und Flächen sind hier die Begriffe grösser — kleiner im algebraischen, nicht im absoluten Sinne zu nehmen, wozu die geometrische Anschauung verleiten könnte.

47. Der Fall $f(x) = \text{const.}$, bei dem die Fläche, die zu $y = f(x)$ gehört, nach keiner der beiden Seiten stärker massirt ist als nach der andern, kann — als in früheren Entwickelungen, des I. Capitels, bereits erledigt — hier ausgeschlossen werden.

48. Wird nur an Stelle des $g(x)$ die negative Funktion $-g(x)$ gesetzt, so dass es in eine niemals steigende Funktion übergeht, so ist das Ungleichheitszeichen umzudrehen, oder, um auch diesen Fall zu umfassen, ist unserer Ungleichung noch der Factor $\operatorname{sgn}[g(b) - g(a)]$ beizufügen; und ähnlich ist, um auch noch die mögliche Umkehr des Charakters von $f(x)$ und $F(x)$ zu berücksichtigen, der Factor $\operatorname{sgn}[f(b) - f(a)]$ hinzuzufügen, unter Berücksichtigung davon, dass

$$\text{XXXVIII)} \quad \operatorname{sgn}[f(b) - f(a)] = \operatorname{sgn}[F(b) - F(a)]$$

ist. Letzteres erhellt daraus, dass nur folgende zwei Möglichkeiten gegeben sind:

$$\text{XXXIX)} \quad \begin{array}{ll} F(b) \geqq f(b) > f(a) \geqq F(a) & \text{oder} \\ F(b) \leqq f(b) < f(a) \leqq F(a). & \end{array}$$

49. Also schliesslich gilt, mittels einer früher (XVI) schon eingeführten Abkürzung geschrieben:

$$\text{XL)} \quad \operatorname{sgn} p \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

eine Ungleichung, die sich der Ungleichung XXII), die wir ergänzen wollen, vorne anschliessen lässt, und aus der nun jeder sich selbst die weitere

$$\text{XLI)} \quad \operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b F(a+b-x)\, g(x)\, dx$$

ableiten mag, die sich an die nemliche Ungleichung hinten anschliessen lässt.

Vollständig angeschrieben hat dann unser Satz die Gestalt:

$$\text{XLII)} \quad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} p \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ &\geqq \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x) \int_a^b g(x)\, dx \\ &\geqq \operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx \\ &> \operatorname{sgn} p \int_a^b F(a+b-x)\, g(x)\, dx. \end{aligned}$$

50. Es seien hier, um von dem Charakter der Kurven $y = f(x)$ und $y = F(x)$ keine zu engbegrenzte Vorstellung aufkommen zu lassen, in Fig. 4 — 11 eine Anzahl Beispielsformen in Zeichnung vorgeführt. Die dünnere Linie repräsentirt immer $f(x)$, die dickere $F(x)$. Die Figuren dürften natürlich statt rechts auch anders gegen die Ordinatenaxe liegen.

Fig. 4

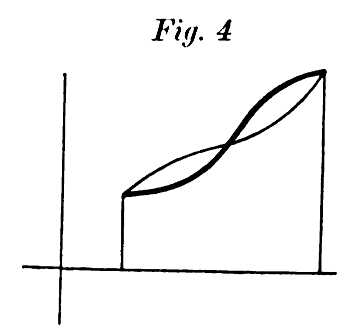


Fig. 5

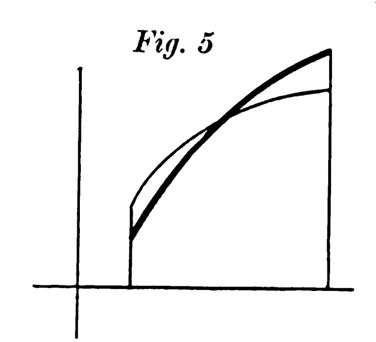


Fig. 6

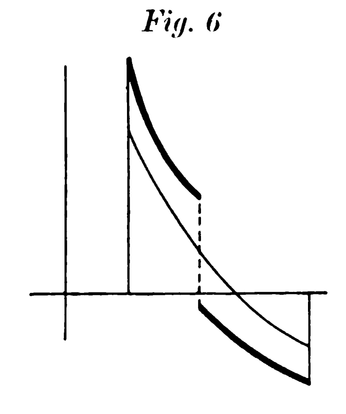


Fig. 7

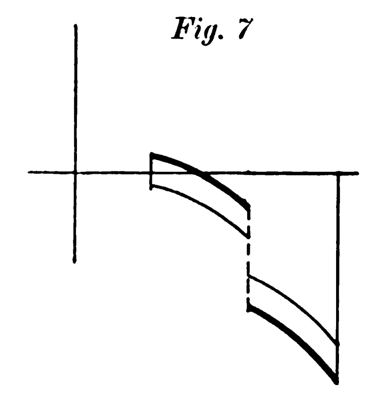


Fig. 8

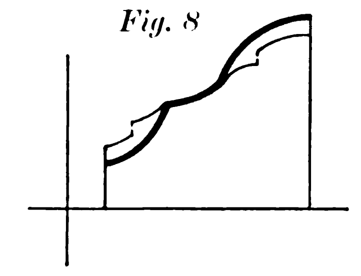
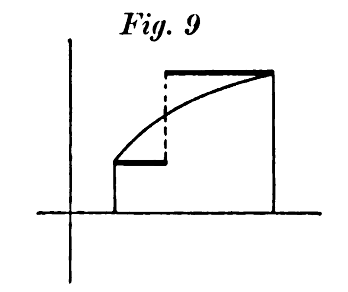
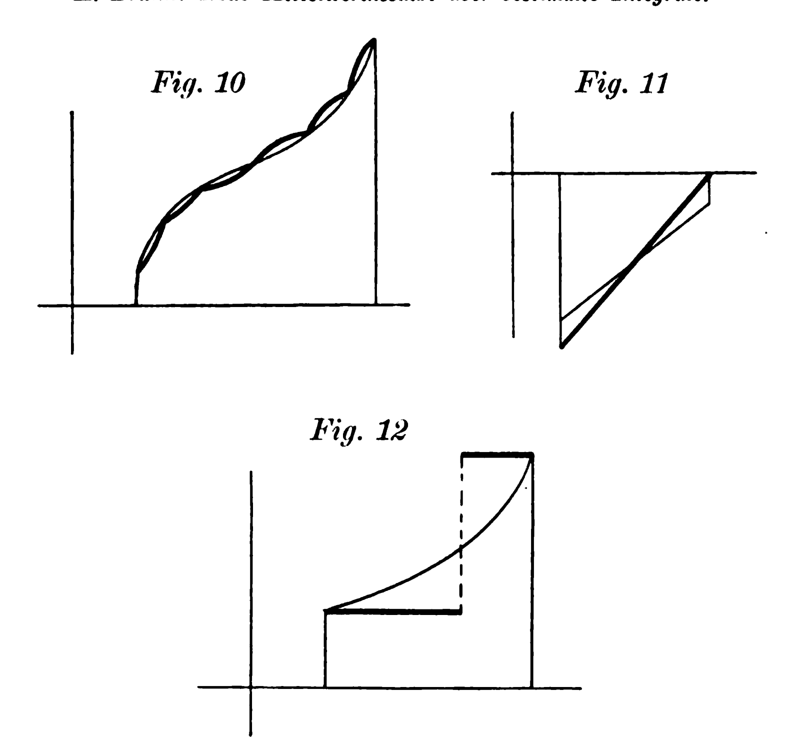


Fig. 9





51. Man kann nun versuchen, an Stelle von $F(x)$ besonders primitive Funktionen zu setzen. Z. B. man kann $F(x)$ auf der einen Seite von ξ constant gleich $F(a)$, auf der andern constant gleich $F(b)$ sein lassen[1]) (s. Fig. 12). Die Forderung XXXII) lautet dann geometrisch eingekleidet: Das Rechteck mit Grundlinie $\xi - a$ und Höhe a und das Rechteck mit Grundlinie $b - \xi$ und Höhe b müssen zusammen genommen den nemlichen Inhalt haben, wie das von der Kurve $y = f(x)$ und durch seitliche Ordinaten begrenzte Flächenstück mit der Grundlinie $b - a$.

[1]) Für den Fall, dass $f(x)$ im Intervall das Vorzeichen nicht wechselt, lässt sich auch die zu besonders einfachen Formeln führende Annahme machen, dass $F'(x)$ auf der einen Seite von ξ constant gleich Null, auf der andern etwa gleich dem äussersten Werthe von $f(x)$ sei.

52. Dass stets ein ξ zwischen a und b vorhanden ist, welches unseren Anforderungen genügt, ergibt sich leicht. Denn für eine monotone Funktion $f(x)$, $a < b$, $f(a) < f(b)$ gilt offenbar:

$$\text{XLIII)} \qquad f(a)(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < f(b)(b-a)$$

allgemeiner, wenn man

$$\text{XLIV)} \qquad \operatorname{sgn}\{[f(b)-f(a)]\,[b-a]\} = \operatorname{sgn} q' \text{ setzt:}$$

$$\operatorname{sgn} q' \cdot f(a)(b-a) < \operatorname{sgn} q' \cdot \int_a^b f(x)\,dx < \operatorname{sgn} q' f(b)(b-a)$$

d. h. $\int_a^b f(x)\,dx$ liegt unter allen Umständen zwischen $f(a)(b-a)$ und $f(b)(b-a)$, sofern nicht in Folge von $f(a) = f(b)$ oder $a = b$ alle drei Glieder gleiche Werthe bekommen.

53. Das Integral lässt sich daher — auch im Fall des erwähnten Gleichwerdens — stets mittels positiver echter Brüche $\varkappa$ und λ, deren Summe gleich 1 ist, auf die Form bringen

$$\text{XLV)} \quad J = \int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a)\cdot\lambda + f(b)(b-a)\cdot\varkappa,$$
$$(\lambda + \varkappa = 1)$$

oder mit Zuhilfenahme eines zwischen a und b liegenden Werthes ξ, der

$$\xi - a = (b-a)\lambda, \qquad b - \xi = (b-a)\varkappa$$

macht, auf die Form:

$$\text{XLVI)} \quad J = \int_a^b f(x)\,dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$$

Aus XLVI) folgt

$$\text{XLVII)} \qquad \xi = \frac{[f(b)\,b - f(a)\,a] - J}{f(b) - f(a)}$$

als vollständig bekannter Werth, wenn $J = \int_a^b f(x)\,dx$ bekannt ist.

54. Offenbar befriedigt das System der beiden geraden Strecken

$$\text{XLVIII)} \qquad \begin{aligned} F(x) &= f(a) = y, \quad (a \leqq x < \xi) \\ F(x) &= f(b) = y, \quad (\xi < x \leqq b) \end{aligned}$$

vollkommen die an eine Funktion $F(x)$ zu stellenden Anforderungen.

Es gilt daher:

$$\text{IL)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} p \int_a^\xi f(a)\, g(x)\, dx + \operatorname{sgn} p \int_\xi^b f(b)\, g(x)\, dx \\ &\qquad > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \end{aligned}$$

oder schliesslich, wenn alle nun erwiesenen Ungleichungen und eine letzte leicht zu erweisende, hinten sich anschliessende in eine Reihe gestellt werden:

$$\text{L)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} p \left[f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx \right] > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ &> \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x) \int_a^b g(x)\, dx \geqq \operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx \\ &> \operatorname{sgn} p \left[f(b) \int_a^{a+b-\xi} g(x)\, dx + f(a) \int_{a+b-\xi}^b g(x)\, dx \right], \end{aligned}$$

wobei also $f(x)$, $g(x)$ eindeutig, endlich und monoton im Intervall a bis b sind, und

$$p = [f(b) - f(a)]\,[g(b) - g(a)]\,[b - a]$$

$$\xi = -\frac{\int_a^b f(x)\,dx - [f(b)\,b - f(a)\,a]}{f(b) - f(a)} = a + \frac{f(b)(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx}{f(b) - f(a)}$$

zu setzen ist.

55. Schlussbemerkungen. Wenn F, f und g „Stufenfunktionen“ werden (in der Art, wie F in 51. eine „zweistufige“ Funktion wurde), so verwandeln sich unsere Ungleich-

ungen XLII) in die integralfreie Form: $\operatorname{sgn} p \cdot \sum_0^{n-1} F_i \cdot g_i \, \Delta x_i \geqq \operatorname{sgn} p \cdot \sum_0^{n-1} f_i g_i \, \Delta x_i$ etc.,[1]) für den Fall constanter Δx_i in: $\operatorname{sgn} q \, \Sigma F_i g_i \geqq \operatorname{sgn} q \, \Sigma f_i g_i$ etc.[2]) ($\Sigma F_i = \Sigma f_i$; die F_i und f_i monotone Grössenreihen, die Reihe $F_i - f_i$ nur einen Zeichenwechsel enthaltend etc.). Diese Summenformel entsteht hier sozusagen als die Tochter der Integralformel; sie lässt sich aber auch ohne den Umweg übers Integral beweisen und tritt dann als Schwester ihr zur Seite; ja man könnte sie sogar als die Mutter der Integralformel betrachten. (Vgl. A. Pringsheim in diesen Berichten Bd. 30, S. 212.) Unser Beweis in 52. bleibt — was eine Art Güteprobe für ihn darstellt, — auch für die Summenformel anwendbar, wenn in ihm ebenfalls alles integralische ins summarische verwandelt wird.

56. Da die am häufigsten vorkommenden Funktionen sich in Intervalle monotonen Charakters zerlegen lassen, so werden mannichfaltige Anwendungen unsrer Sätze sich ergeben. Eine Menge auch von integralfreien Ungleichheiten zwischen bekannteren Funktionen werden sich mit Leichtigkeit ableiten lassen, welche auf anderem Wege kaum immer so rasch und bequem gefunden werden. Man kann die Factoren $f(x)$, $g(x)$ einander gleich oder gleich Potenzen der nemlichen Function setzen, es lassen sich gewisse Resultate auf Produkte von mehr als zwei Faktoren verallgemeinern, und durch wiederholte Anwendung der Sätze Näherungsformeln für $\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx$ geben mit Hilfe von Integralen über die einzelnen Faktoren etc. Die Bedingung der Endlichkeit der Funktionen wird bis zu einem gewissen Grade fallen gelassen werden können.

---

[1]) Unter $x_0, x_1, \ldots x_n$ sind verstanden die der Grösse nach in eine Reihe geordneten drei Reihen von Stufenendenabscissen $\Phi_0, \Phi_1 \ldots \Phi_\lambda$; $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_\mu$; $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_\nu$ von F, f, g resp. und zwar in steigender oder fallender Anordnung, je nachdem $x_0 = a$ kleiner oder grösser als $x_n = b$ ist.

[2]) Ueber q vergl. 23.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. Mai 1902.

Herr Hermann Ebert legt eine Abhandlung des Privatdozenten an der technischen Hochschule Dr. Karl T. Fischer und des Assistenten der technischen Hochschule Heinrich Alt über: „Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffs bei niedrigen Drucken" vor.

Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffs bei niedrigen Drucken.

Von **K. T. Fischer** und **H. Alt.**

(Eingelaufen 6. Juni.)

(Mit Taf. I u. II.)

1. Magnetische bezw. kalorische Untersuchungen bei tiefen Temperaturen veranlassten uns, ein Verfahren zur Herstellung grösserer Mengen (einige Hundert ccm) reinen verflüssigten Stickstoffs auszuarbeiten. Nachdem jedoch bereits die ersten Proben, welche wir zur Prüfung ihrer Reinheit zum Erstarren brachten, zeigten, dass der Siedepunkt und Erstarrungspunkt des reinen flüssigen Stickstoffs sehr bestimmt definierte Aichpunkte für Tief-Temperatur-

messungen liefern und Erstarrungsdruck und -Temperatur nicht unwesentlich von den von Olszewski[1]) und Wroblewski[2]) ermittelten Werten abweichen (anderweitige Bestimmungen des Erstarrungspunktes von Stickstoff scheinen nicht gemacht worden zu sein), führten wir eine Neubestimmung der letzteren beiden Konstanten aus und stellten bei dieser Gelegenheit auch die Dampfspannungskurve gesättigten Stickstoffs für Drucke zwischen einer Atmosphäre und dem der Erstarrungstemperatur entsprechenden Dampfdrucke fest. Da gerade die schwer verflüssigbaren Gase in theoretischer Hinsicht ein besonderes Interesse bieten, wollen wir im folgenden Aufsatze nicht nur über die unmittelbaren Versuche berichten, sondern auch einige mehr theoretische Betrachtungen an dieselben anschliessen.

2. Zur Herstellung des reinen gasförmigen Stickstoffs verwendeten wir eine von Herrn Prof. Muthmann erprobte Reinigungsmethode: In der 5 Literflasche *A* wurden in 3 Liter Wasser 600 g technisch reiner Salmiak und 300 g Kaliumbichromat unter Erwärmen aufgelöst und nachdem die Lösung bis zum Kochen erhitzt war, aus dem Tropftrichter *B*, dessen Tropfröhre genügend lang ist, um den Druck in den Waschflaschen zu überwinden, Natriumnitrit (technisch rein, 600 g in 800 ccm Wasser) zugeführt. Der sich entwickelnde Stickstoff wurde nach dem Passieren einer Vorlegeflasche *C* durch eine grosse Flasche *D*, die mit einer Lösung von Eisenvitriol, mit Krystallen im Ueberschuss, gefüllt war, in die 22 und 26 Liter fassenden Gasometer *E* und *F* geleitet. Aus den genannten Materialmengen können bis zu 200 l gasförmigen Stickstoffs erhalten werden; um jedoch ohne Unterbrechung der Entwickelung grössere Mengen zu gewinnen, führten wir durch den Gummistopfen der Flasche *A* noch 2 Glasröhren ein,

---

[1]) K. Olszewski, Compt. Rend. 99, p. 133—136, 1884 und 100, p. 350—352, 1885, Phil. Mag. V 39, p. 200 und 210, 1895, referiert in Fortschr. d. Phys. 41, 2, S. 455, 1885 u. Wied. Beiblätter 9, S. 247, 1885.

[2]) S. Wroblewski, Wiener Akademieberichte 90, 1885; Landolt und Börnstein, physikalisch-chemische Tabellen S. 126, 1894.

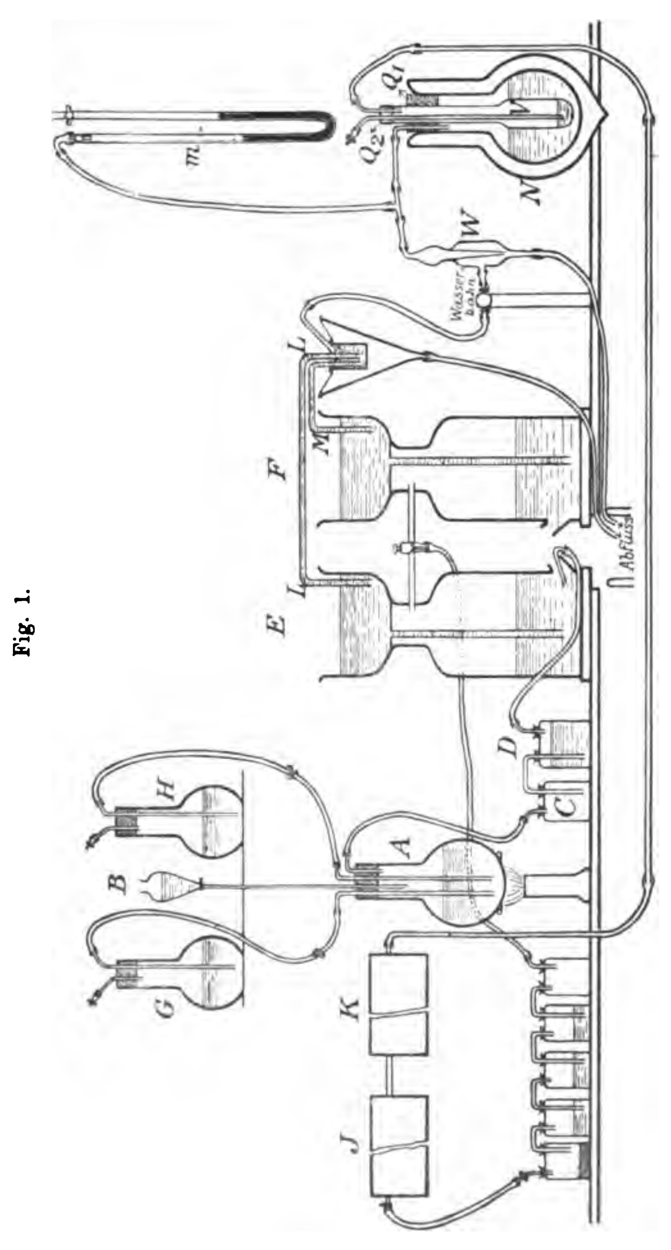


Fig. 1.

die mit den Vorratsflaschen G und H in Verbindung stehen. Nachdem zur erstmaligen Füllung von A die entsprechende Menge Natriumnitrit zugeführt ist, werden ca. $1^1/_2$ l der verbrauchten Lösung in die eine der Flaschen G und H abgelassen und dafür aus der anderen $1^1/_2$ l frische Lösung zugeführt. Ist dieselbe gut vorgewärmt, so hält auch während des Zuströmens in den grösseren Ballon die Gasentwickelung an. Die Reinigung des Stickstoffgases erfolgt erst unmittelbar vor der Verwendung desselben, und zwar wird zu diesem Zweck der Stickstoff aus dem einen der Gasometer entnommen, während der andere aus dem Entwicklungsapparat frisch gefüllt wird. Es wird der Stickstoff durch 3 Trockenflaschen mit reiner konzentrierter Schwefelsäure und durch eine weitere Flasche mit Phosphorpentoxyd in die Verbrennungsröhren J und K geleitet, deren jede in der ersten Hälfte mit Kupfer in der zweiten mit Klavierstahldrahtstückchen gefüllt ist, und welche beide vor jedem Versuch unter Erhitzen bis zu heller Rotglut mit gereinigtem Wasserstoff einige Stunden lang reduziert worden sind. Jede der Verbrennungsröhren ist 1 m lang und hat 12 mm lichten Querschnitt; das zweite Verbrennungsrohr zeigte sich in der Regel fast gar nicht angegriffen; namentlich blieb das Kupfer sehr rein, während manchmal das Eisen auf 1—3 cm Länge auch in der zweiten Röhre angegriffen war. Aus K wird der gereinigte Stickstoff durch eine Glasröhre und über Phosphorpentoxyd (bei den ersten Versuchen war noch eine Flasche mit pyrogallsaurem Kali zwischen Glasröhre und dem P_2O_5 eingeschaltet) dem Verflüssigungsapparat V zugeführt. Um den Zufluss des Wasserleitungswassers, das für die Gasometer verwendet wurde, automatisch zu regulieren, brachten wir die Heberverbindung LM an. Das Niveau in den Gasometeraufsätzen wird durch die Höhe des in einen Trichter eingehängten Becherglases, welches von der Wasserleitung gespeist wird, geregelt.

3. Zur Verflüssigung wird der Stickstoff in das unten auf 4 cm Durchmesser erweiterte ca. 130 ccm fassende Rohr V eingeleitet, welches mittelst eines weichen Gummi-

stopfens Q_1 in die $2\,^1/_2$ l haltende Dewarflasche N eingesetzt ist; lässt man in dieser mit Hilfe einer Wasserluftpumpe W unter vermindertem Druck flüssige Luft verdampfen, so kühlt sie sich genügend stark ab, um den in V einströmenden Stickstoff zu kondensieren. Ist die Dewarflasche mit frisch hergestellter Luft beschickt, so genügt bereits ein Druck von 400—250 mm, um eine kräftige Kondensation in V herbeizuführen; wenn die Luft infolge der Verdampfung bereits einen grösseren Betrag ihres Stickstoffes, der bekanntlich zuerst abdestilliert, verloren hat, muss der Druck bis auf 150 oder sogar 70 mm reduziert werden. Da die Dichte des flüssigen Stickstoffes 0,791 g/ccm beträgt,[1]) lassen sich ungefähr 3—4 Gasometerfüllungen in V kondensieren. Um V zu entleeren, ist in V mittelst des luftdicht aufgesetzten Gummistopfens Q_2 eine sehr dünnwandige ca. 5 mm weite Glasröhre eingeführt, welche bis auf den Boden reicht, und während der Kondensation oben durch einen dünnen Gummischlauch mit Quetschhahn verschlossen ist; hebt man nach Abstellung der Wasserluftpumpe und Herstellung von atmosphärischem Druck in N das Kondensationsgefäss V aus der Dewarflasche heraus, indem der auch während der Kondensation ziemlich weich bleibende Gummistopfen Q_1 gelüftet und gehoben wird, so wird durch den bei der Erwärmung von V entstehenden Ueberdruck der flüssige Stickstoff aus V ausgetrieben; er wird sofort in ein versilbertes $^1/_4$ l haltendes Dewargefäss (von Glasbläser R. Ebermayer in München, Schillerstrasse, hergestellt) eingefüllt, und dies dann mit einem Gummistopfen hermetisch verschlossen. Der in demselben sich entwickelnde Stickstoffdampf wird mittels Gummischlauches in den gerade in Füllung befindlichen Gasometer zurückgeleitet, damit er nicht verloren geht. Wir haben auf verschiedene Weise versucht, den flüssigen Stickstoff aus dem Gefäss V zu entnehmen, namentlich versuchten wir, durch Einpressen von Stickstoffgas oder durch eine in V eingeführte elektrisch zu erhitzende Spirale

---

[1]) Travers, Experim. Study of Gases, London 1901, S. 247.

den nötigen Ueberdruck zu erzielen; wir hielten es aber schliesslich für das bequemste, das ganze Gefäss *V* sammt den Gummistopfen aus der Dewarflasche herauszuheben, um den verflüssigten Stickstoff abzuzapfen. Wenn man den Gummistopfen etwas mit Glycerin einfettet, ist es nicht schwierig, ihn zu lösen; der Zeitverlust, der dadurch entsteht, beträgt nur wenige Minuten. Mit Verwendung zweier parallel geschalteter Wasserluftpumpen, welche einen Raum von 9 l in einer Minute auf 250 mm, in 7 Minuten auf 20 mm leer pumpten, waren wir imstande, in 1 $^1/_4$ Stunden den für 100 ccm Flüssigkeit nötigen Stickstoff zu entwickeln und zu kondensieren. Trotz der grossen Geschwindigkeit, mit welcher in diesem Falle das Gas durch die Waschflaschen und die Verbrennungsöfen circulierte, war es genügend trocken und frei von Sauerstoff. Eine von Zeit zu Zeit gemachte Gasanalyse auf Sauerstoff, welche wir mit Hilfe der Hempel'schen Absorptionspipette mit Kupfer in ammoniakalischer Lösung vornahmen, zeigte jedenfalls nur Sauerstoffgehalt von weniger als 0,2 $^0/_0$ an. Ausserdem spricht für die Reinheit des erhaltenen Kondensationsproduktes die Konstanz des Siedepunktes der wasserklaren Stickstoffflüssigkeit, die auch vor den Spektralapparat gebracht im sichtbaren Teil des Spektrums keine besonders bemerkenswerten Absorptionsstreifen zeigte; selbst ganz geringe Beimengungen von Sauerstoff machten sich sofort in der Erhöhung des Siedepunktes des Stickstoffes bemerkbar, wie wir bei allen Versuchen konstatieren konnten.

4. Alle Temperaturmessungen wurden anfänglich mit selbst angefertigten Thermoelementen aus Kupfer und Konstantandraht[1]) von 0,5 mm Dicke ausgeführt, die in der Stichflamme mit Silber gelötet waren; nachdem sich gezeigt hatte, dass bei der grossen Reihe von Versuchen (es wurden über 10 einzelne Bestimmungen mit mindestens durchschnittlich

---

[1]) Bezogen von der Firma Siemens und Halske, von der wir auch vor einem Jahre ein von der phys. techn. Reichsanstalt geaichtes Thermoelement aus gleichem Material erhalten hatten.

40—150 ccm flüssigem Stickstoff gemacht) der Siedepunkt und Gefrierpunkt konstant blieb, nahmen wir für die Bestimmung des Siedepunktes und Erstarrungspunktes Messungen mit dem Wasserstoffthermometer vor. Die Verwendbarkeit des Wasserstoffthermometers für diese niedrigen Temperaturen ist bereits von K. Olszewski[1]) und neuerdings von J. Dewar[2]) durch Vergleich der Angaben von Wasserstoff-, Sauerstoff- und Helium-Thermometern für den Siedepunkt des Wasserstoffes — 252,5° oder 20,5° der absoluten Temperatur erwiesen worden. Namentlich wenn sich Wasserstoff bei der Messung von tiefen Temperaturen unter geringem Druck befindet, dürfte gegen seine Verwendung für Temperaturen, die oberhalb seines Kondensationspunktes liegen, nichts einzuwenden sein. Das Wasserstoffthermometer war ein Thermometer für konstantes Volum von der Jolly'schen Form; für die Messung tiefer Temperaturen verdient dieses Gasthermometer vor dem Gasthermometer für konstanten Druck den Vorzug, da nach der van der Waals'schen Gleichung der Spannungscoefficient bei gleicher Dichte von der Temperatur unabhängig ist, wenn auch sonst das Callendar'sche[3]) kompensierte Gasthermometer für konstanten Druck seine Vorteile haben mag. Die Ablesung erfolgte mittelst eines Kathetometers an einem unmittelbar neben dem Thermometer aufgehängten Normalmassstab aus Messing von Breithaupt in Kassel. Der Massstab war mit einer von der physikalisch-technischen Reichsanstalt beglaubigten Normale verglichen worden. Neben dem Thermometer befand sich auch das Barometer, ein neues Ballon-instrument von Fuess in Berlin; die Ablesung erfolgte auf $^1/_{10}$, manchmal $^1/_{20}$ mm genau. Es wurden 2 Thermometer (I und II) hergestellt, die aus Jenenser Glas 16 III von Bender & Hobein in München verfertigt waren. Ihre Gefässe hielten 12,90 bezw. 15,37 ccm bei 0°, die Röhren, in denen der Meniskus

1) K. Olszewski, Sitzungsberichte der Krakauer Akad. d. Wiss. 14, p. 283—288, 1886.

2) J. Dewar, Proceed. of the Royal Society vol. 68 p. 64—54, 1901.

3) H. L. Callendar, Proc. Roy. Soc. 50, S. 247, 1891.

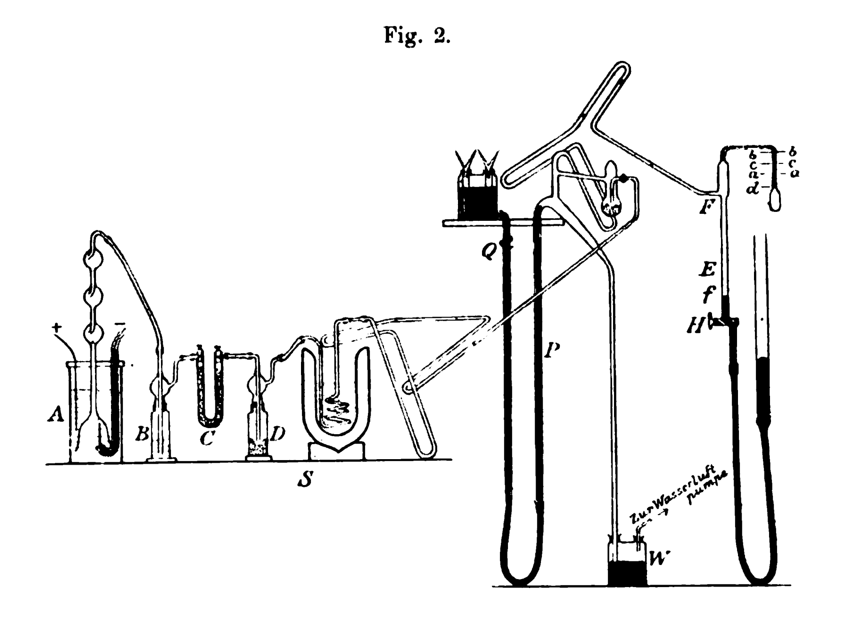
stand, hatten 10 mm lichte Weite. Die Verbindung des Gefässes mit dem Manometer vermittelte eine Kapillare von 301 bezw. 373 mm Länge und 0,6 mm Durchmesser. Es war dies eine für den raschen Ausgleich des Druckes hinreichende Weite: ein Vorversuch hatte uns gezeigt, dass sich durch eine solche Kapillare von 300 mm Länge bei Luftfüllung der Druck in 10 Sekunden vollständig ausgleicht. Der schädliche Raum über dem Meniskus wurde so klein gewählt, als es mit Rücksicht auf die ungestörte Ausbildung des Meniskus möglich erschien. Die Einstellung des Meniskus erfolgte auf die Spitze eines Dorns aus dunklem Glase. Der schädliche Raum dieser Erweiterung betrug nur 0,118 bezw. 0,131 ccm, der Inhalt der Kapillaren 0,113 bezw. 0,159 ccm. Sämmtliche Volumina wurden mit Quecksilber sorgfältig ausgewogen. Eine von aussen auf das Thermometergefäss I ausgeübte Compression von 700 mm Hg bewirkte nur eine Volumveränderung von weniger als $^1/_{15000}$ und blieb daher im folgenden ausser Betracht. Ueber die Verwendung des schädlichen Raumes zur Korrektur s. u. Die Füllung der Thermometer erfolgte mit elektrolytisch erzeugtem Wasserstoff. Derselbe wurde in dem Apparate *A* bei einer Stromdichte von ca. 0,02 Ampère pro qcm erzeugt. Durch einen Gummischlauch wurde er zu der mit pyrogallussaurem Kali gefüllten Flasche *B* geleitet. Von hier an bestanden alle Verbindungen aus Glasröhren und Glasfedern, die mit Siegellack luftdicht in die Waschflaschen eingekittet waren.[1]) Auf die erste Waschflasche folgte eine U-Röhre *C* mit Chlorcalcium, eine Flasche mit Phosphorpentoxyd *D* und endlich eine Glasspirale *S*, die in eine mit flüssiger Luft gefüllte Dewar'schen Flasche gehängt werden konnte, sodass jede Feuchtigkeit aus dem durchströmenden Gase ausgefroren, bezw. leichter kondensierbare Gase abgeschieden wurden. Nach nochmaligem Passieren eines an der Sprengelpumpe *P* angebrachten Trockengefässes mit Phosphorpentoxyd gelangte das Gas in das mit Hilfe des Füllröhr-

---

[1]) Holborn und Wien. Wied. Ann. 59, 213, 1896.

chens F an die Pumpe angeschmolzene Thermometer. Es wurde das erste Thermometer dreimal, das zweite fünfmal mit sämmtlichen Trockengefässen bis zur Flasche B bis zum metallischen Anschlag des Quecksilbers leer gepumpt und jedesmal nach dem Evakuieren mit Wasserstoff durchgespült. Um die an der Wand des Gefässes adsorbierten Gase sicherer auszutreiben, waren in dasselbe vor dem Anschlusse an die Pumpe ca. 15 g Quecksilber eingebracht worden, die nach dem

Fig. 2.



erstmaligen Evakuieren durch die Kapillare hindurch unter kräftiger Erwärmung herausdestilliert wurden. Ausserdem wurde auch die ganze Röhre E stark erwärmt. Um die Wirkung der Sprengelpumpe zu erhöhen und namentlich das Hängenbleiben von kleinen Luftbläschen am Fallrohr zu verhindern, war die Wulff'sche Flasche W an eine Wasserluftpumpe angeschlossen. Das Gas strömte langsam (im Verlauf einer Stunde und länger) in das Thermometer; dabei war

das letztere bis zur Stelle *f* mit Quecksilber gefüllt. Nach der letzten Füllung wurde dann bei *F* abgeschmolzen. Die Füllung war so bemessen, dass die Thermometer bei 0° einen Druck von 974 mm bezw. 955 mm zeigten. Die Länge des Rohres *E* war so gewählt, dass der Hahn *H* auch bei der tiefsten gemessenen Temperatur noch unter Ueberdruck stand. Um die Unsicherheit, die der schädliche Raum mit sich bringt, möglichst zu verkleinern, erfolgte die Berechnung desselben unter den folgenden Voraussetzungen: Das Thermometergefäss befinde sich bis zum Strich *aa* in der zu messenden Substanz. Von dem Strich *bb* an befinde es sich in Luft. Für die Strecke *aa—bb* wurde dann eine mittlere Temperatur zwischen der der Luft und der zu messenden Substanz angenommen, oder was dasselbe ist, es wurde die Hälfte von *aa—bb*, nämlich *aa—cc* zu dem Thermometergefäss, *bb—cc* zum schädlichen Raume gerechnet. Es ergaben sich dabei folgende Verhältnisse:

	Eispunkt	Siedepunkt des N_2	Schmelzpunkt des N_2
Thermometer I	$cd = 95$ mm	$cd = 95$ mm	$cd = 85$ mm
„ II	$cd = 90$ „	$cd = 90$ „	$cd = 80$ „

Beachtet man in der von Kohlrausch in seinem Lehrbuche S. 153 angegebenen Formel:

$$H_0\left(v + \frac{v'}{1 + a t'}\right) = H\left(\frac{v \cdot (1 + \gamma t)}{1 + a t} + \frac{v'}{1 + a t'}\right),$$

dass sich das Verhältnis der Volumina v — des Gefässes und v' — des schädlichen Raumes gemäss obiger Voraussetzung ändert, dass ferner der schädliche Raum zur Zeit der Bestimmung des Druckes H_0 (Eispunkt) eine andere Temperatur hatte als zur Zeit der Beobachtung, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$H_0\left(v_1 + \frac{v_1'}{1 + a t_1'}\right) = H\left(\frac{v_2(1 + \gamma t)}{1 + a t} + \frac{v_2'}{1 + a t_2'}\right).$$

Dabei ist

v_1 = Volum des Gefässes für den Eispunkt } bei d. Temp. 0°,
v_2 = „ „ „ „ „ Punkt t }

(wobei sich v_2 nur durch die andere Länge des zum Gefäss zu rechnenden Kapillarenstückes von v_1 unterscheidet, ohne Rücksicht auf die Wärmeausdehnung).

v_1' = Volum des schädlichen Raumes beim Eispunkt } bei d.
v_2' = „ „ „ „ „ Punkt t } Zimmertemp.

$k_1 = \frac{v_1'}{v_1}$ $k_2 = \frac{v_2'}{v_2}$,

t_1' = Temperatur des schädlichen Raumes beim Eispunkt,
t_2' = „ „ „ „ „ Punkt t,
H_0 = Druck beim Eispunkt,
H = „ „ Punkt t,
α = Spannungscoefficient des Wasserstoffs (= 0.0036625[1]) Dewar Proc. Roy. Soc. 68, p. 47, 1901,
γ = der Ausdehnungscoefficient d. Glases (= 0.0000219) zwischen 0 und —180° Baly, Phil. Mag. V, 49, S. 518, 1900.

Zur Berechnung kann man die obige Gleichung umformen in:

$$\frac{H_0}{H} \cdot \frac{v_1}{v_2}\left(1 + \frac{k_1}{1 + \alpha t_1'}\right) - \frac{k_2}{1 + \alpha t_2'} = \frac{1 + \gamma t}{1 + \alpha t} = n$$

und

$$t = \frac{1 - n}{n\alpha - \gamma} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - n}{\alpha - \frac{\gamma}{n}},$$

Gleichungen, die zur praktischen Berechnung bequemer sind. Die Verhältnisse k_1 und k_2 waren bei unseren Thermometern

k_1	k_2
Eis- bezw. Siedepunkt der Substanz	Schmelzpunkt der Substanz
Für Thermometer I 0.01510	0.01537
„ „ II 0.01637	0.01663

[1]) D. i. der Wert, den Chappuis bei seiner eingehenden Untersuchung des Constant-Volumthermometers ermittelte (Trav. et Mem. du Bureau Internat. Tom. VI. S. 53, 1888).

Setzt man in den von Kohlrausch l. c. angegebenen Formeln zur Berechnung der Fehler unsere Konstanten ein, so erhält man als Fehler in der Temperaturbestimmung bei — 200° die Fehler.

Unsicherheit	Fehler in Graden Cels.
$\Delta H = 0.1$ mm	0.03
$\Delta H_0 = 0.1$ „	0.02
$\Delta a = 0.0_6 5$ mm	0.025
$\Delta \gamma = 0.0_5 2$ „	0.06

($\Delta \gamma$ = Differenz zwischen 0.000024 nach Holborn u. Wien l. c.)
und 0.000022 „ Baly l. c.

$\Delta k = 0.0003$	0.044

entsprechend 1 cm Unsicherheit in der Länge der Kapillaren

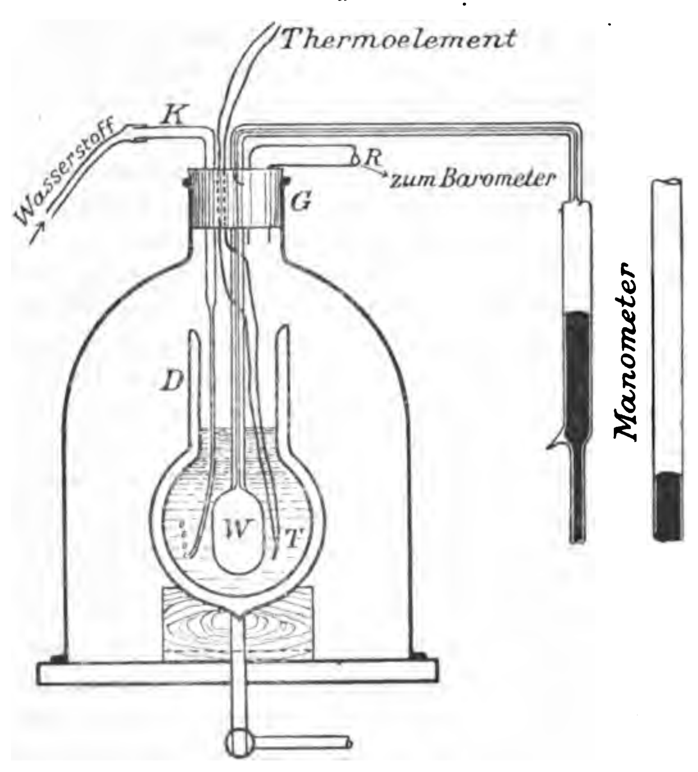
$\Delta t' = 1°$	0.01.

Dabei sind alle Unsicherheiten mit Ausnahme von ΔH und ΔH_0 extrem hoch angenommen. Es wird sich also in Wirklichkeit kaum ein Fehler > 0,1° ergeben. In der That zeigen die Angaben des Wasserstoffthermometers und des Thermoelementes auf der beigegebenen Kurve eine weit grössere Uebereinstimmung. Thermometer I brach schon bei der 4. Bestimmung infolge des auf die Kapillare durch den Gummistopfen, der die Einführung in einen Recipienten vermittelte, ausgeübten Biegungsdruckes. Von da ab wurde Thermometer II verwandt. Der Nullpunkt wurde öfters kontrolliert und blieb innerhalb der Ablesegenauigkeit konstant.

5. Zur Bestimmung des Siede- und Gefrierpunktes des Stickstoffs wurde ein kugeliges unversilbertes Dewarfläschchen von 153 ccm Inhalt, bezw. ein zylindrisches von 4 cm innerer Weite und 12 cm Höhe (102 ccm Inhalt) verwendet. Es stand dasselbe unter einem grossen Luftpumpenrecipienten, dessen oberer Tubus genügend weit war, um das Wasserstoffthermometer *W*, das an einem längs Holzstatif gleitenden Schlitten befestigt war, einsenken zu können. Um luftdichten Abschluss zu erhalten, wurde ein Gummistopfen *G* erst mit einer für die Thermometerkapillare passenden Bohrung versehen, glatt in der Mitte auseinander geschnitten, und dann

zum Abschluss des Recipiententubus verwendet. Auch bei den Bestimmungen des Siedepunktes wurde sorgfältig darauf geachtet, dass der flüssige Stickstoff so rasch wie möglich unter den Recipienten gebracht und gegen die atmosphärische Luft abgeschlossen wurde, damit der Sauerstoff der atmosphärischen

Fig. 3.



Luft, der sehr rasch in den flüssigen Stickstoff hineinkondensiert, den Stickstoff nicht verunreinigen konnte. Jede solche Verunreinigung macht sich in der Erhöhung der Siedetemperatur bemerkbar. Für die Bestimmung der Siedepunkte bei niedrigem Druck bot die in der Figur angegebene Aufstellung des Dewar'fläschchens unter einem

Recipienten den Vorteil, dass die entweichenden Stickstoffdämpfe, welche ganz in der Nähe des Fläschchens nach der Bodenöffnung des letzteren hinströmen, zur Kühlung der Umgebung des Fläschchens ausgenützt werden konnten. Namentlich bei künstlicher Beleuchtung konnte man deutlich die nur etwa 1 cm dicke Schicht des abziehenden Stickstoffdampfes beobachten, da der Recipient sich nie so weit abkühlte, dass er sich aussen beschlagen hätte. Durch die eine Hälfte des Stopfens war ein 1 cm weites Rohr *R* eingeführt, welches zu einem Heberbarometer führte; durch die andere ging ein dünn ausgezogenes Glasröhrchen *K*, mittelst dessen gereinigter und getrockneter Wasserstoff (elektrolytisch oder zum Teil auch aus Zink und Schwefelsäure hergestellt) in den flüssigen Stickstoff eingeleitet werden konnte; diese Massregel, welche auch von Estreicher[1]) für die Bestimmung der Dampfspannungskurve des Sauerstoffes angewendet worden ist, hatte den Zweck, die Siedeverzüge hintan zu halten, welche sich sonst im flüssigen Stickstoff namentlich bei sehr geringen Drucken in hohem Masse einstellen. Es meint zwar Baly,[2]) es genüge zur Vermeidung der Siedeverzüge nur dann der Wasserstoffstrom, wenn er sehr heftig gehe und vermied daher die Siedeverzüge dadurch, dass er Kupferstückchen in die Flüssigkeit warf. Allein wir fanden, dass dieser Kunstgriff nicht wesentlich besser wirkt, als das Einführen von Wasserstoff und da letzteres Verfahren erheblich bequemer ist, so wandten wir bei unseren Versuchen in der Regel nur dieses Hilfsmittel an. Im Gegenteil fanden wir bei einigen Versuchen, welche wir eigens anstellten, um den Einfluss der Stärke des hindurchgeblasenen Wasserstoffstroms zu verfolgen, dass man gerade einen zu heftigen Wasserstoffstrom vermeiden muss. Man kann nämlich auf diese Weise leicht den Stickstoff unter seine Siedetemperatur abkühlen. Vielleicht ist die Bemerkung Baly's (l. c.), dass die Estreicher'schen Werte für die Siedetempe-

---

[1]) Estreicher, Phil. Mag. V 40, p. 454, 1895.
[2]) E. C. C. Baly, Phil. Mag. 49, p. 526, 1900.

ratur des Sauerstoffes niedriger sind als die Baly'schen, ein Zeichen dafür, dass Estreicher eher zu viel als zu wenig Wasserstoff hindurchgetrieben hatte. Das Einwerfen von Kupferstückchen hat jedenfalls den Nachteil, dass die Wirkung derselben sofort verschwindet, wenn sie sich genügend abgekühlt haben, was ziemlich rasch geschieht. Dass man bei den Messungen der Siedetemperaturen des Stickstoffs nicht gut die Temperatur des Dampfes bestimmen kann, weil seine Wärmeleitungsfähigkeit offenbar sehr gering ist, und ausserdem die dazu erforderlichen Mengen Flüssigkeit sehr erheblich wären, bringt eine wohl zu beachtende Unsicherheit in die Dampfspannungsmessungen. Macht man, um von denselben ein ungefähres Bild zu erhalten, vergleichende Versuche mit Wasser, indem man einerseits die Temperatur des siedenden Wassers, andererseits die des sich daraus entwickelnden Dampfes misst, so ergibt sich eben die alte Erfahrung, dass die Temperatur des Wassers stets etwas höher ist als die des Dampfes. Die beiden Temperaturen werden aber einander um so näher gleich, je kleiner die Dampfbläschen sind, die sich im Wasser entwickeln, gleichgültig, welches Hilfsmittel man anwendet, um solche kleine Bläschen zu erzielen. Durch Einbringen von kleinen, sehr spitzen Karborundumstückchen von $^1/_{60}$—$^1/_6$ mm mittleren Durchmesser konnte in Wasser der geringste Siederverzug erhalten werden (bis herab zu 0.2°), während ohne dieselben die Wassertemperatur ohne weiteres mehr als 1° zu hoch war, und auch nach Einwerfen von roten Tariergranaten, wie sie in dem Beckmann'schen Apparat verwendet werden, noch ein Temperaturüberschuss von 0.6° vorhanden war. Da man in allen diesen Fällen bemerkt, dass ein um so heftigeres Stossen im Wasser eintritt, je grösser die Siederverzüge sind, so gingen wir bei unseren Versuchen mit flüssigem Stickstoff darauf aus, ein möglichst stossfreies und gleichmässiges Sieden zu erzielen. Zum Teil trat dieses von selbst ein, indem sich an den Rauhheiten des Dewarfläschchens zahlreiche winzige Bläschen bildeten, und indem das Thermoelement als spitziger Heizkörper wirkte, so dass wir sehr häufig, namentlich bei

höherem Druck der Wasserstoffzufuhr gar nicht bedurften. um gleichmässiges und doch lebhaftes Sieden zu erzielen; zum Teil unterstützten wir die Entstehung von kleinen Bläschen durch eingelegte dünne Palladiumdrahtstückchen, die vorher mit Wasserstoff frisch beladen waren und durch Einblasen von Wasserstoff, der in kleinen Bläschen eintreten konnte. Die wesentlichste Garantie dafür, dass nicht besonders störende Siedeverzüge bei unseren Versuchen — namentlich bei den späteren — vorhanden sein konnten, erblickten wir in dem Ausbleiben von grösseren Stössen. Da das Thermoelement alle diese Stösse sofort anzeigte, so konnten wir — hauptsächlich durch Regulierung des Wasserstoffstromes — dafür sorgen, dass diese Siedeverzüge jedenfalls nur sehr klein waren und dass während der Versuche nur sehr geringe, aber sehr rasch sich folgende Siedeverzüge auftraten. Da unmittelbar nach dem Stossen eines mit Siedeverzug siedenden Wassers dessen Temperatur sich der Siedetemperatur nähert, so glaubten wir durch unsere Kriterien noch am sichersten die richtigste Siedetemperatur ermitteln zu können. Selbstverständlich wurde daraut gesehen, dass jede Temperatur einige Minuten konstant hielt, wenn der Druck konstant gehalten wurde. Die Schwankungen des letzteren konnten ohne grosse Schwierigkeit auf weniger als $^1/_2$ bis 1 mm gebracht werden. Unter Umständen könnte der Wasserstoff als Störung auftreten, nämlich dann, wenn er etwa in dem Stickstoff sich lösen und dadurch dessen Siedepunkt und Gefrierpunkt verändern würde. Es sind indessen die Mengen nur sehr gering (auf ca. 50 ccm flüssigen Stickstoff ca. 100—200 ccm Wasserstoff) und bei unseren ersten Versuchen, in welchen wir Stickstoff ohne Durchleiten von Wasserstoff zum Erstarren brachten, und in welchen wir mit einem noch $^1/_{100}$ Millivolt angebenden Voltmeter von Siemens und Halske die Erstarrungstemperatur massen, haben wir auch nie andere Erstarrungspunkte beobachtet, als bei den späteren Versuchen, in welchen wir grösstenteils auch dieses Millivoltmeter zur ungefähren Kontrolle mit angeschlossen hatten. Der verdampfte Stickstoff wurde bis zu einem Druck von 150 mm

mittels einer Wasserluftpumpe fortgeschafft; für kleinere Drucke wurde eine Bianchi'sche Pumpe mit oscillierendem Kolben verwendet, die von einem einpferdigen Elektromotor angetrieben wurde, und einen Raum von 9 Liter Inhalt in 2 Minuten auf 4 mm leer zu pumpen imstande war. Um den Druck im Recipienten bequem regulieren und längere Zeit konstant halten zu können, war an die Saugleitung ein mikrometrisch verstellbarer Hahn angeschlossen, durch den Luft in die Pumpenleitung eingelassen werden konnte. Das Thermoelement T, welches neben dem Wasserstoffthermometer eingeführt war, wurde einfach zwischen die beiden Gummistopfenhälften oder zwischen Gummistopfen und Glastubus eingeklemmt. Der Erstarrungspunkt des ganz reinen Stickstoffs ist ein sehr gut definierter Punkt. Ist der Druck unter dem Recipienten, auf ca. 90 mm vermindert, so bildet sich bei weiterer Druckerniedrigung an der Flüssigkeitsoberfläche Stickstoffeis, das zunächst als trübe, schwach blassgraue Masse erscheint und zu Boden sinkt. Gleichzeitig entwickelt sich an dem aus dem Kapillarrohre austretenden Wasserstoffstrom ein dünnes rohrartiges Stück von festem Stickstoff, das beim Erschüttern der Kapillare zu Boden fällt und dann wieder schmilzt. Die Dichte des festen Stickstoffs ist somit grösser als die des flüssigen, das heisst grösser als 0.791 und zwar wahrscheinlich nicht unerheblich grösser. Bei weiterer Abkühlung des Gemisches aus flüssigem und festem Stickstoff tritt allmählich eine vollständige Erstarrung des ganzen Gemisches ein. Bei einem Druck von 89 bis 77 mm ist die Füllung in Stickstoffeis verwandelt, das weiss aussieht und einen ähnlichen Eindruck macht, wie wässriger Schnee; flüssiger Stickstoff, welcher bis zum Erstarrungspunkt hin leicht beweglich ist, geht in eine etwas gallertartig aussehende Masse über, bevor er gefriert. In der folgenden Tabelle sind die verschiedenen Werte für den Siedepunkt und Erstarrungspunkt angegeben, welche das Wasserstoffthermometer ergab.

Spannungscoefficient für Wasserstoff $\alpha = 0.0036625 = \frac{1}{273.04}$	Siedepunkt		Druck mm	Erstarrungspunkt		Druck mm
	Angabe des Wasserstoffthermom.	E. M. K. des Thermoelements		Angabe des Wasserstoffthermom.	E. M. K. des Thermoelements	
Thermometer II.	— 195.75	5.029	711.1			
"	— 195.98	5.033	711.0	— 210.84 (für die drei Reihen)	5.2364	77
"	— 196.03	5.033	711.0			
Thermometer I.	— 196.08	5.037	710.1			
"	— 196.14	5.035	715.5	— 210.87	5.2381	75—76
Thermometer II.	— 196.17	5.036	714.0	— 210.35 — 210.39	5.2342 5.2351	89
"	— 196.21	5.036	715.1	— 210.41	5.2351	81
Mittel	— 196.05	5.0341		— 210.57	5.2356	

Bei einer Messung kühlten wir den festen Stickstoff noch weiter ab, indem wir den Druck bis auf 62 mm erniedrigten; das Wasserstoffthermometer zeigte bei diesem Druck — 211.65° C. an. Das Thermoelement lieferte in diesem Falle keine brauchbare Angabe mehr, da der feste Stickstoff ein sehr schlechter Wärmeleiter ist, was schon Olszewski betont. Der Anblick des Stickstoffs bei dieser Temperatur erinnert an trockenen, weissen Schnee. Eine bestimmte Krystallstruktur liess sich nicht ohne weiteres erkennen, wenn auch das Aussehen auf krystallinischen Zustand hinweist.

Der Siedepunkt für reinen Stickstoff ist bereits mehrmals bestimmt worden.[1]) Es fand

Olszewski[2]) — 195,6° C. d. i. 77,4° abs. für atmosphärischen Stickstoff
(mit Constant-Volumthermometer)

Baly[3]) — 195,5° C. d. i. 77,5° abs. für chemischen Stickstoff.
(mit Constant-Druckthermometer)

---

[1]) Travers. Experim. Study of Gases S. 241.

[2]) K. Olszewski, Compt. Rend. 99, p. 134, 1884. Compt. Rend. 100, p. 350, 1885; auch Phil. Mag. 39, p. 200 u. 210, 1895.

[3]) C. C. Baly, Phil. Mag. 49, S. 528, 1900.

Auf die Differenz zwischen unserem Wert und den Balyschen wird S. 151 näher eingegangen.

Mit Verwendung der Interpolationsformel von Baly, wonach der Siedepunkt des chemischen Stickstoffs zwischen 760 mm und 717 mm Druck um 0,5° sinkt, ergibt sich aus unseren Werten, die mit dem Wasserstoffthermometer gewonnen sind

— 196.10 bei 714 mm, (Fehlerangaben S. 124)

also — 195.57 (77,43 abs.) bei 760 mm.

Als Erstarrungstemperatur liefern unsere Wasserstoffthermometer den Mittelwert — 210,57° d. i. 62.43[1]) abs. T. Für den Gefrierpunkt liegt nur eine Gasthermometerbeobachtung vor, und zwar ist es die erste, die gemacht wurde, nämlich die von Olszewski (l. c.). Es erwähnt zwar J. Dewar[2]), dass der Stickstoff bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffes zu einem klaren farblosen Eis werde, allein wir fanden nirgends, dass er die Erstarrungstemperatur gemessen hätte. Olszewski hat sie zu — 214° C. gefunden und gibt den Erstarrungsdruck zu 60 mm an. Da Olszewski, entsprechend den Hilfsmitteln jener Zeit, nur mit den kleinen Mengen von 5—6 ccm operieren konnte, dürfte der von ihm ermittelte Wert unserem gegenüber nicht ins Gewicht fallen. Wroblewki's (l. c.) Werte, — 203° für die Erstarrungstemperatur bei einem Druck von 60—70 mm, und — 193° als Siedetemperatur bei 740 mm, sind durch Extrapolation mittelst Thermoelementes erhalten worden und haben deswegen nur geringes Gewicht.

Wir fanden auch einen anderen Erstarrungsdruck, nämlich 80—90 mm. Es ergab zwar jede einzelne Stickstoffprobe einen sehr bestimmten während des Erstarrens kontanten Druck, aber die Werte für verschiedene Versuche wichen nicht unerheblich von einander ab. Es scheint, dass geringe Verunreinigungen (Sauerstoff aus der Luft, der beim Abfüllen in den Stickstoff

[1]) Wenn man wie gewöhnlich, den absoluten Nullpunkt = — 273° C. setzt, statt des für unseren Wert von α folgenden = — 273.04°.

[2]) J. Dewar, Proc. Roy. Inst. XVI 93, p. 214, 1900.

kondensierte und eventuell auch durch Undichtigkeiten des entzweigeschnittenen Gummistopfens (Fig. 3) in den Apparat eindringt, vielleicht sogar im flüssigen Stickstoff sich lösender Wasserstoff) den Erstarrungsdruck ziemlich merklich beeinflussen; die Erstarrungstemperatur scheint davon weniger getroffen zu werden. Wir konnten bei fast allen Versuchen konstatieren, dass am Schluss einer Versuchsreihe der Siedepunkt des Stickstoffs sich etwas, nämlich um 0.1—0.2° erhöht hatte, auch in dem Falle, wo nur reiner Wasserstoff eingeleitet war und Undichtigkeiten kaum vorhanden gewesen sein können, ohne dass wir die Siedepunktserhöhung auf verschieden tiefes Eintauchen des Thermoelementes zurückführen konnten. Da während des Versuchs beigemischter Sauerstoff weniger verdampft als der Stickstoff und da letzterer schliesslich auf einen doch ziemlich kleinen Bruchteil der anfänglichen Menge verbraucht ist, so wird am Schlusse einer Versuchsreihe eine Verunreinigung durch Sauerstoff prozentual wesentlich grösser. Als wir gelegentlich bei einem Versuch nur ca. 10 % flüssigen Sauerstoff zugeführt hatten, erhielten wir selbst bei einem Druck von nur 48 mm noch keine Anzeichen der Erstarrung. Die Temperatur war dabei nur unwesentlich geringer als die des Siedepunktes des reinen Stickstoffs.

5. Die Dampfspannung des gesättigten Stickstoffs bei niedrigen Drucken wurde gemessen, indem die zu den einzelnen Drucken gehörigen Siedepunkte bestimmt wurden. Die Anordnung blieb für diese Versuche die gleiche wie für die Bestimmung des Erstarrungspunktes, nur wurde das Wasserstoffthermometer fortgelassen, ein ungespaltener Gummistopfen verwendet, und nur das Thermoelement aus Kupfer-Konstantandraht, das durch den Stopfen geführt ist, zur Messung verwendet; die eine Löthstelle des Thermoelements wurde stets in Vaselinöl oder Petroleum auf Eistemperatur gehalten. Als Gefäss für den Stickstoff diente in diesem Falle bei einigen Versuchen ein kleines unversilbertes cylindrisches Dewarfläschchen von nur 52 ccm Inhalt, bei anderen das kugelige von 153 ccm Inhalt. Die Resultate sind in der Tafel I. graphisch

wiedergegeben und zwar geben die Abscissen die Drucke, die Ordinaten die dazu gehörigen E. M. K. des Thermoelements in Millivolt. Die Spannungen wurden alle nach der Kompensationsmethode durch Vergleich mit einem Weston-Normal-Element erhalten. Die zu einem Versuch gehörigen Punkte sind durch gleiche Bezeichnung gekennzeichnet; zum Teil sind die Punkte einer Versuchsreihe durch gerade Linien verbunden, um das Bild übersichtlicher zu gestalten. Besonders hinzuweisen ist auf den Einfluss der Verunreinigungen, welcher sich in den Dampfspannungskurven geltend macht. Die Kurven, welche einen erhöhten Siedepunkt zeigen, lassen darauf schliessen, dass die betreffende Stickstoffprobe nicht ganz rein von Verunreinigungen war. Es zeigt sich, wie zu erwarten, dass Proben, welche den höchsten Siedepunkt ergeben, auch den tiefsten Gefrierpunkt liefern (Siedepunktserhöhung und Gefrierpunktserniedrigung). Aus diesen Kurven wurde graphisch eine Kurve interpoliert, welche nach unserer Ansicht die richtige Kurve der Siedepunkte des Stickstoffes bei niedrigen Drucken darstellt. Wir geben statt ihrer die Zahlen wieder. Um statt der elektromotorischen Kräfte die ihnen entsprechenden Temperaturen angeben zu können, haben wir stets bei den Bestimmungen des Siedepunktes und Erstarrungspunktes mit dem Wasserstoffthermometer auch das Thermoelement im Stickstoff gehabt und konnten so geeignete Fixpunkte für dasselbe erhalten. Ausserdem bestimmten wir noch für eine grössere Menge (ca. $^3/_4$ l) flüssiger Luft die Temperatur mit Wasserstoffthermometer und Thermoelement, sowie den Siedepunkt des reinen Sauerstoffes mit dem Thermoelement allein. Um letzteren herzustellen, versuchten wir verschiedene Verfahren. Schliesslich erschien uns die Herstellung aus reinem chlorsaurem Kali mit direkter Kondensation des aus der letzten Waschflasche kommenden O_2, also Vermeidung eines Gasometers als das Zweckmässigste; mit der Hempel'schen Sauerstoffanalyse mit Kupfer in ammoniakalischer Lösung konnten wir konstatieren, dass der durch Kalilauge, Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd gereinigte Sauerstoff bis auf mehr als 0,6 %

rein war, während die Erzeugung von Sauerstoff aus chlorsaurem Kali und Braunstein, sowie diejenige aus einem Gemenge von chlorsaurem Kali und Eisenoxyd und selbst die elektrolytische Erzeugung von Sauerstoff (Ozon!) weniger reine Produkte ergaben. Die Kondensation wurde ähnlich bewerkstelligt wie die des Stickstoffes. Die in einer Glasretorte auf einmal erhitzte Menge von chlorsaurem Kali war in keinem Falle grösser als 250 g, was eine Ausbeute von ca. 50 ccm flüssigen Sauerstoff gab. Nimmt man als Siedepunkt für Sauerstoff die übereinstimmenden Werte von Olszewski und Wroblewski, nämlich — 182,4° (90,6° abs.) und interpoliert nach den Messungen von Estreicher (l. c.) und Baly (l. c.), so ergibt sich daraus für einen Druck von 714,4 mm, bei welchem unser Thermoelement für die Siedetemperatur des flüssigen Sauerstoffes 4,845 Millivolt zeigte, die Temperatur — 182,9° (90,1° abs.); trägt man diese Werte, den für die Temperatur einer grösseren Menge flüssiger Luft gefundenen, nämlich 4,971 Millivolt entsprechend — 191,60°, und die oben gefundenen Werte für den Siedepunkt und Erstarrungspunkt des Stickstoffes in ein Koordinatensystem ein, um die Aichkurve für das Thermoelement in dem Intervall von — 182,9° bis — 211° zu erhalten, so ergibt sich der Linienzug der Tafel II.

Dieselbe zeigt deutlich, wie gut die Angaben des Wasserstoffthermometers mit jenen aus dem Thermoelement übereinstimmen und rechtfertigt jedenfalls, dass wir die Temperaturen für die Dampfspannungen nach dieser Kurve interpolieren. Berechnet man die Parabel, welche durch den Sauerstoffpunkt und den Siede- bezw. Gefrierpunkt des Stickstoffs bestimmt ist, so fällt dieselbe fast mit der Geraden durch die letzteren beiden Punkte zusammen; einige Punkte der Parabel sind mit ⊕ in Fig. 5 eingetragen; da die mit dem Wasserstoffthermometer von uns gemessenen Punkte *a*, *b*, *c* genau in eine Gerade fallen, und der Sauerstoffpunkt von den verschiedenen Beobachtern um mehr als 0.1° verschieden angegeben wird,[1])

[1]) Vergl. L. Holborn, Drudes Ann. 6. S. 254 f., 1901; die Differenzen rühren wohl zum Teil von dem Einfluss der sechsten Dezimale von *α* her, das Holborn zu 0.003665, wie zu 0.0036625 genommen haben.

so dass derselbe für unsere Untersuchung nicht das Gewicht zu haben scheint wie die Punkte *a*, *b*, *c*, so haben wir in dem Bereiche von — 196.05 bis — 210.57° für das Thermoelement eine lineare Abhängigkeit der E. M. K. von der Temperatur angenommen und also eine geradlinige Interpolation angewandt, um die Dampfspannungskurve des Stickstoffs zu erhalten.

Der Temperatur	— 196.05° C.	entspricht	5.0341 Millivolt
	— 210.57° „	„	5.2356 „
d. i.	14.52° „	„	0.2015 „
	0.072° „	„	0.001 „

Die mit dem Thermoelement gemachten Bestimmungen des Siedepunktes bei mittlerem Druck und des Erstarrungspunktes ergaben folgende Werte:

Siedepunkte		Gefrierpunkte		Gewicht[1]) für die Bildung des Mittelwertes
Barometerstand	Thermoelement	Erstarrungsdruck	Thermoelement	
mm	Millivolt	mm	Millivolt	
710.1	4.560 × 1.1045	86.5 - 87.0	4.740 × 1.1045	1
711.7	4.560_5	86.5 – 87.0	4.741	1
711.7	4.560_5	80 – 81	4.741_5	1
711.9	4.560_5	79.2	4.741	1
713.0	4 561	77	4.737	1
714.0	4.559_5	83	4.739_5	1
714.8	4.560	81.5	4.739	1
715.1	4.559	89 – 90	4.739	4
715.1	4.560_5	89	4.739	4
715.1	4.559_5	75 – 76	4.741	1
715.5	4.558_5	77	4.741	1
715.7	4.559	88	4.739_5	4
716.4	4.559	Mittel: **86**	4.7396 × 1.1045	
716.4	4.559_5		= 5.2348_8 Millivolt	
717.2	4.559		d. i. **210.52**° Cels.,	
719.0	4.557			
Mittel: **714.5**	4.5594 × 1.1045 = 5.0386 Millivolt d. i. —**196.17_6**° Cels.	wenn die Temperatur mit einem Wasserstoffthermometer mit konstantem Volum gemessen und $a = 0.0036625$ gesetzt wird (vergl. oben).		

[1]) Da aus dem Gang der Versuche zu sehen war, dass der Erstarrungsdruck höher ist, wenn der Stickstoff reiner ist, werden die Einzelwerte mit den nebenbezeichneten Gewichten in Rechnung gesetzt, um den Mittelwert zu bilden.

Für die Dampfspannung bei niedrigen Drucken ergibt sich durch graphische Interpolation aus den Werten der Tafel I. folgende Tabelle:

Dampfspannung des gesättigten Stickstoffdampfes.

Druck in mm Hg	E. M. K. des Thermo-elementes in Millivolt	Temperatur	
		Celsiusgrade für $\alpha = 0.0036625$	Absoluter[1] Wert
760	extrapoliert	— 195.67	77.33
714.5	5.03586	— 196.176	76.824
700	5.0382	— 196.345	76.655
650	5.0465	— 196.944	76.056
600	5.0553	— 197.58	75.42
550	5.0647	— 198.25	74.75
500	5.0748	— 198.98	74.02
450	5.0857	— 199.77	73.23
400	5.0975	— 200.62	72.38
350	5.1105	— 201.554	71,446
300	5.1249	— 202.59	70.41
275	5.1332	— 203.19	69.81
250	5.14145	— 203.79	69.21
225	5.1512	— 204.49	68.51
200	5.1611	— 205.20	67.80
180	5.1702	— 205.86	67.14
160	5.1801	— 206.57	66.43
140	5.1911	— 207.37	65.63
120	5.2033	— 208.245	64.755
100	5.219	— 209.38	63.62
86 ± 4 Erstarrungs-punkt	5.23488	— 210.52	62.48

6. Zur Prüfung der beobachteten Dampfspannungen wurden die Werte dieser Tabelle zunächst in die Dühring'-sche[2]) Siedepunktsformel eingesetzt, nach welcher $\frac{t'-t'_0}{t-t_0} = q$ = konstant sein soll, wenn t_0 und t'_0 die Siedetemperaturen

[1]) Auch hier ist als absoluter Nullpunkt — 273° C. genommen, wie gewöhnlich, statt — 273.04 wie er nach den Chappuis'schen Untersuchungen sich ergibt und wie auch wir ihn bei unseren Untersuchungen streng genommen zu Grunde legen müssten (vergl. oben S. 124 u. 131).

[2]) U. Dühring, Wied. Ann. 11 p. 163, 1880.

zweier Substanzen bei einem bestimmten, aber beliebig gewählten Drucke p_0 und t und t' die Siedetemperaturen derselben Substanzen bei einem beliebigen anderen Drucke p bedeuten. Nimmt man als Bezugssubstanz Wasser und als p_0 den Druck von 760 mm Hg, so ist $t'_0 = -195.67^\circ$ C. für Stickstoff, $t_0 = +100.00^\circ$ C. für Wasser,
und es ergibt sich unter Benützung der Dampfspannungstabellen für Wasser von Wiebe und von Regnault-Broch:

$$\text{Für } p = 700 \qquad q = \frac{196.34 - 195.67}{373 - 370.71} = 0.292$$

$$p = 500 \qquad q = \frac{198.98 - 195.67}{373 - 361.67} = 0.292$$

$$p = 400 \qquad q = \frac{200.62 - 195.67}{373 - 355.95} = 0.290$$

$$p = 300 \qquad q = \frac{202.59 - 195.67}{373 - 348.97} = 0.288$$

$$p = 200 \qquad q = \frac{205.20 - 195.67}{373 - 339.48} = 0.284$$

$$p = 100 \qquad q = \frac{209.38 - 195.67}{373 - 324.70} = 0.284$$

$$p = 86 \qquad q = \frac{210.52 - 195.67}{373 - 321.66} = 0.289,$$

also in der That eine solche Konstanz, wie sie nach dem Verhalten der bereits genauer untersuchten Flüssigkeiten bei der Dühring'schen Formel nicht besser zu erwarten ist.

Eine strengere Prüfung ermöglicht wohl die Ramsay-Young'sche[1]) Beziehung zwischen den Siedepunkten zweier Substanzen, da sich die Ramsay-Young'sche Formel in sehr vielen Fällen als zutreffend erwiesen hat, so dass Baly[2]) sogar auf Grund derselben aus zwei beobachteten Dampfspannungen des Stickstoffs die Siedetemperaturen für Drucke zwischen 717.0 und 2812.0 mm Hg berechnet hat. Bezeichnen T'_a und T'_b die absoluten Siedetemperaturen zweier

---

[1]) W. Ramsay und S. Young, Phil. Mag. 21 S. 33, 1886; vergl. auch Nernst, theoretische Chemie, 2. Aufl., S. 315.

[2]) E. C. C. Baly; Phil. Mag. 49 S. 527, 1900.

Substanzen A und B bei ein und demselben Druck, T_a und T_b die absoluten Siedetemperaturen der nämlichen Substanzen bei einem anderen, aber wieder für die beiden gleichen Druck, so ist nach Ramsay-Young:

$$\frac{T_b}{T_a} = \frac{T'_b}{T'_a} + c\,(T_a - T'_a),$$

wo c eine für A und B konstante Grösse bedeutet.

Trägt man also die absoluten Siedetemperaturen T_a als Ordinaten, die Verhältnisse $\frac{T_b}{T_a}$ als Abszissen auf, so muss die dadurch definierte Kurve eine gerade Linie sein. Wir nahmen als Vergleichssubstanz (A, T_a) wiederum Wasser und erhielten in der That für das Druckintervall von 760—120 mm eine überraschend gute Annäherung der Kurve an eine gerade Linie; von 120 mm ab bis zum Erstarrungsdruck jedoch nimmt die Kurve plötzlich einen sehr stark gekrümmten Verlauf.

Für die Punkte, welche dem Druckintervall
von 760—300 mm angehören, wird die Konstante $c = 0.000233$
für die Punkte im Intervall
von 300—120 mm wird $c = 0.000226$.

Zieht man Gerade G_1 bezw. G_2, welche sich an die Punkte im ganzen Intervall von 760—120 mm möglichst gut anschliessen, so wird $c = c_1 = 0.000228_2$ bezw. $c = c_2 = 0.000230_2$, je nachdem man die Gerade näher an die Punkte des Intervalles des geringeren (250—120 mm) bezw. höheren Druckes (760—250 mm) legt. Würde man den Siedepunkt und Erstarrungspunkt (Tab. S. 135) durch eine Gerade G_3 verbinden, die nun aber ausserhalb aller Punkte zu liegen käme, so würde $c_3 = 0.0002556$.

Das beste Bild von den Abweichungen, welche die beobachteten Werte gegenüber den aus der Ramsay-Young'schen Formel sich ergebenden zeigen, erhält man, wenn man die Beobachtungswerte jenen gegenüberstellt, welche sich aus den Ramsay'schen Geraden G_1, G_2 und G_3 ergeben, indem man aus der Zeichnung die Verhältnisse $\frac{T_b}{T_a}$ absticht und mit den aus Tabellen entnehmbaren Werten T_a für Wasser multipliziert. Die folgende Tabelle enthält diese Zahlen.

Dampfdrucke und ihre Aenderung mit der Temperatur.

Druck mm Hg	Beobachtet		Berechnet: Aus Ramsay-Geraden G_1		Berechnet: Aus Ramsay-Geraden G_2		Berechnet: Aus Ramsay-Geraden G_3	
	T_b^0 Cels.	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$ $\frac{\text{mm Hg}}{\text{Grad}}$	T_b^0 Cels.	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$ $\frac{\text{mm Hg}}{\text{Grad}}$	T_b^0 Cels.	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$ $\frac{\text{mm Hg}}{\text{Grad}}$	T_b^0 Cels.	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$ $\frac{\text{mm Hg}}{\text{Grad}}$
760	(−195.67)		−195.673		−195.673		− 195.652	
750	(−195.78)		− 195.778		−195.778		− 195.788	
730	(−196.00)	89.3	−195.999	90.1	−195.999	89.35	− 195.990	86.75
714.6	**−196.176**		**−196.176**		**−196.176**		**−196.176**	
715		86.5		87.1		86.6		84.6
700	−196.345		−196.339		−196.345		− 196.345	
675		83.5		84.6		84.6		82.0
650	−196.944		−196.930		−196.936		− 196.954	
625		79.00		79.5		80.0		77.05
600	−197.58		−197.559		−197.561		− 197.604	
575		74.1		74.36		73.56		71.7
550	−198.25		−198.232		−198.241		− 198.301	
525		68.7		69.5		69.0		67.0
500	−198.98		−198.952		−198.966		− 199.047	
475		63.16		63.7		64.0		61.8
450	−199.77		−199.737		−199.747		− 199.856	
425		59.7		58.44		58.66		56.9
400	−200.62		−200.593		−200.600		− 200.735	
375		53.16		52.9		52.7		50.9
350	−201.554		− 201.538		−201.549		− 201.718	
325		48.2		48.4		48.36		47.1
300	−202.59		−202.571		−202.583		− 202.779	
275		41.7		40.80		40.75		39.6
250	−203.786		−203.797		−203.811		− 204.040	
225		35.3		35.24		35.00		34.1
200	−205.20		−205.223		−205.240		− 205.510	
190		30.5		31.18		31.12		30.4
180	−205.86		−205.865		−205.883		− 206.168	
170		28.1		28.12		27.90		27.1
160	−206.57		−206.576		−206.600		− 206.906	
150		25.1		25.3		25.28		24.5
140	−207.37		−207.367		−207.392		− 207.722	
130		22.87		22.81		22.58		22.0
120	−208.245		−208.244		−208.278		− 208.632	
110		17.6		19.67		19.63		19.13
110	− 208.765		−208.739		−208.770		− 209.137	
100	−209.38		−209.261		−209.297		− 209.677	
95	−209.69		−209.546		−209.581		− 210.042	
93		(11.6 ± 3.5)		(17.1)		(17.04)		(16.63)
90	−210.06		−209.834		−209.873		− 210.270	
86 ± 4	**−210.52**		−210.08		−210.12		**−210.52**	

Ausser den Siedetemperaturen sind in derselben noch die Verhältnisse $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ für verschiedene Drucke eingetragen, da gerade diese Grösse in der Clapeyron'schen Formel eine entscheidende Rolle spielt.

Man sieht aus diesen Zahlen, dass die beobachteten Siedetemperaturen sich sehr gut in die Ramsay-Young'sche Formel einfügen lassen. In dem Intervall von 760 bis 110 mm ist für die Gerade G_1 die Maximalabweichung zwischen beobachteten und berechneten Werten nur 0.03°, für die Gerade G_2 nur 0.04°. Die Abweichungen, welche sich im Druck-Intervall von 110 bis 86 mm ergeben, erscheint uns darin begründet, dass die Ramsay-Young'sche Formel nicht mehr zutrifft, wenn der Siedepunkt eines Körpers sich seinem Erstarrungspunkt nähert. Denn auch bei den anderen Substanzen zeigt sich, dass diese empirisch festgestellte Formel nur eine Annäherung darstellt, wie sich aus den zahlreichen Beispielen der Ramsay-Young'schen[1]) Arbeit ergibt. Namentlich sei hier auf das Beispiel der Essigsäure (l. c. S. 45) hingewiesen, deren Siedepunkt bei niedrigen Drucken nach der Beobachtung um 0.3° tiefer liegt als der nach der Ramsay-Young'schen Formel aus dem Vergleich mit Wasser ermittelte Wert (vergl. später S. 148). Der Siedepunkt für Aethylalkohol weicht bei 10 mm Druck (l. c. S. 36) sogar um 0.8° von den beobachteten ab. Uebrigens würde auch aus der Annahme, dass in unseren Beobachtungen nur der Siedepunkt und Gefrierpunkt des Stickstoffes richtig wäre, und die Ramsay-Young'sche Formel in dem dazwischen liegenden Intervall streng gültig bliebe, sich zwischen den aus ihr interpolierten und den beobachteten Werten nur eine Maximalabweichung von 0.6° ergeben.

Dass sich unsere beobachteten Werte zwischen 760 mm und 110 mm sehr gut an die Dühring'sche und die Ramsay'sche Siedepunktsformel anschliessen, erscheint uns eine wesentliche Stütze für die Annahme, dass wir bei den Beob-

---

[1]) W. Ramsay u. S. Young, Phil. Mag. V. 21, S. 34—51 ff. 1886.

achtungen nicht erheblich durch Siedeverzüge gestört waren. Ferner machen sie es wahrscheinlich, dass auch der aus unseren Beobachtungen extrapolierte Wert für den Siedepunkt des Stickstoffs bei 760 mm nämlich — 195.67° C. richtig ist. Der Nutzen, den wir aus der Ramsay'schen Formel ziehen zu können glauben, besteht in einer Ausgleichung unserer Beobachtungswerte. Macht man von ihr Gebrauch, um Unregelmässigkeiten in den ersten Differenzen der Siedetemperaturen auszugleichen, so ergibt sich folgende Dampfspannungstabelle des Stickstoffes, welche wir auf grund unserer Beobachtungen als definitiv betrachten. Die Temperaturen geben wir hier auf 3 Decimalstellen an, obwohl natürlich höchstens die zweite Decimale absolut genommen richtig sein wird, weil für die Berechnung der Grösse $\frac{dp}{dT}$ und ihrer Aenderung die dritte Decimale noch von wesentlichem Einfluss ist. Neben den Werten von $\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta p}{\Delta T}$, welche sich durch Rechnung aus den benachbarten p und t ergeben, sind jene Werte angegeben, welche aus der Dampfspannungskurve mittels Tangentenkonstruktion erhalten wurden, um die Genauigkeit beider Berechnungsarten zu veranschaulichen.

Nach der Dampfspannungstabelle, welche Baly (l. c.) für Stickstoff bei hohem Druck angegeben hat, wäre

$$\frac{dp}{dT} = 86 \frac{\text{mm Hg}}{\text{Grad Cels.}} \text{ bei 738 mm Druck,}$$

$$\frac{dp}{dT} = 92 \quad \text{„} \quad \text{„ 783 „} \quad \text{„}$$

$$\frac{dp}{dT} = 100 \quad \text{„} \quad \text{„ 831 „} \quad \text{„}$$

Es würde also in der Nähe von 760 mm der Baly'sche Wert um 5 % von dem unseren abweichen. Da wir annehmen zu können glauben, dass unsere Werte für $\frac{\Delta p}{dT}$ zwischen 700 und 600 mm Druck auf 1 % genau sind, so ist wohl der Baly'sche Wert zu klein ermittelt. Bildet man in der Baly'schen

Definitive Dampfspannungstabelle des chemischen Stickstoffs.

Druck p in mm Hg	Temperatur t Celsiusgrade für $a = 0.0036625$	Temperatur T Absoluter[1] Wert	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$	$\frac{dp}{dT}$ durch Tangentenkonstruktion ermittelt
760	— 195.673	77.33	91.0	89.8
750	— 195.778	77.23	90.4	—
730	— 195.998	77.00	89.3	—
715	— 196.170	76.83	87.8	88.6
700	— 196.345	76.655	86.4	84.5
650	— 196.936	76.064	82.3	83.2
600	— 197.560	75.44	76.7	75.5
550	— 198.241	74.76	71.4	69.2
500	— 198.970	74.03	66.3	64.8
450	— 199.750	73.25	61.8	61.1
400	— 200.605	72.395	56.0	54.7
375	— 201.065	71.935	53.2	51.6
350	— 201.540	71.46	50.7	50.9
325	— 202.053	70.95	48.1	48.4
300	— 202.580	70.42	45.5	45.4
275	— 203.150	69.85	41.1	41.4
250	— 203.797	69.20	38.2	36.0
225	— 204.470	68.53	35.6	35.4
200	— 205.20	67.80	31.9	31.3
180	— 205.865	67.135	29.1	—
160	— 206.575	66.425	26.6	—
150	— 206.945	66.055	25.3	25.4
140	— 207.367	65.63	23.9	23.3
130	— 207.793	65.21	22.5	22.2
120	— 208.245	64.755	20.3	20.1
110	— 208.77	64.23	18.1	17.7
100	— 209.352	63.65	15.5	15.0
95	— 209.685	63.315	14.1	—
90	— 210.06	62.94	—	(11.8)
86 ± 4	— 210.52 Erstarrungspunkt	62.48	—	(7.3)

[1]) Auch hier ist, weil üblich, als absoluter Nullpunkt einfach — 273⁰ C. gesetzt statt des bei unseren Messungen sich ergebenden Wertes — 273.04⁰ C. (vergl. oben S. 136).

Dampfspannungstabelle das Dampfdruckgefälle auch für die höheren Drucke, so zeigen sich in dessen Gang ziemliche Unregelmässigkeiten (vergl. S. 37). Als definitive Siedepunkte des auf mindestens 0.3 % reinen Stickstoffs glauben wir auf grund unserer zahlreichen Versuche

— **196.17°** C. (76.87° abs.) ± 0.05 bei **715** mm Druck.
— **195.67°** C. (77.37° abs.) ± 0.05 „ **760** „ „

und als definitiven Erstarrungspunkt

— **210.52°** C. (62.52° abs.) ± 0.2 bei **86 ± 4** mm Druck

angeben zu können, wenn das Constant-Volum-Wasserstoffthermometer als Temperaturmesser dient (vergl. unten S. 150) und als absoluter Nullpunkt — 273.04° C. angenommen wird (vergl. S. 135).

7. Aus der allgemeinen van der Waals'schen Gleichung:

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi - 1) = 8\vartheta$$

folgt, dass bei gleichen reduzierten Siedetemperaturen

$$\left(\text{reduzierte Siedetemperatur} = \frac{\text{absolute Siedetemperatur}}{\text{kritische Temperatur}}\right)$$

für alle Substanzen die reduzierten Dampfdrucke $\left(= \frac{\text{Dampfdrucke}}{\text{kritischen Druck}}\right)$ gleich sein müssen. Nach der Prüfung dieser Folgerung durch van der Waals, Young[1]) und anderen trifft dies Gesetz nicht in dieser Allgemeinheit zu; da jedoch seine Gültigkeit nur bestehen kann, so lange die van der Waals'sche Grundannahme zutrifft, dass Flüssigkeit und Dampf stets dieselbe Molekular-Konstitution besitzen, dass also nicht etwa bei einer Veränderung der Substanz Molekülassoziationen oder Dissoziationen eintreten, so sind die Abweichungen, die man bemerkt hat, sehr verständlich, denn nur wenige Substanzen werden während des Verdampfens ihren Molekularzustand beibehalten. Am ehesten wäre von den

---

[1]) S. Young, Phil. Mag. 33, S. 153, 1892; 34, S. 505, 1892. Vergl. auch W. Nernst, theoretische Chemie, II. Aufl. S. 230.

schwercoerciblen Gasen ein Verhalten zu erwarten, wie es die van der Waals'sche Gleichung angibt und namentlich Stickstoff und Sauerstoff zeigen auch bei tiefen Temperaturen so geringe Abweichungen vom Mariotte=Gay-Lussac'schen Gesetz,[1]) dass die Frage sich aufdrängt, ob nicht für sie das van der Waals'sche Gesetz zutrifft. Wir berechneten daher für Wasser und Sauerstoff auf grund unserer Untersuchungen und der Wiebe'schen und Broch'schen Tabellen für die Spannkraft des Wasserdampfes und der Estreicher'schen[2]) Werte für die Dampfspannung des Sauerstoffes zu bekannten Drucken p die reduzierten Siedetemperaturen ϑ und ordneten die Dampfdrucke nach den reduzierten Siedetemperaturen. Wenn nun auch die Zahlen für korrespondierende reduzierte Dampfdrucke nicht ihrem absoluten Betrage nach gleich sind, zumal die kritischen Drucke nicht sehr genau ermittelt sind, so ist doch auf grund der van der Waals'schen Gleichung zu erwarten, dass bei gleichen reduzierten Siedetemperaturen zweier Substanzen das Verhältnis der entsprechenden Dampfdrucke eine konstante Grösse ist für beide Substanzen, da ja bei gleichen reduzierten Siedetemperaturen für zwei Substanzen $\frac{p}{p_k} = \frac{p'}{p'_k}$, also $\frac{p}{p'} = \frac{p_k}{p'_k}$ = konstant sein muss, wenn p und p' korrespondierende Drucke und p_k und p'_k die kritischen Drucke für beide Substanzen sind. Das Resultat der Berechnung ist in der folgenden Tabelle dargestellt. Als kritische Daten wurden angenommen

Für Stickstoff[3]) $T_k = 127^0$ abs. Temp. $p_k = 26600$ mm Hg Druck,
„ Sauerstoff[4]) $T_k = 154^0$ „ „ $p_k = 44080$ „ „ „
„ Wasser[5]) $T_k = 637^0$ „ „ $p_k = 200$ Atmosphären.

[1]) J. Dewar (l. c.) und Chemical News 85, S. 73—75, 14. Febr. 1902.

[2]) Estreicher (l. c.) und Travers, Experimental Study of Gases, S, 240, 1902; wir bevorzugen die Estreicher'schen Werte, da er, wie wir, zur Temperaturmessung das Konstant-Volum-Wasserstoffthermometer benützte.

[3]) Dressel, Lehrbuch der Physik I, S. 314, 1900.

[4]) Travers, l. c., S. 247.

[5]) Landolt und Börnstein, Tabellen II. Aufl., S. 90.

Reducierte Siede-temperatur ϑ	Wasser: Druck p mm	Wasser: Reducierter Druck $\pi = \frac{p}{152000}$	$\frac{p \text{ Stickstoff}}{p \text{ Wasser}}$	Stickstoff: Druck p mm	Stickstoff: Reducierter Druck $\pi = \frac{p}{26600}$	Sauerstoff: Druck p mm	Sauerstoff: Reducierter Druck $\pi = \frac{p}{44080}$	$\frac{p \text{ Sauerstoff}}{p \text{ Stickstoff}}$
0.4900	—	—	—	(84)	0.00316	107	0.00242	1.27
0,495	—	—	—	90	—	120	—	1.33
0.5000	72	0.000474	1.37	98	0.00369	134	0.00305	1.36
0.5050	85_5	—	1.26	108	0.00406	151	—	1.40
0.5100	101	0.000665	1.19	120	0.00451	169	0.00386	1.41
0.5150	—	—	—	134	—	189		1.41
0.5200	137	0.000901	1.09	149	0.00504	210	0.00477	1.41
0.5250	—	—	—	166	0.00624	233	—	1.40
0.5300	184	0.00121	0.995	183	0.00688	257	0.00584	1.40_5
0.5400	244	0.00161	0.923	225	0.00846	311	0.00706	1.38
0.5450	279	0.00184	0.895	249_5	0.00938	341	0.00774	1.36_5
0.5500	318	0.00210	0.865	275	0.0103_5	372	0.00844	1.35
0.5550	362	0.00238	0.831	303	0.0114_0	404	0.00917	1.33
0.5600	412	0.00271	0.805	332	0.0124_8	440	0.00999	1.32_5
0.5650	466	0.00307	—	—	—	480	0.0109	—
0.5700	529	0.00348	0.760	401	0.0151	524	0.0119	1.30_6
0.5750	597	0.00393	0.733	438	0.0165	576	0.0130	1.31
0.5800	669	0.00440	0.716	478_5	0.0180	632	0.0143	1.32
0.5850	750	0.00494	0.694	520	0.0195_5	690	0.0156	1.32_5
0.5900	—	—	—	563	0.0212	754	0.0171	1.34
0.5950	—	—	—	611	0.0230	—	—	—
0.6000	—	—	—	662	0.0248	—	—	—
0.6050	—	—	—	714	0.0268_2	—	—	—
0.6100	—	—	—	766	0.0288	—	—	—

Es lehrt die vorstehende Tabelle, dass für Sauerstoff und Stickstoff bei gleichen reduzierten Siedetemperaturen das Verhältnis der Drucke nahezu konstant ist, während sich zwischen Wasser und Stickstoff erhebliche Differenzen ergeben. Aus dem Gang der Konstanten würde zu schliessen sein, dass bei niedrigem Druck die Dampfspannung des Stickstoffes im Verhältnis zu der des Sauerstoffes etwas zu niedrig ist; es würden demnach in Stickstoff allenfalls bei niedrigem Drucke Assoziationen von Molekülen stattfinden können, wenn auch nur in unerheblichem Masse. Die korrespondierenden reduzierten Drucke stimmen für Stickstoff und Sauerstoff unvergleichlich besser überein als die für Wasser und Stickstoff.

8. Berechnung der Verdampfungswärme des reinen Stickstoffes. Nachdem in der jüngsten Zeit Dewar[1]) das spezifische Volumen des gesättigten Stickstoffdampfes experimentell bestimmt hat und durch unsere Versuche $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ bei 760 mm auf ca. 1 % genau festgestellt ist, so lässt sich die Verdampfungswärme des reinen Stickstoffs nach der Clapeyron'schen Formel

$$r = T(v_1 - v_2) \cdot \frac{dp}{dT}$$

berechnen. Es ist das spezifische Volumen[2]) des flüssigen Stickstoffs

$$v_2 = \frac{1}{0.791} = 1.265 \frac{\text{ccm}}{\text{gr}}$$

das spezifische Volumen des gesättigten Stickstoffdampfes[1])

$$v_1 = \frac{256.83}{90.5} \times 77.33 = 219.5 \frac{\text{ccm}}{\text{gr}}$$

Drückt man $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ in $\left[\frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2 \text{ Grad Celsius}}\right]$ aus und nimmt man als Wärmeeinheit die 15 Grad-Grammkalorie, so wird das mechanische Wärmeäquivalent[3])

$$A = 427 \text{ g gew.} \times \text{m} = 419 \times 10^5 \text{ Erg}$$

---

[1]) J. Dewar, Chemical News 85. S. 73–75, 1902.

[2]) Travers, l. c., S. 247.

[3]) M. Planck, Thermodynamik, S. 133.

und es ergibt sich als Verdampfungswärme des reinen Stickstoffes bei seinem normalen Siedepunkt für $p = 760$ mm

$$r = 77.33\,(219.5 - 1.3) \times 91 \times 3.183 \times 10^{-5} = 48.9\,(15^{0}\text{-Kal.}).$$

Für sehr sauerstoffreiche Luft hat U. Behn[1]) 50.8 Kalorien gefunden, es würde demnach die Verdampfungswärme des Stickstoffs etwas kleiner sein, als die des Sauerstoffs. Macht man die Annahme, dass die spezifischen Volumen des gesättigten Stickstoffdampfes in dem Intervall von 62° bis 77° abs. aus dem von Dewar direkt gemessenen Wert von 256.83 bei 760 mm Druck und 90.5° abs. nach dem Mariotte Gay-Lussac'schen Gesetz berechnet werden können und setzt man für das spezifische Volumen der Flüssigkeit den oben angegebenen Wert ein, so lässt sich auf grund unserer Dampfspannungstabelle die Verdampfungswärme des reinen Stickstoffs bis zu 150 mm Druck mit einer Genauigkeit von ca. 1 bis 3 % berechnen. Die Anwendung des Gasgesetzes dürfte kaum einen grösseren Fehler hervorbringen, da sich durch die Dewar'schen Messungen (l. c. S. 119) ergeben hat, dass das Sauerstoff- und Stickstoff-Gasthermometer bis zu ihren Siedetemperaturen hinab die gleichen Werte wie das Helium- und Wasserstoffthermometer liefern, und dass das spezifische Volumen des gesättigten Sauerstoffdampfes bei dessen normaler Siedetemperatur nur um $231.8 - 225.8 = 6.0\,\frac{\text{ccm}}{\text{gr}}$, das ist nur 2.6 % kleiner ist als der nach dem Mariotte=Gay-Lussac'schen Gesetz aus der normalen Gasdichte des Sauerstoffes bei 0° und 760 mm berechnete Wert.[2]) Es ergibt sich nach der Clapeyron'schen Formel für die Verdampfungswärme des reinen Stickstoffs bei niedrigen Drucken p folgende Tabelle, wenn v_1 durch die Formel

$$v_1 = \frac{256.83 \times 760}{90.5} \cdot \frac{T}{p} \, \frac{\text{ccm}}{\text{gr}}$$

berechnet wird.

---

[1]) U. Behn, Drude's Annalen 1, S. 274, 1900.

[2]) J. Dewar, Proc. Roy. Soc. Vol. 68, 1901; Chem. News. Vol. 83, S. 97, 1900; 85, S. 74, 1902.

Verdampfungswärme des Stickstoffs.

Druck mm Hg	Temperatur absol.	Specifisches Volum des Dampfes $v_1 \left[\frac{ccm}{gr}\right]$	Verdampfungswärme r [15° Cal.]	Für äussere Arbeit verbrauchte Wärme	Für innere Arbeit verbrauchte Wärme
760	77.33	219.5	48.9	5.27	43.6
730	77.00	227.4	49.51	—	—
600	75.44	271.1	49.7	5.15	44.5
500	74.03	319.3	49.7	5.06	44.6
400	72.40	390.3	50.2	4.95	45.2
300	70.42	506.2	51.5	4.82	46.7
250	69.2	596.9	50.1	4.74	45.4
225	67.80	656.8	50.9	—	—
180	67.13	804.2	49.9	4.60	45.3
170	66.78	847.1	50.5	—	—
150	66.45	949.6	50.45	4.53	45.9
120	64.75	1163.6	48.64	4.44	44.2
100	63.65	1372	43.1	4.37	38.7
90	62.94	1508	35.6	4.32	29.3

Es würde demnach die Verdampfungswärme des Stickstoffes und zwar sowohl die gesamte als die innere latente Dampfwärme mit sinkender Temperatur erst anwachsen, ein Maximum zwischen 400 mm und 150 mm erreichen, um dann sehr rasch abzunehmen. Die Schwankungen in den einzelnen Werten sind durch den grossen Einfluss der nur schwer bestimmbaren Grösse $\frac{dp}{dT}$ verursacht. Man sieht aber aus der Tabelle, dass jedenfalls die Untersuchung der Verdampfungswärme des Stickstoffs in der Nähe seines Erstarrungspunktes besonderes Interesse verdient. Sie dürfte über die oben erwähnten (S. 140) Abweichungen bezüglich der Ramsay'schen Formel näheren Aufschluss geben. Der eine von uns ist zur Zeit damit beschäftigt, diese Grösse experimentell zu bestimmen. Ein ähnliches Verhalten wie das des Stickstoffs wäre, ist bei der Essigsäure bereits bekannt.[1])

[1]) W. Ramsay und S. Young, Zeitschrift f. Physikal. Chem. 1, S. 256, 1887.

9. Die Kenntnis der Verdampfungswärme des reinen Stickstoffes ermöglicht nun die bereits oben (S. 133) erwähnte Bemerkung, dass bei verschiedenen Stickstoffproben Siedepunktserhöhung und Gefrierpunktserniedrigung parallel auftreten, quantitativ näher zu verfolgen. Fasst man nämlich flüssige Luft als Lösung von Sauerstoff in Stickstoff auf, und wendet man die allgemeine van t'Hoff'sche Formel für die Siedepunktserhöhung,[1]) welche ein Molekül des gelösten Stoffes (Sauerstoff) in 100 g des Lösungsmittels (Stickstoff) hervorbringt, auf unseren Fall an, so wird nach van t'Hoff

$$T - T_0 = \frac{0.0198 \times T_0^2}{r},$$

$$T - T_0 = \frac{0.0198}{48.9} \times 77.33^2 = 2.44^0$$

bei 760 mm Druck; das wäre also die Siedepunktserhöhung, welche 32 g Sauerstoff in 100 g Stickstoff hervorbringen. Es würde daraus

für 1 g Sauerstoff in 100 g Stickstoff 0,0768^0 Siedep.=Erhöhung

folgen. Nehmen wir an, wir hätten bei unseren Versuchen Stickstoff gehabt, der im Maximum 0,5 % Sauerstoff enthielt, so würde das eine Siedepunktserhöhung von 0,038^0 geben, also eine Unsicherheit liefern, die kleiner ist als die oben angegebene Fehlergrenze, die wir bereits vor der Berechnung der Siedepunktserhöhung angenommen hatten. Es lässt sich diese Auffassung der flüssigen Luft als Lösung von Sauerstoff in Stickstoff zahlenmässig prüfen durch die Beobachtungen Baly's[2]) über die Aenderung der Siedetemperatur normal

---

[1]) M. Planck, Thermodyn. S. 233, 1897 und Kohlrausch, Lehrbuch der pr. Phys., 9. Aufl., S. 170, 1901. Der Dampf eines Gemisches von Sauerstoff und Stickstoff enthält nach Baly Phil. Mag. 49, S. 519, 1900 einen sehr viel kleineren Procentgehalt an Sauerstoff als die Flüssigkeit, so dass die Dampfspannung des Sauerstoffs im Dampfe angenähert vernachlässigt werden kann, so lange die Flüssigkeit nicht mehr als 10 bis 20 % Sauerstoff enthält.

[2]) E. C. C. Baly, Phil. Mag. 49, S. 521, 1900.

siedender Gemische von Sauerstoff und Stickstoff. In der folgenden Tabelle enthält I und II die Beobachtungen Baly's, III die dadurch bestimmten Siedepunktsdifferenzen; in IV sind die aus der allgemeinen van t'Hoff'schen Gleichung berechneten Siedepunktserhöhungen eingetragen, und in V die Siedepunktsdifferenzen, welche sich ergeben, wenn man als Wert für den Siedepunkt des reinen Stickstoffs unseren Wert 77,33° abs. annimmt, im übrigen aber die Baly'schen Zahlen verwendet.

Siedepunktserhöhungen des Stickstoffs bei 760 mm Druck.

Baly's Beobachtungen		III.	IV	V
I °/o Sauerstoff	II Absol. Siedetemperatur	Mit Baly's Siedepunkt 77.54 abs. erhalten	Nach van t' Hoff berechnet	Mit unserem Siedepunkt 77.33 ± 0.05° berechnet
0.00	77.54	0.00	0.00	
8.10	78.0	0.46	0.62	0.67 ± 0.05
15.25	78.5	0.96	1.16	1.17 ± 0.05
21.60	79.0	1.46	1.64	1.67 ± 0.05
27.67	79.5	1.96	2.105	2.17 ± 0.05

Die Tabelle gibt eine Uebereinstimmung mit der van t'Hoff'schen Formel, die überraschend gut ist. Der Unterschied zwischen den mit Hilfe des Baly'schen Siedepunktes des reinen Stickstoffes ermittelten Siedepunktserhöhungen und den nach van t'Hoff berechneten legt den Schluss nahe, dass der Baly'sche Stickstoff nicht genügend rein war, da die Differenzen zwischen den entsprechenden Zahlen in Kolumne III und IV konstant sind; der Unterschied von 0,18° würde einer Verunreinigung von $\frac{0.18}{0.076} = 2.4$ °/o Sauerstoff entsprechen, d. i. eine Verunreinigung, die sehr leicht unterläuft, wenn man sich nicht sehr in Acht nimmt, den Stickstoff mit Luft nicht in Berührung zu bringen; schon wenn der Stickstoff vor der Verflüssigung in einem Gasometer aufgefangen wird, erhält man leicht 2 °/o Sauerstoff beigemengt.

Allein es kann die Differenz von 77.54 — 77.37 = 0.17° zwischen unserem Werte für den Siedepunkt des reinen Stickstoffs und dem Baly'schen auch davon herrühren, dass Baly erstens mit einem Wasserstoffthermometer für konstanten Druck, wir mit einem solchen für konstantes Volum die Temperaturen bestimmten und dass zweitens Baly wahrscheinlich einen anderen Temperaturkoeffizienten für Wasserstoff angenommen hat als wir; Baly gibt leider in seiner Arbeit diesen nicht an. Wahrscheinlich hat Baly den Wert α (für konstanten Druck) = 0.0036600 verwendet, den Travers (Experimental Study of Gases S. 151, 1901) angibt. Es würde in diesem Falle als absoluter Nullpunkt — 273.22 zu nehmen sein d. h. derselbe um 0.18° tiefer liegen als für das Konstantvolumwasserstoffthermometer, für das α (für konstantes Volum) = 0.0036625 gesetzt wird; dann würde unsere Beobachtung des Siedepunktes des reinen Stickstoffs mit jener Baly's bis auf 0.17—0.14 = 0.03° genau übereinstimmen.

Die experimentelle Feststellung der Gefrierpunktserniedrigung des Stickstoffs, die sich ohne besondere Schwierigkeit anstellen lässt, und die Beobachtungen der Schmelzwärme des Stickstoffs würde die obige Ansicht über die Natur der flüssigen Luft noch weiter zu prüfen gestatten; nimmt man an, dass sie bereits durch Vergleich der theoretisch und experimentell ermittelten Siedepunktserhöhungen genügend begründet ist, so würde die experimentelle Ermittlung der Gefrierpunktserniedrigung allein zur Berechnung der Schmelzwärme nach der van t'Hoff'schen Formel dienen können. Nach dem Verhalten der Lösungen zu schliessen, würde Stickstoff bei genügend tiefer Temperatur aus flüssiger Luft ausgefällt werden können und damit ein sehr vollständiges Trennungsverfahren für Sauerstoff und Stickstoff erzielbar sein. Der eine von uns ist nach dieser Richtung hin mit Versuchen beschäftigt.

Sitzung vom 7. Juni 1902.

1. Herr Carl v. Linde macht eine Mittheilung über: „Beobachtungen bei der fractionirten Destillation und Rectification flüssiger Luft". Dieselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Ferd. Lindemann legt eine Abhandlung: „Ueber das Pascal'sche Sechseck" vor.

3. Herr K. A. v. Zittel überreicht eine Arbeit des Obermedizinalrathes a. D. Dr. Joseph Georg Egger: „Ergänzungen zum Studium der Foraminiferen-Familie der Orbitoliniden" (mit 2 Tafeln). Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr Alfr. Pringsheim macht eine Mittheilung: „Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen".

5. Herr Aug. Rothpletz hält einen Vortrag: „Ueber den Ursprung der Thermalquellen zu St. Moritz".

Ueber das Pascal'sche Sechseck.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 7. Juni.)

Es gibt eine ausserordentlich grosse Zahl von Lagenbeziehungen zwischen den Punkten und Linien der vollständigen Figur des Pascal'schen Sechsecks. Sie beziehen sich meistens auf die Steiner'schen und Kirkman'schen Punkte, in denen sich die Pascal'schen Linien zu dreien schneiden, und auf die Gruppirung dieser Punkte auf gewissen anderen Geraden. Im Folgenden soll eine Lagenbeziehung abgeleitet werden, die sich auf einfache Schnittpunkte der Pascal'schen Linien mit solchen Verbindungslinien Pascal'scher Punkte bezieht, die nicht selbst Pascal'sche Linien sind.

Wir bezeichnen die sechs Punkte des Kegelschnittes in üblicher Weise mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, ferner die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 z. B. durch das Symbol 1 — 2 und den Schnittpunkt der Linien 1 — 2 und 3 — 4 durch das Symbol

$$(12 - 34).$$

Auf einer Pascal'schen Linie befinden sich dann z. B. die drei Pascal'schen Punkte

$$(12 - 34),\quad (35 - 26),\quad (46 - 15).$$

Nach dem Vorgange von Salmon bezeichnen wir diese Linie durch das Symbol

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix} \right\},$$

das mit den Symbolen

$$\left\{\begin{matrix} 35 \cdot 46 \cdot 12 \\ 26 \cdot 15 \cdot 34 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 46 \cdot 35 . 12 \\ 15 \cdot 26 \cdot 34 \end{matrix}\right\}$$

gleichbedeutend ist; in jeder der beiden Horizontalreihen dieses Symbols muss jeder der sechs Punkte gerade einmal vorkommen. Diese 60 Pascal'schen Linien schneiden sich zu dreien in den 45 Steiner'schen Punkten; z. B. die drei Linien

$$\left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 14 \cdot 23 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 56 \cdot 14 \cdot 23 \\ 12 \cdot 35 \cdot 46 \end{matrix}\right\}$$

gehen durch einen Steiner'schen Punkt, den wir mit Salmon durch das Symbol

$$\left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 . 14 \cdot 23 \end{matrix}\right\}$$

bezeichnen. Jede der Ziffern 1, ... 6 steht hier in jeder Horizontal- und Vertical-Reihe je einmal; vertauscht man die Horizontalreihen unter einander oder die Verticalreihen unter einander, so bleibt der so bezeichnete Punkt ungeändert.

Ausserdem schneiden sich die 60 Pascal'schen Linien zu je dreien in den 45 Kirkman'schen Punkten, z. B. die drei Linien

$$\left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 56 \cdot 13 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{matrix}\right\}$$

in einem Punkte, den wir (wieder mit Salmon) durch das Symbol

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12} \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{matrix}\right\}$$

bezeichnen, wobei wieder die Anordnung der Verticalreihen und der Horizontalreihen je unter sich gleichgültig ist. Derselbe Punkt würde überdies durch die Symbole

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12} \cdot 46 \cdot 35 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} \overline{34} \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{matrix}\right\}$$

bezeichnet werden; denn die Linien

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 46\cdot 35 \\ 56\cdot 13\cdot 24 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 56\cdot 13\cdot 24 \\ 34\cdot 26\cdot 15 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 12\cdot 35\cdot 46 \end{matrix}\right\}$$

oder

$$\left\{\begin{matrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 56\cdot 13\cdot 24 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 56\cdot 13\cdot 24 \\ 12\cdot 46\cdot 35 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 12\cdot 46\cdot 35 \\ 34\cdot 15\cdot 26 \end{matrix}\right\}$$

sind vor den zuerst gegebenen drei Linien nicht verschieden. In dem Symbole des Kirkman'schen Punktes ist eine Verticalreihe vor den beiden anderen ausgezeichnet, indem nur diese alle sechs Punkte ohne Auslassung und ohne Wiederholung enthält; diese Verticalreihe ist durch einen darüber gesetzten horizontalen Strich markirt.

Auf jeder Pascal'schen Linie gibt es drei solche Kirkman'sche Punkte, z. B. auf der Linie

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \end{matrix}\right\}$$

die Punkte

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12}\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 36\cdot 24\cdot 15 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 12\cdot \overline{34}\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 13\cdot 25\cdot 46 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot \overline{56} \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 26\cdot 35\cdot 14 \end{matrix}\right\}.$$

Ferner liegen zwanzigmal drei Kirkman'sche Punkte mit einem Steiner'schen Punkte auf einer Cayley-Salmon'schen Geraden, und zwar z. B. die drei Punkte

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12}\cdot 35\cdot 46 \\ 45\cdot 26\cdot 13 \\ 36\cdot 15\cdot 24 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 15\cdot \overline{34}\cdot 26 \\ 24\cdot 16\cdot 35 \\ 13\cdot 25\cdot 46 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 13\cdot 24\cdot \overline{56} \\ 46\cdot 15\cdot 23 \\ 35\cdot 26\cdot 14 \end{matrix}\right\}$$

mit dem Steiner'schen Punkte

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 36\cdot 25\cdot 14 \end{matrix}\right\}.$$

Die Beweise für diese und viele andere Sätze werden bekanntlich am leichtesten mittelst des Desargues'schen Satzes

über perspectivisch liegende Dreiecke geführt,[1]) der auch die Grundlage der folgenden Betrachtung bildet.

Es seien zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2, bezw. durch die folgenden Linien gebildet:

$\Delta_1 : l_1$ oder $1-2$, $\quad l_2$ oder $3-4$, $\quad l_3$ oder $5-6$;

$$\Delta_2 : \lambda_1 = \begin{Bmatrix} 12\cdot35\cdot46 \\ 45\cdot16\cdot23 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{Bmatrix} 16\cdot35\cdot42 \\ 34\cdot26\cdot15 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{Bmatrix} 13\cdot56\cdot24 \\ 46\cdot23\cdot15 \end{Bmatrix};$$

Die Seiten der Dreiecke mögen einander so zugeordnet werden, wie sie hier unter einander stehen.

Entsprechende Seiten der Dreiecke Δ_1 und Δ_2 schneiden sich dann in den Pascal'schen Punkten

$$(12-45), \quad (34-16), \quad (23-56),$$

welche sich auf der Pascal'schen Linie

$$L = \begin{Bmatrix} 12\cdot34\cdot56 \\ 45\cdot16\cdot23 \end{Bmatrix}$$

befinden. Diese beiden Dreiecke liegen also perspectivisch, und es müssen auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen. Als Ecken von Δ_1 haben wir die Pascal'schen Punkte

$$(34-56), \quad (56-12), \quad (12-34),$$

und als zugeordnete Ecken von Δ_2 zwei mit P und Q bezeichnete Punkte und einen Pascal'schen Punkt, nemlich

$$(15-24), \qquad P, \qquad Q,$$

wobei also P den Schnittpunkt der Linien

$$\begin{Bmatrix} 13\cdot56\cdot24 \\ 46\cdot23\cdot15 \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} 12\cdot35\cdot46 \\ 45\cdot16\cdot23 \end{Bmatrix}$$

[1]) Vgl. die zahlreichen Anwendungen dieser Beweismethode bei P. Veronese, Nuovi teoremi sull' Hexagrammum mysticum, Atti della R. Accademia dei Lincei; Ser. III, classe di sc. fis., mat. e naturw. 1877 und Wedekind, Lagenbeziehungen bei ebenen, perspectivischen Dreiecken, Math. Annalen, Bd. 16, 1879.

oder kurz den Punkt

$$P = \left[\left\{ \begin{matrix} 13 \cdot 56 \cdot 24 \\ 46 \cdot 23 \cdot 15 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{matrix} \right\} \right]$$

bezeichnet, und ebenso Q den Punkt

$$Q = \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 16 \cdot 35 \cdot 42 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix} \right\} \right].$$

Die Verbindungslinie der Ecke (34 — 56) von $\varDelta_1$ mit der zugeordneten Ecke (15 — 24) von $\varDelta_2$ ist die Pascal'sche Linie

$$\varLambda = \left\{ \begin{matrix} 34 \cdot 15 \cdot 26 \\ 56 \cdot 24 \cdot 13 \end{matrix} \right\},$$

diese geht also durch den Schnittpunkt der Linien

$$[P - (56 - 12)] \text{ und } [Q - (12 - 34)],$$

den wir zur Abkürzung als Punkt E bezeichnen.

Um zu einem solchen Punkt E zu gelangen, theilt man die sechs gegebenen Punkte in drei Paare, etwa: 1 — 2, 3 — 4, 5 — 6 (was auf 15 Arten geschehen kann); dadurch ist die zu benutzende und oben definierte Pascal'sche Linie L nicht eindeutig bestimmt, kann vielmehr durch eine der folgenden ersetzt werden:

$$L' = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 46 \cdot 23 \cdot 15 \end{matrix} \right\}, \quad L'' = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 35 \cdot 24 \cdot 16 \end{matrix} \right\}, \quad L''' = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 45 \cdot 13 \cdot 26 \end{matrix} \right\},$$

$$L^{(4)} = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 36 \cdot 24 \cdot 15 \end{matrix} \right\}, \quad L^{(5)} = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 46 \cdot 13 \cdot 25 \end{matrix} \right\},$$

$$L^{(6)} = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 35 \cdot 14 \cdot 26 \end{matrix} \right\}, \quad L^{(7)} = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \end{matrix} \right\}.$$

Hat man L unter diesen acht Linien ausgewählt, so gibt es zu jeder noch drei Linien $\varLambda$; bei der oben gewählten war das Paar 1 — 2 ausgezeichnet; mit ihr gleichberechtigt sind die beiden:

$$\varLambda_1 = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 56 \cdot 42 \cdot 31 \end{matrix} \right\}, \quad \varLambda_2 = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 53 \cdot 64 \\ 34 \cdot 62 \cdot 51 \end{matrix} \right\}.$$

Durch L und $\varLambda$ ist dann λ_1 eindeutig bestimmt, ebenso λ_2 und λ_3, denn die zu λ_1 in $\varDelta_2$ gegenüber liegende Ecke ist durch die Schnittpunkte der Linien l_2 und l_3 mit L, d. h. durch die Punkte (23 — 56) und (34 — 16) vollkommen bestimmt. Im Ganzen gibt es hiernach

$$15 \cdot 8 \cdot 3 = 360$$

Punkte E; auf jeder Pascal'schen Linie befinden sich also sechs solche Punkte.

Gehen wir z. B. von der Pascal'schen Linie $\varLambda$ aus, wo wieder

$$\varLambda = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 15 \cdot 26 \\ 56 \cdot 24 \cdot 13 \end{Bmatrix}$$

gewählt wurde, so wird auf ihr ein Punkt E bestimmt sein, sobald noch eine zugehörige Linie L passend gewählt ist; das kann aber in der That auf sechs verschiedene Arten geschehen; und zwar findet man je zwei Linien L für jede der drei noch möglichen Theilungen der sechs Punkte in drei Paare:

$$\begin{array}{rl} \text{I} & 34,\ 56,\ 12, \\ \text{II} & 15,\ 24,\ 36, \\ \text{III} & 26,\ 13,\ 45. \end{array}$$

Für I ergibt sich:

$$L_I = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{Bmatrix}, \quad L_I' = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 36 \cdot 25 \cdot 14 \end{Bmatrix};$$

ebenso:

$$L_{II} = \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 45 \cdot 32 \cdot 61 \end{Bmatrix}, \quad L_{II}' = \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{Bmatrix};$$

$$L_{III} = \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 12 \cdot 35 \cdot 46 \end{Bmatrix}, \quad L_{III}' = \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \end{Bmatrix}.$$

Je zwei zusammengehörige Linien schneiden sich in einem Steiner'schen Punkte; diese Punkte nennen wir S_I, S_{II}, S_{III}, nemlich:

$$S_I = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \\ 36 \cdot 25 \cdot 14 \end{Bmatrix}, \quad S_{II} = \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 45 \cdot 32 \cdot 61 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{Bmatrix}, \quad S_{III} = \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \end{Bmatrix}.$$

Den drei Symbolen ist die erste Verticalreihe gemeinsam; ihnen beigeordnet ist ein vierter Punkt

$$S_{IV} = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 56 \cdot 12 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \\ 26 \cdot 13 \cdot 45 \end{Bmatrix},$$

dessen Symbol dieselbe Verticalreihe enthält.

Vertauschen wir entweder 4 mit 5 oder 3 mit 6 oder 1 mit 2 und ersetzen dem entsprechend A bes. durch

$$A''' = \begin{Bmatrix} 35 \cdot 14 \cdot 26 \\ 46 \cdot 25 \cdot 13 \end{Bmatrix}, \quad A'' = \begin{Bmatrix} 46 \cdot 15 \cdot 23 \\ 35 \cdot 24 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad A' = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 25 \cdot 16 \\ 56 \cdot 14 \cdot 23 \end{Bmatrix},$$

so werden statt der Punkte S_I, S_{II}, S_{III} bes. die Punkte

$$\begin{array}{llll} S_{II}, & S_I, & S_{IV} & \text{für } A''' \\ S_{III}, & S_{IV}, & S_I & \quad " \quad A'' \\ S_{IV}, & S_{III}, & S_{II} & \quad " \quad A' \end{array}$$

benutzt. Je vier Linien A führen also hierbei auf dieselbe Gruppe von vier Steiner'schen Punkten, wie es sein muss, da es 60 Pascal'sche Linien und nur 15 solche Gruppen von Steiner'schen Punkten gibt.

Zu jedem Steiner'schen Punkte gehört bekanntlich ein conjugirter; er ist conjugirter Pol desselben sowohl in Bezug auf den Kegelschnitt, der die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthält, als in Bezug auf einen der zehn zugehörigen Bauer'schen Kegelschnitte;[1]) man erhält ihn, indem man Horizontal- und Verticalreihen im Symbole des gegebenen Steiner'schen Punktes vertauscht. Zu S_{IV} ist so der Steiner'sche Punkt

$$S'_{IV} = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 15 \cdot 26 \\ 56 \cdot 24 \cdot 13 \\ 12 \cdot 36 \cdot 45 \end{Bmatrix}$$

conjugirt; er befindet sich auf der Linie A, von der wir ausgingen; ebenso liegen die zu S_{III}, S_{II}, S_I conjugirten Punkte

[1]) Vgl. G. Bauer, Ueber das Pascal'sche Theorem, Abhandlungen d. k. bayer. Akademie, II. Classe, Bd. 9, 1874.

bez. auf den Linien A''', A'', A'. Diese vier conjugirten Punkte befinden sich überdies auf einer sogenannten Steiner'schen Geraden.

Bringt man die Linien L in anderer Anordnung zum Schnitte, so ergeben sich drei Kirkman'sche Punkte, deren Symbole eine gemeinsame Verticalreihe haben, nemlich

$$(L_I - L_{II}) = \begin{Bmatrix} \overline{45} \cdot 66 \cdot 23 \\ 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \end{Bmatrix}, \quad (L'_{II} - L_{III}) = \begin{Bmatrix} \overline{12} \cdot 46 \cdot 35 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 45 \cdot 13 \cdot 26 \end{Bmatrix},$$

$$(L'_I - L'_{III}) = \begin{Bmatrix} \overline{45} \cdot 26 \cdot 13 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \\ 12 \cdot 56 \cdot 34 \end{Bmatrix}.$$

Diese einzelnen Bemerkungen sind Folgen der Thatsache, von der wir ausgingen, und die wir dahin aussprechen können, dass zu jedem Dreiecke, dessen Seiten die Ecken des Sechsecks enthält, acht Gruppen von je drei Dreiecken gehören, deren Seiten Pascal'sche Linien sind, und deren jedes zum ersten Dreiecke perspectivisch liegt.

Geht man andererseits von der Linie

$$\lambda_1 = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{Bmatrix}$$

aus, so können die zugehörigen Paare λ_2 und λ_3 auf drei verschiedene Weisen nach leicht erkennbarem Gesetze gewählt werden, nemlich

$$\lambda_2 = \begin{Bmatrix} 46 \cdot 23 \cdot 15 \\ 13 \cdot 56 \cdot 24 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{Bmatrix} 35 \cdot 16 \cdot 24 \\ 26 \cdot 34 \cdot 15 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda'_2 = \begin{Bmatrix} 35 \cdot 16 \cdot 24 \\ 14 \cdot 25 \cdot 36 \end{Bmatrix}, \quad \lambda'_3 = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda''_2 = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{Bmatrix}, \quad \lambda''_3 = \begin{Bmatrix} 46 \cdot 23 \cdot 15 \\ 25 \cdot 14 \cdot 36 \end{Bmatrix}.$$

Diese Linien schneiden sich paarweise in Steiner'schen Punkten, nemlich es ist

$$(\lambda_3' \lambda_2'') = \left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{matrix} \right\} = \Sigma_1,$$

$$(\lambda_2 \lambda_3'') = \left\{ \begin{matrix} 46 \cdot 23 \cdot 15 \\ 13 \cdot 56 \cdot 24 \\ 25 \cdot 14 \cdot 36 \end{matrix} \right\} = \Sigma_2,$$

$$(\lambda_3 \lambda_2') = \left\{ \begin{matrix} 35 \cdot 16 \cdot 24 \\ 26 \cdot 34 \cdot 15 \\ 14 \cdot 25 \cdot 36 \end{matrix} \right\} = \Sigma_3.$$

Den drei Symbolen ist die letzte Verticalreihe gemeinsam; den dazu gehörigen vierten Punkt mit gleicher Verticalreihe erkennt man als identisch mit dem obigen Punkte S_{IV}, welcher auf Λ liegt. Die Punkte Σ_2 und Σ_3 haben mit den Punkten S_I und S_{III} die Horizontalreihe 36 — 14 — 25 gemeinsam; diese vier Punkte befinden sich daher auf einer Steiner'schen Geraden.

Geht man von einer Pascal'schen Linie (λ_1) aus, so gibt es auf derselben hiernach drei Paare von Punkten (P, Q), in denen sie von anderen Pascal'schen Linien (λ_2 und λ_3) so geschnitten wird, dass die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte mit gewissen Pascal'schen Punkten (Schnitten von l_1 mit l_2 und l_3) sich auf einer Pascal'schen Linie treffen.



Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 30. Juni.)

Herr Poincaré hat bereits im Jahre 1883 einen Satz bewiesen,[1]) welcher eine Beziehung angiebt zwischen dem infinitären Verhalten einer ganzen transcendenten Function $g(x) = \sum c_\nu x^\nu$ für $|x| = \infty$ und demjenigen der Coefficienten c_ν für $\nu = \infty$. Darnach hat man allemal:[2])

$$\lim_{\nu=\infty} (\nu!)^{\frac{1}{m}} \cdot c_\nu = 0,$$

wenn für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ die Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{x=\infty} e^{-\varepsilon \cdot |x|^m} \cdot g(x) = 0 \quad (m \text{ eine natürliche Zahl}),$$

anders ausgesprochen, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl R_ε existirt, sodass:

$$|g(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^m} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

---

[1]) Bulletin de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 142.

[2]) Aus dem von Herrn Poincaré gegebenen Beweise folgt sogar (ohne dass es a. a. O. ausdrücklich erwähnt wird):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{m}} \cdot c_\nu} = 0.$$

Späterhin hat Herr Hadamard[1]) gezeigt, dass der Satz nicht nur merklich verallgemeinert, in's besondere ohne weiteres auf beliebige positive m übertragen werden kann,[2]) sondern dass derartige Sätze bei geeigneter Formulirung auch umkehrbar sind.[3])

Da die betreffenden Beweise durchweg ziemlich complicirte Hülfsmittel verwenden[4]) und es mir andererseits wünschenswerth erschien, jene Sätze in passendem Umfange für die elementare Functionen-Theorie zu gewinnen, so habe ich versucht, dieselben in möglichst elementarer Weise neu zu begründen. Die im folgenden mitzutheilenden Beweise scheinen mir, abgesehen von der Geringfügigkeit der hierzu aufgewendeten Hülfsmittel, auch grössere Präcision und einen tieferen Einblick in Grundlage und Wesen der fraglichen Beziehungen zu geben: diese gruppiren sich in sehr übersichtlicher Weise um einen lediglich auf gewisse Reihen mit positiven Termen bezüglichen Hauptsatz (§ 1 und, vermittelst eines elementaren Hülfssatzes § 2, in verallgemeinerter Form § 3), dessen dualistische Fassung unmittelbar auch das Maass ihrer Umkehrbarkeit erkennen lässt (§ 4, § 5). Eine einfache Ueberlegung zeigt dann, wie die für jene Reihen mit positiven Termen gewonnenen Resultate für die Theorie der ganzen transcendenten Functionen nutzbar gemacht werden können (§ 6).

---

[1]) Étude sur les propriétés des fonctions entières etc.: Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 171 ff.

[2]) a. a. O. p. 183.

[3]) a. a. O. p. 180.

[4]) Man vergleiche auch die Dissertation von K. von Schaper: Ueber die Theorie der Hadamard'schen Functionen etc. (Göttingen, 1898) p. 15–22. — E. Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900), p. 53–56. — Ernst Lindelöf, Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini: Acta soc. scient. Fennicae, T. 31 (1902), p. 33 ff.

§ 1.

Es bedeute r eine reelle positive Veränderliche, $\sum c_\nu r^\nu$ und $\sum C_\nu r^\nu$ je eine beständig convergirende Reihe mit reellen, nicht-negativen Coefficienten.

Hauptsatz: *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$\left.\begin{aligned} &(1^a) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma r} \\ &(1^b) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu > A \cdot e^{\gamma r} \end{aligned}\right\} (A > 0,\ \gamma > 0)$$

die erste für alle r, welche eine gewisse positive Zahl R übersteigen, die zweite zum mindesten für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so ist:

$$(2^a) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} < \gamma, \qquad (2^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geqq \gamma.$$

Beweis. Setzt man in (1^a) $r = \lambda\varrho$, so folgt:

$$\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu \lambda^\nu \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma\lambda\varrho}, \text{ falls } \lambda > \frac{R}{\varrho},$$

und nach Multiplication mit dem Factor $e^{-\lambda}$:

$$\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot e^{-(1-\gamma\varrho)\lambda}.$$

Substituirt man $\lambda = m+1,\ m+2, \ldots$ in inf. (wo: $m+1 > \frac{R}{\varrho}$), so ergiebt sich durch Addition der betreffenden Relationen:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu \left(\sum_{m+1}^\infty {}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} \right) \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot \sum_{m+1}^\infty {}^\lambda e^{-(1-\gamma\varrho)\lambda}.$$

Dabei ist die rechts, folglich auch die links auftretende Reihe convergent, wenn $1 - \gamma\varrho > 0$, also für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$. Da überdies:

$$\sum_1^m {}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} < m^\nu \cdot \sum_1^m {}^\nu e^{-\lambda} < \frac{m^\nu}{e-1}$$

und somit die Reihe

$$\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu \left(\sum_1^m {}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} \right) \cdot \varrho^\nu$$

gleichzeitig mit $\sum c_\nu \varrho^\nu$ beständig convergirt, so folgt, wenn man diese letztere Reihe zu der linken Seite von (2) addirt, dass:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu S_\nu \cdot c_\nu \cdot \varrho^\nu, \text{ wo: } S_\nu = \sum_1^\infty {}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}$$

für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$ convergirt.

Um zunächst das entsprechende Divergenz-Resultat für den Fall der Voraussetzung (1^b) abzuleiten, bedeute r_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge positiver, in's Unendliche wachsender Zahlen von der Beschaffenheit, dass für $r = r_\lambda$ die Beziehung (1^b) besteht, also:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu \cdot r_\lambda^\nu \geq e^{\gamma \cdot r_\lambda}.$$

Da man die r_λ (wegen $\lim_{\lambda=\infty} r_\lambda = \infty$) jedenfalls so auswählen kann, dass:

$$\gamma (r_{\lambda+1} - r_\lambda) \geqq 1,$$

so gehört dem Intervalle:

$$\gamma r_\lambda \leqq x \leqq \gamma r_{\lambda+1}$$

mindestens eine ganze Zahl an. Bezeichnet man dann mit m_λ die kleinste ganze Zahl, welche nicht kleiner ist, als γr_λ, also:

$$m_{\lambda-1} \leqq m_\lambda - 1 < \gamma r_\lambda \leqq m_\lambda < m_{\lambda+1},$$

so ergiebt sich aus Ungl. (4) a fortiori:

$$\sum_0^\infty {}^\nu C_\nu \cdot \left(\frac{m_\lambda}{\gamma} \right)^\nu > e^{m_\lambda - 1},$$

und, wenn man mit e^{-m_λ} multiplicirt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu m_\lambda^\nu \cdot e^{-m_\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu > e^{-1},$$

woraus durch Substitution von $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ (in inf.) und Addition resultirt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot \left(\sum_1^\infty{}^\lambda m_\lambda^\nu \cdot e^{-m_\lambda}\right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu = \infty,$$

also um so mehr:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\lambda \cdot \left(\sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu = \infty,$$

d. h. die Reihe

(5) $$\sum_0^\infty{}^\nu S_\nu \cdot C_\nu \cdot \varrho^\nu \quad \text{divergirt für } \varrho \geqq \frac{1}{\gamma}.$$

Um das bisher gewonnene Doppel-Resultat im Sinne des oben ausgesprochenen Satzes zu verwerthen, bedarf es schliesslich nur noch des Nachweises, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{S_\nu}{\nu!} = 1$$

ist. Zu diesem Behufe werde gesetzt:

(6) $$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}.$$

Ist sodann $|e^x| < 1$; also der reelle Theil von x wesentlich negativ, so hat man:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda e^{\lambda x}$$

also:

$$f'(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad f''(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \ldots$$

$$f^\nu(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{\lambda x}$$

und daher:

(7) $$f^\nu(-1) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} = S_\nu.$$

Andererseits ergiebt sich:

$$f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots}$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu\right),$$

sodass also $f(x) + \frac{1}{x}$ in der Umgebung von $x = 0$ **regulär** ist. Da ferner $f(x) + \frac{1}{x}$ auch bei $x = -1$ **regulär** ist und als **nächstgelegene singuläre** Stellen die Stellen $x = \pm 2\pi i$ auftreten, so hat man:

$$(8) \qquad f(x) + \frac{1}{x} = \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu (x+1)^\nu \quad \text{für: } |x+1| < 2\pi,$$

in's besondere also auch noch für $x = 0$. Die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu$ ist somit **convergent**, und daher:

$$(9) \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = 0.$$

Man hat aber:

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot D_x^\nu \left(f(x) + \frac{1}{x}\right)_{x=-1}$$

$$= \frac{1}{\nu!} \cdot \left\{ f^\nu(x) + \frac{(-1)^\nu \cdot \nu!}{x^{\nu+1}} \right\}_{x=-1}$$

$$= \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(-1) - 1,$$

und somit nach Gl. (9) und (7):

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{S_\nu}{\nu!} = 1.$$

Daraus folgt dann schliesslich mit Berücksichtigung der Resultate (3) und (5), dass von den beiden Reihen:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \nu! \cdot c_\nu \cdot \varrho^\nu, \qquad \sum_0^\infty{}^\nu \nu! \cdot C_\nu \cdot \varrho^\nu$$

die erste für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$ convergirt, die zweite für $\varrho \geqq \frac{1}{\gamma}$ divergirt. Die erste besitzt also mindestens, die zweite höchstens den Convergenz-Radius $\frac{1}{\gamma}$, und es bestehen somit nach dem bekannten Cauchy'schen Satze die Beziehungen:

$$(11^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} \leqq \gamma, \qquad (11^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geqq \gamma.$$

Zusatz. Die unter den gemachten Voraussetzungen geltenden Relationen (11^a), (11^b) lassen sich unmittelbar auch durch die folgenden, etwas einfacheren ersetzen:

$$(12^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq \gamma \cdot e, \qquad (12^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq \gamma \cdot e,$$

wenn man ν^ν an Stelle von $\nu!$ einführt, was sich durch Benützung der Stirling'schen Formel, aber auch ohne dieses relativ complicirte Hülfsmittel in folgender, äusserst elementaren Weise bewerkstelligen lässt. Es ist identisch:

$$n! = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} \cdot n^n}{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \ldots n^{n-1}} = n^n \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu$$

$$= \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 4^4 \ldots (n-1)^n \cdot n^{n+1}}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \ldots n^n} = n^{n+1} \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1},$$

also:

$$(12) \qquad n^n \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = n! = n^{n+1} \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

und daher:

$$\prod_1^{n-1}{}_\nu \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e^{n-1} < \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

Multiplicirt man diese Ungleichung mit Gl. (12), so folgt:

$$n^n < n!\, e^{n-1} < n^{n+1}$$

oder auch:

$$e < n! \left(\frac{e}{n}\right)^n < e\,n,$$

und daher:

(13) $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} \cdot \frac{e}{n} = 1,$$

anders geschrieben:

(14) $$\sqrt[n]{n!} \cong \frac{n}{e} \qquad (n = \infty,$$

sodass also in der That die Beziehungen (11) und (12) durch einander ersetzt werden dürfen.

---

§ 2.

Um den soeben abgeleiteten Hauptsatz zu verallgemeinern, beweise ich zunächst den folgenden Hülfssatz:

Ist $\varkappa > 0$, $\sum b_\nu^\varkappa$ *eine beliebig vorgelegte*, $\sum a_\nu$ *eine ganz willkürlich angenommene convergente Reihe mit positiven Gliedern, so hat man:*

(I) $$\left.\begin{matrix}(15^a)\\(15^b)\end{matrix}\right\} \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix}\varkappa > 1\\ \varkappa < 1\end{matrix}\right.$$

(II) $$\left.\begin{matrix}(16^a)\\(16^b)\end{matrix}\right\} \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix}\varkappa > 1\\ \varkappa < 1.\end{matrix}\right.$$

Beweis zu (I). Ist $p > 0$, $\varkappa > 1$, so hat man:

(17) $$p^{\varkappa-1} < (1+p)^{\varkappa-1}$$

und daher:

$$p^{\varkappa-1} - 1 < (1+p)^{\varkappa-1} - 1.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung sicher positiv ist, so folgt durch Multiplication mit der Ungleichung:

$$p < 1 + p,$$

dass:

$$p^\varkappa - p < (1 + p)^\varkappa - 1 - p,$$

also:

$$1 + p^\varkappa < (1 + p)^\varkappa. \tag{18}$$

Setzt man jetzt: $p = \frac{b}{b_0}$, so folgt nach Multiplication mit $b_0^\varkappa$:

$$b_0^\varkappa + b_1^\varkappa < (b_0 + b_1)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1). \tag{19}$$

Angenommen nun, man habe für irgend ein $n \geqq 1$:

$$\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1), \tag{20^a}$$

so liefert die Addition von $b_{n+1}^\varkappa$ zunächst:

$$\sum_0^{n+1} {}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa + b_{n+1}^\varkappa$$

also, mit Benützung von Ungl. (19):

$$\sum_0^{n+1} {}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^{n+1} {}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa,$$

d. h. Ungl. (20^a) gilt auch noch, wenn n durch $(n + 1)$ ersetzt wird. Sie gilt also allgemein, da nach (19) ihre Richtigkeit für $n = 1$ erwiesen ist.

Schreibt man in (20^a) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituirt $\frac{1}{b_\nu^{\varkappa'}}$ für b_ν, so folgt weiter:

$$\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu < \left(\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'},$$

also:

$$\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}} > \left(\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu\right)^{\frac{1}{\varkappa'}} \qquad (\varkappa' > 1),$$

und daher, wenn man noch $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$ setzt:

$$\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^n {}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1). \tag{20^b}$$

Da die grundliegende Beziehung (17) eine wirkliche Ungleichung ist (d. h. mit definitivem Anschlusse der Gleichheit), und die Abweichung zwischen den beiden Seiten, wie der Schluss von n auf $(n+1)$ zeigt, bei dem Hinzutreten jedes neuen Elementes noch verstärkt wird, so folgt schliesslich für $\lim n = \infty$, wie behauptet:

$$\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu^\varkappa \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} \left(\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu\right)^\varkappa \begin{cases} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1. \end{cases} -$$

Beweis zu II. Ist $0 < c_0 < r < c_1$ und $\varkappa > 1$, so hat man:[1])

$$(21) \qquad \begin{cases} c_1^\varkappa - r^\varkappa > \varkappa \cdot r^{\varkappa-1}(c_1 - r) \\ r^\varkappa - c_0^\varkappa < \varkappa \cdot r^{\varkappa-1}(r - c_0). \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste dieser Ungleichungen mit $(r-c_0)$, die zweite mit (c_1-r), so folgt durch Subtraction:

$$(c_1^\varkappa - r^\varkappa)\cdot(r-c_0) - (r^\varkappa - c_0^\varkappa)\cdot(c_1 - r) > 0,$$

anders geordnet:

$$(22) \qquad (c_1 - r)\cdot c_0^\varkappa + (r - c_0)\cdot c_1^\varkappa > (c_1 - c_0)\cdot r^\varkappa.$$

Der Bedingung: $c_0 < r < c_1$ wird offenbar genügt, wenn man setzt:

$$r = \frac{a_0 c_0 + a_1 c_1}{a_0 + a_1},$$

unter a_0, a_1 beliebige positive Zahlen verstanden. Alsdann geht aber Ungleichung (22) in die folgende über:

$$\frac{c_1 - c_0}{a_1 + a_1}\cdot a_0 c_0^\varkappa + \frac{c_1 - c_0}{a_0 + a_1}\cdot a_1 c_1^\varkappa > (c_1 - c_0)\left(\frac{a_0 c_0 + a_1 c_1}{a_0 + a_1}\right)^\varkappa,$$

oder auch:

$$(23) \quad a_0 c_0^\varkappa + a_1 c_1^\varkappa > (a_0 + a_1)^{1-\varkappa}\cdot(a_0 c_0 + a_1 c_1)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Da im übrigen diese zunächst unter der Voraussetzung $c_0 < c_1$ abgeleitete Ungleichung in Bezug auf die Indices 0,1

[1]) S. den Zusatz I.

symmetrisch sich verhält, so gilt sie unverändert auch für $c_0 > c_1$; nur für $c_0 = c_1$ geht sie in eine Identität über.

Angenommen nun, man habe für irgend ein $n \geqq 1$:

$$(24^a) \quad \sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Ersetzt man sodann:

$$a_n \text{ durch } a_n + a_{n+1}$$

$$c_n \quad " \quad \frac{a_n c_n + a_{n+1} c_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$$

also:

$$a_n c_n \quad " \quad a_n c_n + a_{n+1} c_{n+1},$$

so geht Ungleichung (24^a) zunächst in die folgende über:

$$\sum_0^{n-1}{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa + (a_n + a_{n+1})^{1-\varkappa} \cdot (a_n c_n + a_{n+1} c_{n+1})^\varkappa$$
$$> \left(\sum_0^{n+1}{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^{n+1}{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa,$$

und, wenn man auf das letzte Glied der linken Seite die Ungleichung (23) anwendet:

$$\sum_0^{n+1}{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^{n+1}{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^{n+1}{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa,$$

d. h. Ungl. (24^a) gilt auch noch, wenn n durch $n+1$ ersetzt wird. Sie gilt also wiederum allgemein, da ihre Richtigkeit nach (23) für $n = 1$ erwiesen ist.

Schreibt man in Ungl. (24^a) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituirt $c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}$ für c_ν, so wird:

$$\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu > \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa'} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'},$$

also:

$$\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}} < \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\frac{1}{\varkappa'}} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^{\frac{1}{\varkappa'}} \qquad (\varkappa' > 1),$$

und, wenn man $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$ setzt:

$$(24^b) \qquad \sum_0^n {}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n {}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n {}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa < 1).$$

Macht man noch in (23^a), 23^b) die Substitution:

$$a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa, \quad \text{also:} \quad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu,$$

so ergiebt sich:

$$(25) \quad \sum_0^n {}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \left(\sum_0^n {}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n {}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1. \end{matrix}\right.$$

Da die grundlegende Beziehung (22) wiederum eine wirkliche Ungleichung ist, sofern nicht gerade $c_0 = c_1$, und die Abweichung zwischen den beiden Seiten, wie der Schluss von n auf $(n+1)$ zeigt, bei dem Hinzutreten jedes neuen Elementes c_ν sich verstärkt, ausser wenn $c_\nu = c_{\nu-1}$, in welchem Falle sie immerhin erhalten bleibt, so folgt für $n = \infty$:

$$\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \left(\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1 \end{matrix}\right., \quad \text{q. e. d.}$$

Zusatz I. Die Ungleichungen (24) lassen sich auch aus einem von Herrn Hoelder[1]) mit Hülfe des Mittelwerthsatzes der Differential-Rechnung bewiesenen, allgemeineren Mittelwerthsatze herleiten. Zur Vervollständigung der hier gegebenen, elementareren Herleitung sei ausdrücklich bemerkt, dass man die fundamentalen Ungleichungen (21) auch für ganz beliebige positive $\varkappa$, ohne den zumeist zu ihrer Herleitung verwendeten Mittelwerthsatz der Differential-Rechnung, völlig elementar in folgender Weise gewinnt.

Aus der für jedes von 1 verschiedene A und ganzzahlige $n > 1$ geltenden Identität:

$$\frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^n}{1 - A} = 1 + A + \ldots + A^{n-1}$$

---

[1]) Göttinger Nachr. 1889, p. 38 ff.; vgl. in's besondere p. 44.

folgt für jedes positive $A \gtrless 1$:

$$A^n > 1 + n(A-1) \tag{26}$$

und hieraus durch Substitution von $A^{-\frac{1}{n}}$ für A:

$$A^{-1} > 1 + n(A^{-\frac{1}{n}} - 1),$$

also:

$$A^{-\frac{1}{n}} < 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A},$$

wobei die rechte Seite stets wesentlich positiv ist. In Folge dessen hat man:

$$A^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A}}$$

$$> 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A}, \quad \text{falls: } \frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| < 1,$$

und, wenn man diese Ungleichung in die m^{te} Potenz erhebt, mit Benützung von Ungl. (26):

$$A^{\frac{m}{m}} > 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{A-1}{A}. \tag{27}$$

Die hierbei gemachte Voraussetzung: $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| < 1$ ist offenbar immer erfüllt, wenn $A > 1$. Ist dagegen $A < 1$, so wird $\frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A} < 0$, sodass also, falls $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| > 1$ sein sollte, die rechte Seite von Ungl. (27) negativ ausfällt: in diesem Falle sagt also diese Ungleichung etwas zwar triviales, aber immerhin richtiges aus. Man hat somit für jedes positive $A \gtrless 1$ und jedes rationale $\varkappa > 0$:

$$A^{\varkappa} > 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}. \tag{28}$$

Ist jetzt $\varkappa$ irrational und etwa $\varkappa = \lim_{n=\infty} \varkappa_n$, wo $\varkappa_n > 0$ und rational, so folgt aus:

$$A^{\varkappa_n} > 1 + \varkappa_n \cdot \frac{A-1}{A}$$

auf Grund der Definition: $A^{\varkappa} = \lim_{n=\infty} A^{\varkappa_n}$, zunächst nur soviel, dass:

$$A^{\varkappa} \geqq 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}.$$

Man erkennt aber leicht, dass das Gleichheitszeichen in Wahrheit ausgeschlossen erscheint. Dies ist ohne weiteres evident, falls die rechte Seite negativ ausfallen sollte. Ist sie aber positiv, so gilt dies a fortiori, wenn man $\varkappa$ durch $\frac{\varkappa}{2}$ ersetzt. Man hätte also zunächst:

$$A^{\frac{\varkappa}{2}} \geqq 1 + \frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{A-1}{A} > 0$$

und hieraus durch Erhebung in's Quadrat:

$$A^{\varkappa} \geqq 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A} + \frac{\varkappa^2}{4} \cdot \left(\frac{A-1}{A}\right)^2$$

$$> 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}.$$

Die Ungleichung (28) gilt somit für jedes beliebige $\varkappa > 0$.

Ist jetzt $\varkappa > 1$, so hat man auch:

$$A^{\varkappa - 1} > 1 + (\varkappa - 1) \cdot \frac{A-1}{A},$$

und, wenn man diese Ungleichung mit A multiplicirt:

$$A^{\varkappa} > A + (\varkappa - 1)(A - 1)$$

d. h. schliesslich:

$$A^{\varkappa} > 1 + \varkappa (A - 1) \quad \text{für } \varkappa > 1. \tag{29}$$

Substituirt man hier $A = \frac{b}{a}$ und $A = \frac{a}{b}$, wo $b > a > 0$, so ergeben sich die oben unter (21) benützten Ungleichungen:

$$(30) \qquad \begin{cases} b^\varkappa - a^\varkappa > \varkappa \cdot a^{\varkappa - 1}(b - a) \\ b^\varkappa - a^\varkappa < \varkappa \cdot b^{\varkappa - 1}(b - a) \end{cases} \qquad (\varkappa > 1).$$

Zusatz II. Liest man die auf den Fall $\varkappa > 1$ bezügliche Ungleichung (16^a) rückwärts, so gewinnt man den folgenden Convergenz-Satz:

Gleichzeitig mit den beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu^\varkappa$ (wo $\varkappa > 1$) convergirt allemal auch die Reihe $\sum a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu$.

Herr Hoelder hat diesen Satz nur für den speciellen Fall $a_\nu = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\varrho}$ aus der Ungleichung (24^a) in wesentlich complicirterer Weise abgeleitet.[1]) Dazu will ich noch bemerken, dass der obige Convergenz-Satz für den Fall eines ganzzahligen $\varkappa$ sich noch einfacher aus dem bekannten Satze ergiebt,[2]) dass das geometrische Mittel niemals das arithmetische übersteigt, also:

$$\sqrt[\varkappa]{p^{(1)} \cdot p^{(2)} \ldots p^{(\varkappa)}} \leqq \frac{1}{\varkappa}(p^{(1)} + p^{(2)} + \ldots + p^{(\varkappa)}).$$

Setzt man hier $p^{(1)} = \ldots = p^{(\varkappa - 1)} = a_\nu$, $p^{(\varkappa)} = b_\nu^\varkappa$, so folgt:

$$a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu \leqq \frac{(\varkappa - 1) \cdot a_\nu + b_\nu^\varkappa}{\varkappa}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu \leqq \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu + \frac{1}{\varkappa} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu^\varkappa,$$

woraus die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

---

1) A. a. O. p. 46.

2) Für den Fall $\varkappa = 2$ wurde diese Schlussweise schon bei früherer Gelegenheit von mir benützt: Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900), p. 63.

§ 3.

Verallgemeinerte Form des Hauptsatzes von § 1. *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$(31^a)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu \leqq A\cdot e^{\gamma\cdot r^a}$$

$$(A > 0,\ \gamma > 0,\ a > 0)$$

$$(31^b)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu \geqq A\cdot e^{\gamma\cdot r^a}$$

die erste für alle r, welche eine gewisse positive Zahl R übersteigen, die zweite für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man:

$$(32^a)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot c_\nu} \leqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}},$$

$$(32^b)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot C_\nu} \geqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}},$$

oder auch:

$$(33^a)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}},$$

$$(33^b)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Beweis: Substituirt man in (31^a) $r^{\frac{1}{a}}$ für r, so wird:

$$(34)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{a}} = \sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^a r^\nu)^{\frac{1}{a}} \leqq A\cdot e^{\gamma r}\quad (\text{für } r > R^a).$$

Man hat nun zunächst im Falle $a > 1$ nach § 2, Ungl. (15^b) (für $\varkappa = \dfrac{1}{a} < 1$):

$$\sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^a r^\nu)^{\frac{1}{a}} > \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a r^\nu\right)^{\frac{1}{a}},$$

also:

$$(35^1)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a r^\nu < \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{a}}\right)^a \qquad (a > 1).$$

Andererseits im Falle $a < 1$ nach Ungl. (16[a]) (für $\varkappa = \frac{1}{a} > 1$), wenn man noch setzt: $a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu$, wo $\delta > 0$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^a r^\nu)^{\frac{1}{a}} > \left(\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\nu(1-a)} \cdot c_\nu^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$= \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu\right)^{\frac{1}{a}},$$

also:

$$(35^2)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{a}}\right)^a \quad (a<1).$$

Mit Benützung der Ungleichungen (35[1]), (35[2]) ergiebt sich also aus (34):

$$(36^1)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot r^\nu < A^a \cdot e^{a\gamma r} \qquad (a > 1)$$

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma r} \qquad (a < 1),$$

oder, wenn man in der letzten Ungleichung $\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}$ durch r ersetzt:

$$(36^2)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot r^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma \cdot (1+\delta)^{1-a} \cdot r} \qquad (a < 1).$$

Nach dem Hauptsatze des § 1 ergibt sich also aus (36[1]), dass:

$$(37^1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leq a\gamma \qquad (a > 1).$$

Ebenso aus (36[2]) zunächst:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leq a\gamma (1+\delta)^{1-a} \qquad (a < 1).$$

Da es aber freisteht, δ unbegrenzt zu verkleinern, so folgt, dass auch in diesem Falle (d. h. für $a < 1$):

$$(37^2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leq a\gamma$$

sein muss. Beachtet man noch, dass die Beziehung (37^1), bezw. (37^2) für $a = 1$ mit der in § 1 unter (2^a) bemerkten zusammenfällt, so ergiebt sich schliesslich, wenn man noch in die $\left(\frac{1}{a}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhebt, in Uebereinstimmung mit der Behauptung (32^a):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leq (a\gamma)^{\frac{1}{a}} \qquad \text{für jedes } a > 0.$$

In ganz analoger Weise findet man aus der Voraussetzung (31^b), wenn man dieselbe durch Substitution von $r^{\frac{1}{a}}$ für r zunächst wiederum auf die Form bringt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^{\frac{\nu}{a}} = \sum_0^\infty{}^\nu (C_\nu^a \cdot r^\nu)^{\frac{1}{a}} \geq e^{\gamma r}$$

und sodann auf deren linke Seite die Ungleichungen (15^a), (16^b) anwendet, übereinstimmend mit (32^b):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot C_\nu} \geq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Mit Benützung der infinitären Beziehung (14) lassen sich dann diese Relationen wiederum auch durch die etwas einfacheren (33^a), (33^b) ersetzen.

---

§ 4.

Der soeben bewiesene Hauptsatz ist in der gegebenen Form nicht ohne weiteres umkehrbar. Dagegen lassen sich die Voraussetzungen des Satzes noch in der Weise erweitern, dass der folgende umkehrbare Satz resultirt:

Satz I. *Besteht für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ von den beiden Beziehungen:*

(38ᵃ) $$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma r^a}$$

(38ᵇ) $$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma r^a}$$

die erste für alle r, welche eine gewisse, im allgemeinen von ε abhängige positive Zahl R_ε übersteigen; die zweite für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man:

(39ᵃ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot c_\nu} \leq (a\gamma)^{\frac{1}{a}},$$

(39ᵇ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot C_\nu} \geq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}$$

oder auch:

(40ᵃ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} \leq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}},$$

(40ᵇ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{C_\nu} \geq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Umgekehrt folgen aus den Voraussetzungen (39) oder (40) auch allemal die Beziehungen (38) in dem angegebenen Umfange.[1])

---

[1]) Setzt man:
$$a\gamma e = \varkappa, \text{ also: } \gamma = \frac{\varkappa}{ae},$$
so nimmt die obige Umkehrung die folgende Form an:

Aus den Voraussetzungen
$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} \leq \varkappa^{\frac{1}{a}}, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{C_\nu} \geq \varkappa^{\frac{1}{a}}$$
folgt allemal:
$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu < e^{\frac{\varkappa(1+\varepsilon)}{ae}\cdot r^a}, \qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu > e^{\frac{\varkappa(1-\varepsilon)}{ae}\cdot r^a}$$
in dem oben näher bezeichneten Umfange.

Den ersten Theil dieses Satzes hat Herr Ernst Lindelöf (unter der etwas engeren Voraussetzung $\nu^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} < \varkappa^{\frac{1}{a}}$ für $\nu > n$) auf gänzlich anderem Wege abgeleitet: a. a. O. p. 39.

Beweis. Aus (38^a) würde auf Grund des vorigen Hauptsatzes (Formel (32^a), (33^a)) zunächst folgen, dass für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leqq ((1+\varepsilon) \cdot a \gamma)^{\frac{1}{a}}$$

oder auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq ((1+\varepsilon) \cdot a \gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Da aber ε unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schliesslich, dass geradezu:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leqq (a \gamma)^{\frac{1}{a}}$$

oder auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq (a \gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Das analoge gilt bezüglich der Herleitung von Ungl. (39^b), (40^b).

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate lässt sich dann in folgender Weise indirect beweisen. Angenommen es bestehe die Voraussetzung (39^a), und es sei nicht möglich, jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein R_ε so zuzuordnen, dass Ungl. (38^a) für $r > R_\varepsilon$ beständig erfüllt ist: alsdann müsste ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existiren, derart dass unter beliebig grossen r immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu \geqq e^{(1+\varepsilon') \cdot \gamma r^a}.$$

Daraus würde aber nach dem vorigen Hauptsatze (s. Ungl. (31^b), (32^b)) folgen, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} > ((1+\varepsilon') \cdot a \gamma)^{\frac{1}{a}},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Analog würde die Annahme, dass die Beziehung (38^b) nicht allemal aus der Voraussetzung (39^b) resultire, die Existenz einer Ungleichung von der Form:

$$\sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu \leq e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma r^\alpha} \qquad (r > R)$$

nach sich ziehen, und somit schliesslich im Widerspruche mit der Voraussetzung auf die Relation:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \leq ((1-\varepsilon')\cdot \alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

führen.

---

§ 5.

Ein weiterer ebenfalls umkehrbarer Satz ergiebt sich aus dem Hauptsatze des § 3, wenn die Voraussetzung (31^a) für jedes beliebig kleine, die Voraussetzung (31^b) für jedes beliebig grosse $\gamma > 0$ erfüllt ist, nämlich:

Satz II. *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$(41^a) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^\nu < e^{\varepsilon\cdot r^\alpha}$$

$$(41^b) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu > e^{\omega\cdot r^\alpha}$$

die erste für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle r, die eine gewisse positive Zahl R_ε übersteigen; die zweite für jedes beliebig grosse $\omega > 0$ und unendlich viele Werthe von r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen,[1] *so hat man:*

---

[1] Dieser Zusatz könnte hier wegbleiben, da bei hinlänglicher Vergrösserung von ω die Beziehung (41^b) überhaupt nur bei entsprechender Vergrösserung von r bestehen kann.

(42ª) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0$$

(42ᵇ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot C_\nu} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} = \infty.$$

Umgekehrt resultiren aus den Voraussetzungen (42) auch allemal die Beziehungen (41) in dem angegebenen Umfange.

Beweis. Aus den Voraussetzungen (41) würde auf Grund des Hauptsatzes § 3 zunächst folgen, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leq (a\,\varepsilon)^{\frac{1}{a}}, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot C_\nu} \geq (a\,\omega)^{\frac{1}{a}}.$$

Da es aber freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, ω unbegrenzt zu vergrössern, so ergeben sich hieraus in der That die Beziehungen (42).

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate erkennt man dann wiederum unmittelbar auf indirectem Wege, ganz analog, wie bei Satz I. —

Aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt sich schliesslich noch der folgende:

Satz III. *Besteht für jedes beliebig kleine* $\delta > 0$ *von den beiden Beziehungen*

(43ª) $$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, c_\nu r^\nu < e^{r^{a+\delta}}$$

(43ᵇ) $$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, C_\nu r^\nu > e^{r^{a-\delta}}$$

die erste für alle r, die eine gewisse positive Zahl R_δ *übersteigen; die zweite für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man für jedes beliebig kleine* $\delta > 0$:

(44ª) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a+\delta}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{a+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0$$

(44ᵇ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a-\delta}} \cdot C_\nu} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} = \infty.$$

Umgekehrt resultiren aus den Voraussetzungen (44) auch allemal die Beziehungen (43) in dem angegebenen Umfange.

Beweis. Denkt man sich δ beliebig klein fixirt, so besteht auf Grund der Voraussetzung (43^a) für hinlänglich grosse r (nämlich $r > R_{\frac{1}{2}\delta}$) die Beziehung:

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} c_\nu r^\nu < e^{r^{\alpha+\frac{\delta}{2}}} = e^{\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\delta}{2}} \cdot r^{\alpha+\delta}}.$$

Wie klein jetzt auch $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben wird, so kann man durch passende Vergrösserung von r stets erzielen, dass $\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$ wird. Dann ergiebt sich aber aus Satz II, dass für dieses und somit schliesslich für jedes $\delta > 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0.$$

Das analoge gilt dann bezüglich der Behauptung (44^b).

Auch hier ergiebt sich die Umkehrbarkeit der betreffenden Resultate mit Hülfe des in Satz I benützten indirecten Beweisverfahrens.

---

§ 6.

Es sei jetzt x eine complexe Veränderliche, $g(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} b_\nu x^\nu$, wo die b_ν ebenfalls beliebig complex zu denken sind, eine beständig convergirende Reihe. Angenommen nun, es genüge $|g(x)|$ bei hinlänglich grossen Werthen von $|x|$ einer der beiden Voraussetzungen, welche in dem Hauptsatze des § 3 für $\sum c_\nu r^\nu$ bezw. $\sum C_\nu r^\nu$ galten, also entweder:

(45^a) $$|g(x)| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für alle $|x| > R$; oder:

(45^b) $$|g(x)| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen. Es fragt sich nun: Bleibt auch unter diesen Voraussetzungen der betreffende Hauptsatz gültig, d. h. genügen auf Grund der Voraussetzungen (45ᵃ), (45ᵇ) die $|b_\nu|$ denselben infinitären Relationen, welche sich in § 3 für die c_ν, C_ν ergeben haben?

Man erkennt ohne weiteres, dass diese Frage in Bezug auf die Voraussetzung (45ᵇ) zu bejahen ist. Denn da:

$$(46) \qquad |g(x)| \leq \sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu|$$

so folgt aus (45ᵇ), dass auch:

$$(47) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu| \geq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^a}$$

(in dem angegebenen Umfange) und man findet somit, wenn man in § 3 $r = |x|$, $C_\nu = |b_\nu|$ setzt, nach Ungl. (39ᵇ), (40ᵇ), dass:

$$(48) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \geq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Um nun den entsprechenden Nachweis auch bezüglich der Voraussetzung (45ᵃ) zu führen, bemerke man zunächst, dass aus (45ᵃ), d. h. aus der Beziehung:

$$\left|\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^a} \qquad \text{für } |x| > R$$

nach dem Cauchy'schen Coefficienten-Satze sich ergiebt:

$$(49) \qquad |b_\nu x^\nu| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^a} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \ |x| > R).$$

Wird jetzt $\delta > 0$ beliebig angenommen, so hat man identisch:

$$|b_\nu x^\nu| = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu \cdot |b_\nu((1+\delta)x)^\nu|$$

und daher, wenn man auf den zweiten Factor der rechten Seite die Ungleichung (49) anwendet:

$$(50) \qquad |b_\nu x^\nu| \leq \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu \cdot A \cdot e^{\gamma(1+\delta)^a \cdot |x|^a},$$

gültig für $|x| > \frac{R}{1+\delta}$, also für alle möglichen $\delta > 0$ mit Sicherheit für $|x| > R$.

Substituirt man nun in (50) der Reihe nach $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf., so folgt durch Addition:

$$(51) \qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} |b_\nu x^\nu| \leqq \frac{1+\delta}{\delta} \cdot A \cdot e^{\gamma \cdot (1+\delta)^\alpha \cdot |x|^\alpha}$$

für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R$. Hieraus ergiebt sich aber nach dem Hauptsatze des § 3 (Ungl. (39ᵃ), (40ᵃ)) zunächst, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leqq (1+\delta) \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und, da es thatsächlich freisteht, δ unbegrenzt zu verkleinern, schliesslich:

$$(52) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

d. h. auch dieser Theil des Hauptsatzes von § 3 behält unter der jetzigen Voraussetzung seine Gültigkeit. Um das betreffende Resultat nochmals übersichtlich zu formuliren, kann man also den folgenden Satz aussprechen:

Es ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \textit{wenn:}\ |g(x)| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt.

Es ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} > (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \textit{wenn:}\ |g(x)| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen.

Gleichzeitig mit dem Hauptsatze des § 3 behalten aber auch die in §§ 4, 5 daraus abgeleiteten Folgesätze ihre Gültigkeit;

dieselben beruhten ja lediglich darauf, dass man die Constanten γ, a in passender Weise durch veränderliche Parameter ersetzte. Man gewinnt auf diese Weise, entsprechend den Sätzen I—III der beiden vorigen Paragraphen, noch die folgenden Sätze:

Satz I'. *Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R_ε übersteigt:*

$$(53^a) \qquad |g(x)| < e^{\gamma(1+\varepsilon)\cdot|x|^a},$$

so hat man:

$$(54^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:

$$(53^b) \qquad |g(x)| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^a},$$

so hat man:

$$(54^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \geq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Bestehen also die beiden Voraussetzungen (53^a), (53^b) *gleichzeitig, so wird geradezu:*

$$(54) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Umgekehrt resultirt aus der Voraussetzung (54^a) *allemal die Beziehung* (53^a), *ebenso aus* (54^b) *die Beziehung* (53^b), *während die Voraussetzung* (54) *die gleichzeitige Existenz von* (53^a) *und* (53^b) *nach sich zieht.*

Satz II'. *Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$, und alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R_ε übersteigt:*

$$(55^a) \qquad |g(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^a},$$

so hat man:

(56^a) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0.$$

Ist für jedes beliebig grosse $\omega > 0$ *und unendlich viele* x, *unter denen (dann eo ipso*[1]*) auch beliebig grosse vorkommen:*

(55^b) $$|g(x)| > e^{\omega \cdot |x|^\alpha},$$

so hat man:

(56^b) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \infty.$$

Umgekehrt resultirt allemal die Beziehung (55^a) *bezw.* (55^b) *aus der Voraussetzung* (56^a) *bezw.* (56^b).

Satz III'. *Ist für jedes beliebig kleine* $\delta > 0$ *und alle* x, *deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl* R_δ *übersteigt:*

(57^a) $$|g(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}},$$

so hat man für jedes $\delta > 0$:

(58^a) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0.$$

Ist für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ *und unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

(57^b) $$|g(x)| > e^{|x|^{\alpha-\delta}},$$

so hat man für jedes $\delta > 0$:

(58^b) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \infty.$$

Umgekehrt resultirt allemal die Beziehung (57^a) *bezw.* (57^b) *aus der Voraussetzung* (58^a) *bezw.* (58^b).

Anmerkung. Das zur Herleitung des eigentlichen Hauptsatzes angewendete Verfahren, um aus einer oberen Schranke

[1]) s. die Fussnote auf p. 183.

für $\left|\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu\right|$ eine solche für $\sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu|$ abzuleiten, lässt sich offenbar leicht verallgemeinern und dürfte sich auch für andere Untersuchungen als nützlich erweisen. Hier möchte ich nur noch die folgende Bemerkung daran knüpfen. Aus der Voraussetzung

$$\left|\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leq e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R, \tag{59}$$

folgt nach Ungl. (51), dass für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R$:

$$\sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu| \leq \frac{1+\delta}{\delta} \cdot e^{\gamma \cdot (1+\delta)^\alpha \, |x|^\alpha}.$$

Wird jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man zunächst δ so klein fixiren, dass:

$$(1+\delta)^\alpha < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

also:

$$\sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right) + \gamma\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot |x|^\alpha}.$$

Sodann aber kann man eine positive Zahl R_ε so gross annehmen, dass:

$$\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \gamma \cdot R_\varepsilon^\alpha \quad \left(\text{d. h. } R_\varepsilon \geq \left(\frac{2}{\varepsilon\gamma} \lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \gamma \cdot |x|^\alpha \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

Man findet also schliesslich:

$$\sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon)\cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon. \tag{60}$$

In Worten: *Genügt* $\left|\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x\right|$ *für alle hinlänglich grossen* x *der Beziehung* (59), *so genügt* $\sum_0^\infty {}^\nu |b_\nu x^\nu|$ *bei beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$ *für alle hinlänglich grossen* x *einer Beziehung von der Form* (60).

Ersetzt man die Voraussetzung (59) durch die folgende:

$$(61)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| < e^{\gamma\cdot(1+\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \text{ für jedes } \varepsilon' > 0 \text{ und } |x| > r_{\varepsilon'},$$

so folgt zunächst:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon')(1+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_{\varepsilon,\varepsilon'},$$

d. h. mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\varepsilon, \varepsilon'$, schliesslich:

$$(62)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_{\varepsilon'}.$$

Es genügt also in diesem Falle $\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$ *für hinlänglich grosse* x *stets einer Beziehung von genau derselben Form, wie* $\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right|$.

Ferner ergiebt sich aber auch folgendes: *Besteht für jedes* $\varepsilon > 0$ *und unendlich viele* $|x|$, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen, eine Beziehung von der Form:*

$$(63)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha},$$

so hat man gleichfalls für jedes $\varepsilon > 0$ *und für unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$(64)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha}.$$

Andernfalls müsste nämlich ein bestimmtes $\varepsilon_0 > 0$ existiren, derart dass:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leqq e^{\gamma(1-\varepsilon_0)\cdot|x|^\alpha}$$

für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R übersteigt. Dann hätte man aber auf Grund von Ungl. (59), (60), wenn man der in (60) auftretenden willkürlichen Zahl ε den Werth ε_0 beilegt:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} \, | \, b_\nu \, x^\nu \, | < e^{\gamma (1 - \varepsilon_0^2) \cdot |x|^a} \qquad \text{für } |x| > R_{\varepsilon_0},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Ein analoger Zusammenhang besteht offenbar auch zwischen Ungleichungen von der Form:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} \, | \, b_\nu \, x^\nu \, | < e^{\gamma \cdot |x|^{a+\delta}} \quad \text{und:} \quad \left| \sum_0^\infty {}^{\nu} \, b_\nu \, x^\nu \right| < e^{\gamma \cdot |x|^{a+\delta}}$$

$$\left| \sum_0^\infty {}^{\nu} \, b_\nu \, x^\nu \right| > e^{\gamma \cdot |x|^{a-\delta}} \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty {}^{\nu} \, | b_\nu \, x^\nu | > e^{\gamma \cdot |x|^{a-\delta}}.$$

Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz.

Von **A. Rothpletz.**

(Eingelaufen 18. Juni.)

Vor neun Jahren hat W. von Gümbel in diesen Sitzungsberichten eine Arbeit unter dem Titel „geologische Mittheilungen über die Mineralquellen von St. Moriz im Oberengadin und ihre Nachbarschaft“ veröffentlicht, in der zum ersten Mal die Frage nach dem Ursprung dieser so vielbesuchten und berühmten Heilquellen auf Grund eingehender geologischer Untersuchungen beantwortet worden ist. Die Aufgabe war keineswegs leicht, und wenn auch ihre Lösung einen grossen Fortschritt bedeutete, so blieb doch mehreres und insbesondere der grosse Gehalt der aus Granit entspringenden Quellen an Kalk- und Magnesium-Carbonaten im Unklaren. Eigne Arbeiten mit ganz anderen Zielen führten mich im vorigen Herbst in dieses Gebiet und machten mich mit einer bis dahin unbeachtet gebliebenen Thatsache bekannt, die auch auf die Entstehung dieser Quellen ein neues Licht warf und just jene im Unklaren gebliebenen Punkte erhellte. Ehe ich die dadurch gewonnene Auffassung mittheile, will ich jedoch kurz die hauptsächlichsten Ergebnisse hervorheben, zu denen Gümbel gekommen war.

Er hatte festgestellt, dass die fünf Mineralquellen, die bei St. Moriz bekannt sind, alle auf einer schwach gebogenen, von SW nach NO gerichteten Linie, also wohl auf einer Gebirgsspalte liegen. Diese Spalte liegt im Gebiet des Rosatsch-Granitstockes, der von Gneiss und anderen krystallinen Schiefern umgeben ist. Sie ist aber in ihrem Verlaufe nicht an die

Grenzen des Granites gegen den Schiefer gebunden, sondern durchschneidet den tieferen Untergrund ohne Rücksicht auf die Gesteinsarten.

Der Granitstock besteht vorwiegend aus Hornblendegranit und Diorit, welche stellenweise eckige Bruchstücke der sie umgebenden Gneisse, Glimmer-Hornblende und Quarzitschiefer einschliessen. Auch setzen pegmatitische Granitgänge in diesen Schiefern auf, deren höheres Alter gegenüber dem Granit somit erwiesen ist. Am Silvaplaner und Silser See gewinnen grüne chloritische Schiefer und Phyllite mit zahlreichen Einlagerungen von Serpentin und Marmor eine ausgedehnte Verbreitung. Diese Schiefer dienen in der weiteren Umgebung den Sedimenten der Trias- und Liasperiode als Unterlage.

Die Mineralquellen sind schwache Thermalquellen (5—7° C.), deren Temperatur die mittlere Jahrestemperatur dieses Platzes (1.1° C.) und die Temperatur der dortigen gewöhnlichen Trinkwasserquellen nur um einige Grade übertrifft.

Auf 1000 gr kommen an gelösten Bestandtheilen 1,2 bis 1,7 gr und zwar an

Sulphaten	0.3
Carbonaten	0.8 — 1.2
Kieselerde	0.04 — 0.06
Kochsalz	0 — 0.04.

Ausserdem sind geringe Mengen von Bor, Brom, Jod und Fluor nachgewiesen. Freie Kohlensäure ist reichlich vorhanden, daneben auch Eisencarbonat (0.025 — 0.037), weshalb die Quellen als „Eisensäuerlinge" bezeichnet werden, während die freie Kohlensäure (2.5 — 2.7 ‰) als der eigentliche „Brunnengeist" gilt. Auffällig ist der hohe Gehalt an Calciumcarbonat (0.7 — 0.9 ‰) und Magnesiumcarbonat, da die Quelle doch aus Granit bez. Diorit entspringt. Der Betrag ist ungefähr 10 mal so gross wie in dem gewöhnlichen St. Morizer Trinkwasser (0.073), von dem Gümbel eine Analyse mittheilt, leider ohne Angabe, wo die Quelle liegt. Voraussichtlich entspringt auch sie aus der Nähe, doch mag ihr an sich geringer

Mineralgehalt mit Bezug auf die Carbonate etwas von den kalkhaltigen Moränen beeinflusst sein. Von der Kohlensäure nimmt er an, dass sie auf jener Gebirgsspalte aus der grössten Tiefenregion der Erdrinde emporsteige, dabei von den im Gebirge circulirenden Gewässern aufgenommen werde und mit diesen in den Nebengesteinen Zersetzungen bewirke, denen die Quellen ihren Mineralgehalt verdanken. Letzterer kann aber nach seiner chemischen Zusammensetzung nicht direct aus dem Granit oder Gneiss herrühren. Ebensowenig will Gümbel ihn mit dem Auftreten der benachbarten mesolithischen Kalkschichten in Zusammenhang gebracht wissen, weil diese Gebilde zu entfernt von der Quellenspalte liegen, und nicht anzunehmen sei, dass eine Scholle derselben in der Tiefe eingekeilt zwischen den krystallinen Gesteinen sich vorfinde. Unter diesen „mesolithischen Gebilden" sind die nach meiner Bestimmung als permisch anzusehenden Dolomite von Plaun da Statz und der Alp Laret, sowie die gleichen Dolomite, Gypse, Rauhwacken und die kössener und liasischen Kalksteine des Piz Padella und von Samaden gemeint. Der Ursprung der mineralischen Bestandtheile der Quellen wird hingegen als „sehr wahrscheinlich" auf das Vorkommen von Eisen-, Mangan- und Magnesiumhaltigen Kalksteineinlagerungen und von Schwefelkies in den chloritisch-phyllitischen Schiefern zurückgeführt, von denen man „nach den beobachteten geologischen Lagerungsverhältnissen mit Grund annehmen" könne, dass eine Scholle derselben längs der Quellenspalte von Surlej her in den Granit eingeklemmt vorhanden sei. Diese Scholle würde also an die durchziehenden kohlensäurehaltigen Wasser die Mineralbestandtheile und insbesondere den am reichlichsten vorhandenen Kalk abgeben. Dass die so aus der Tiefe aufsteigenden Wasser gleichwohl eine verhältnissmässig niedrige Temperatur besitzen und dass sie im Winter sogar nicht oder doch nur in sehr geringen Mengen bis zu Tage aufsteigen, wird vermuthungsweise so gedeutet, dass das Schmelzwasser des Sommers sich mit dem in der Tiefe circulirenden und ununterbrochen fortarbeitenden Zersetzungswasser nur in höheren

Theilen der Quellenspalte vermischt, diesem die grössere Wassermenge liefert, damit aber auch die niedrige Temperatur gibt und zugleich die Quelle durch den Druck einer höheren Wassersäule zum Ausfliessen bringt.

Dies sind in kurzer Zusammenfassung die Ergebnisse der Gümbel'schen Untersuchung, die sehr viel zur Klärung unserer Anschauungen über den Ursprung der St. Morizer Quellen beigetragen hat. Einige wichtige Punkte sind allerdings kaum berührt worden, wie z. B. die Herkunft der Chloride, des Broms, Jods und Bors und die grosse Menge von Natrium, und bei Erklärung des hohen Gehaltes an Kalk- und Magnesiumcarbonaten vermisst wohl jeder Leser eine Begründung jener Gebirgsscholle, welche auf der Quellenspalte zwischen dem Granit eingeklemmt liegen soll. Die „beobachteten geologischen Lagerungsverhältnisse", welche Gümbel zur Annahme jener Scholle geführt haben, sind leider mit keinem weiteren Worte erwähnt. Und doch ist das eigentlich die Hauptsache und der Kernpunkt der Gümbel'schen Auffassung. Nachdem er zwei andere Annahmen für die Herkunft der Mineralbestandtheile — nemlich aus dem Granitstock selbst oder aus dem allzu entfernt gelegenen jüngeren Kalkgebirge — als unmöglich abgelehnt hat, und da wir die Richtigkeit seiner Beweisführung voll anerkennen müssen, könnte es allerdings so scheinen, als ob nur die Annahme jener eingeklemmten kalkreichen Gebirgsscholle übrig bliebe. Deshalb werden wir uns zunächst der Untersuchung nicht entziehen dürfen, ob zwingende Gründe für diese Annahme vorliegen, ehe wir uns einem anderen Erklärungsversuche zuwenden.

Obwohl die Wahrscheinlichkeit zugegeben werden muss, dass die St. Morizer Mineralquellen, weil sie in einer bestimmten linearen Anordnung zu Tage treten, auf ein und derselben Gebirgsspalte aufsteigen, so darf man doch nicht vergessen, dass diese Spalte selbst noch nicht beobachtet worden ist. Ausser jener linearen Quellenanordnung sind keine weiteren directen oder indirecten Beweise für ihre Existenz bisher bekannt geworden. Wir können also auch nicht wissen,

ob dieser vermutheten Spalte der Charakter einer nur einfachen Kluft oder der einer Verwerfungsspalte zugeschrieben werden darf. Was die von Gümbel gemachten geologischen Beobachtungen betrifft, die ihm eine Einkeilung von grünen Schiefern und Phylliten wahrscheinlich erscheinen liessen, so sind uns dieselben zwar leider unbekannt geblieben, ich vermuthe aber, dass für ihn der winkelige Verlauf der Grenze zwischen Granit und jenem Schiefer bei Surlej Ausschlag gebend war. Nordöstlich der Ortschaft Surlej bilden diese Schiefer einen bewaldeten Hügelvorsprung, hinter dem sich die Granitwände von 1900 bez. 1950 m Meereshöhe an bis zur Kammhöhe des Rosatschstockes erheben. Die Grenze gegen den Schiefer ist scharf und deutlich, sie verläuft in nordwestlicher Richtung gegen die Plaun della Turba. Dort aber biegt sie um, wird in südwestlicher Richtung rückläufig und erreicht so mit dem Südende des Crestaltahügels die Ufer des Sees von Campfèr. Die Granitgrenze hat somit einen winkeligen Verlauf und in den nach Süden geöffneten Winkel dringt wenigstens auf der Ostseite eine Partie jenes Schiefers ein. Ob dies auch auf der Westseite der Fall ist, wissen wir nicht, da hier alles durch Moränen und Seealluvionen verhüllt ist.

Denkbar ist es unter diesen Umständen ganz wohl, dass jener nach Norden vorspringende Schieferkeil sich unterirdisch noch weiter fortsetze, und wenn überhaupt jene Quellenspalte als Verwerfungsspalte existirt, dass diese Fortsetzung als eingeklemmte Scholle in nordöstlicher Richtung sich verlängere und so der aufsteigenden Kohlensäure den Kalk- und Magnesiagehalt liefere. Dieser sehr vagen Vermuthung liesse sich jedoch eine andere entgegensetzen, die Gümbel gar nicht in Erwägung gezogen hat, dass nemlich die Granitmassen bei ihrem Emporsteigen durch das schon gefaltete Schiefergebirge einzelne Theile jener grünen Schiefer und kalkführenden Phyllite eingeschlossen und umhüllt hätten, dass solche grössere Einschlüsse gerade unter St. Moriz verborgen lägen und dem Quellwasser den Mineralgehalt verliehen.

Wir können mithin gar nicht in Verlegenheit kommen,

den seltsamen Mineralgehalt dieser dem Granit entspringenden Quellen zu erklären, so lange wir in Annahmen Befriedigung finden, deren theoretische Möglichkeit nicht bestritten, deren Realität aber eben so wenig bewiesen werden kann.

Um uns jedoch in derartigen unfruchtbaren Speculationen nicht zu verlieren, wollen wir diejenigen thatsächlichen Verhältnisse in Erörterung ziehen, welche geeignet sind, uns über den Ursprung der St. Morizer Quellen aufzuklären.

1. Das Alter des Granites.

Wir fassen hier unter dem Namen Granit alle die verschiedenen granitischen Varietäten, Diorite und Syenite zusammen, welche das Rosatsch-Massiv aufbauen, sich über das Bernina-Massiv weiter ausdehnen und auf der anderen Seite des Innthales Gebirgsketten zusammensetzen, die im Piz Ott, Piz Julier und Piz d'Err allbekannte Bergspitzen besitzen. Nach Art ihrer petrographischen Ausbildung und ihres Vorkommens erweisen sie sich alle als Theile einer einheitlichen und gleichzeitigen Intrusion.

Gümbel hat sich darauf beschränkt festzustellen, dass dieser Granit jünger ist als die ihn umgebenden krystallinen Schiefer und Gneisse, und da er diese als Glieder der archaeischen Formation ansah, so ergibt sich daraus nur, dass der Granit jedenfalls nicht viel älter als palaeozoisch sein kann.

Theobald (Beiträge zur geol. Karte der Schweiz, Lief. 3, S. 228, 1866) hingegen hat sich dahin ausgesprochen, dass diese Granite jünger als die Liasformation seien, weil der Lias das jüngste Sedimentgestein sei, das durch die granitisch-syenitische Erhebung gehoben und verbogen wurde. Besonders in der Nähe von St. Moriz bei Gravasalvas sah er den Granit in mächtigen Massen über den Schichtköpfen der gefalteten Bündner- und Liasschiefer ausgebreitet und obwohl er darüber schreibt (S. 123): „Entweder müssen wir eine Ueberschiebung der granitischen Gesteine über diese Schiefer annehmen, oder voraussetzen, dass erstere als ein feurig-flüssiger

Teig sich über letztere ausgebreitet haben", so scheint ihm doch nur die letztere Annahme eingeleuchtet zu haben, und so wurde er um so mehr im Glauben an ein postliasisches Alter des Granites bestärkt. Ein drittes Argument erwähnt er S. 87: „Es ist merkwürdig, dass sich weder im Verrucano noch in dem liasischen Kalkconglomerat Trümmer von Juliergranit oder Serpentin finden, was darauf hinzudeuten scheint, dass diese Gesteine erst nach der Bildung dieser Conglomerate an ihre jetzige Stelle gekommen sind".

Für den Serpentin ist dies richtig. Er ist in diesem Theil der Alpen in Verbindung mit basaltartigen Eruptionen erst nach der ersten Alpenfaltung also zur Tertiärzeit emporgedrungen (siehe: Meine Geolog. Alpenforschungen I, 1900). Für den Engadiner Granit gilt das aber nicht, und es ist offenbar Theobald entgangen, dass das mächtig entwickelte liasische Conglomerat auf der Nordseite des Piz Julier am Suvretta Pass stellenweise erfüllt ist von zum Theil recht grossen Brocken von Porphyr, porphyrartigem Granit mit röthlichen Feldspathen und granitischen Gesteinen mit weisslichen und grünlichen Feldspathen. Ob letztere geradezu dem Juliergranit angehören, muss erst durch eine genaue petrographische Untersuchung festgestellt werden, aber jedenfalls beweisen sie, dass schon vor dem Lias in Graubünden mächtige Granitintrusionen erfolgt und auch in Folge von Dislocationen gehoben, entblösst und zu Uferfelsen des Liasmeeres geworden waren.

Die Hebungen und Verbiegungen der liasischen oder älteren Sedimente im Dache des Granites auf dessen Empordringen zurückzuführen, wie es Theobald gethan hat, geht so lange nicht an, als in diesen Schichten keinerlei Contactmetamorphosen oder granitische Apophysen und Gänge nachgewiesen werden können.

Was endlich die Lagerung grosser Granitmassen auf dem Lias am Lunghino- und Gavasalvas-Pass betrifft, so ist das keine ursprüngliche — denn auch hier fehlen alle Spuren von Contactmetamorphosen — sondern Folge einer grossartigen Ueberschiebung, von der nachher die Rede sein wird.

Wenn wir uns in der weiteren Umgebung von St. Moriz umsehen, so finden wir im Hintergrund des Julierthales auf dem Südgehänge des Piz Suvretta in den dort so mächtig entwickelten Sernifitschiefern hellfarbige Granitgänge, die von deutlichen Contacthöfen umgeben sind. In den auf dem Sernifit ruhenden Dolomiten, Rauhwacken und Gypslagern, ebenso in den höheren Liasschiefern und Flyschgesteinen sind hingegen bisher nirgends granitische Gänge oder Contactmetamorphosen aufgefunden worden. Theobald und Gümbel haben die Dolomite in die Trias, den Sernifit in den Buntsandstein gestellt, ich habe aber schon früher gezeigt, dass diese Gebilde im nördlichen Graubünden von der Trias einschliesslich des Buntsandsteines überlagert werden, also älter wie diese sind. Sie müssen als Vertreter der Permformation aufgefasst werden, und somit ergibt sich für diese Granitintrusionen als das wahrscheinlichste ein unterpermisches Alter, was allerdings nicht absolut für alle Granite dieser Gegend aber doch für einen Theil derselben ausgesprochen sein soll und auch für diese nur unter dem Vorbehalt, dass weitere Untersuchungen der in den Hochregionen der Gletscher und des ewigen Schnees gelegenen Ueberreste der jüngeren Sedimentdecke nicht doch noch Apophysen oder ähnliche Bildungen zur Kenntniss bringen.

Wir sind also dazu gekommen, in den grossen Granitmassen des Engadins Gesteine zu sehen, die sicher vorliasisch, wahrscheinlich jungpalaeozoisch, sind aber jedenfalls längst erstarrt waren, als zur Tertiärzeit die alpinen Hebungen und Faltungen begannen. Dabei wurde dieser Granit geradeso gehoben, geschoben und verworfen wie die Sedimentgesteine.

2. Der Gebirgsbau im Gebiet der Quellen.

An anderem Orte habe ich nachgewiesen, dass eine der grossen rhätischen Ueberschiebungen, durch welche fast die ganze Masse der Ostalpen viele Kilometer weit über diejenige der Westalpen in westlicher Richtung auf verhältnissmässig

sehr flach gelagerten Schubflächen hinwegbewegt worden ist, auch das Engadin quer durchschneidet. Die Schubfläche streicht am Lunghinopass aus, senkt sich auf dem westlichen Thalgehänge des Engadines langsam nach Osten herab bis zum Silvaplaner See und steigt am jenseitigen Gehänge gegen Süden wieder herauf bis zur Höhe des Capütschin, biegt dort nach Osten um und umzieht das Berninamassiv auf dessen Südseite. Das Gebirge unter dieser Schubfläche besteht aus Gneissen mit Granitinjectionen, jenen Marmor- und Dolomitlagern, Kalkglimmerschiefern und grünen Bündnerschiefern, die Gümbel als Phyllite bezeichnet hat, während ich darin Vertreter der älteren palaeozoischen Schichten mit eingelagerten Diabasen und Diabastuffen sehe. Sie werden discordant von permischen Sernifit und Röthidolomit überlagert, auf denen theilweise obertriasische Koessner Kalke, meist aber unmittelbar liasische Kalksteine und Schiefer, mancherorts auch noch Flysch ruhen. Alles dies ist stark gefaltet.

Ueber der Schubfläche treffen wir wiederum Granite und Gneiss, darüber Sernifit und Röthidolomit; ob stellenweise vielleicht auch noch Liasablagerungen darüber erhalten sind, muss erst festgestellt werden.

In Folge dieser Ueberschiebung ist der Granit der Schubmasse bei Gravasalvas auf die gefalteten Schichten des Lias, des Perms und der palaeozoischen Bündnerschiefer zu liegen gekommen, was Theobald bereits erkannt und in der schon erwähnten Weise sich zu erklären versucht hat. Ebenso liegt aber auch der Granit des Piz Surlej bei Surlej über den palaeozoischen Bündnerschiefern und man kann diese Ueberlagerungsfläche (siehe Fig. 1) am Gehänge herauf gegen den Crialetsch am Fusse des Piz Corvatsch leicht verfolgen. Die Schubfläche ist hier mit 10—12° gegen Norden geneigt, wird aber zwischen der Alp Surlej und Mortèls von einer Querverwerfung getroffen, jenseits welcher sie höher und fast horizontal liegt.

Bei Surlej senkt sich die Ueberschiebungsfläche unter den Thalboden. Wenn man annimmt, dass sie sich gegen Norden mit gleicher Neigung von 10° weiter senkt, so muss sie unter

Morizbad bereits etwa 300 Meter unter der Oberfläche liegen. Aber selbst, wenn hierbei ihre Neigung stärker oder schwächer wäre, immer müsste man annehmen, dass der Granit dort auf dem überschobenen Faltengebirge liegt, dass er also nicht in die „unendliche Teufe" herabgeht. Die Wurzel dieses Granitstockes ist weiter im Osten zu suchen, hier haben wir nur einen oberen Theil gewissermassen den Kopf desselben.

Durch den sicheren Nachweis dieser Ueberschiebung ist zugleich das Quellenräthsel gelöst. Die Quellwasser und Gase, die aus dem Granit zu Tage treten, kommen aus grösserer Tiefe und damit aus einer Gebirgsmasse, die von Granit nur oberflächlich bedeckt wird, selbst aber aus verschiedenartigen Meeresablagerungen besteht, welche die Mineralbestandtheile enthalten können, welche die Morizer Thermalquellen auszeichnen.

Wie steht es nun aber mit der Quellenspalte, auf welche Gümbel aufmerksam gemacht hat? Auf Fig. 2 habe ich sie eingezeichnet, wenn schon ein sicherer Beweis für sie, wie schon erwähnt, noch nicht zu erbringen war. Wenn man jedoch annimmt, dass die westliche Gebirgsmasse auf dieser Spalte eine Senkung

NO. Piz Surlej Fuorcla Surlej Piz Corvatsch SW.

St. Moriz Curhaus Silvaplana Sils Maria

Fig. 1 zeigt die Ueberschiebungsfläche, auf der am rechten Thalgehänge des Engadins die krystallinischen Schiefer (g) und der Granit (gr) über die palaeozoischen Marmore und Dolomite (p^1), die grünen Schiefer (p^2) und die Serniftschiefer (s) geschoben worden sind. δ Lager von Diabas. r Röthidolomit. 1 : 75000.

erfahren habe, dann erklärt es sich, was sonst kaum verständlich wäre, warum der Granit, der östlich von Surlej bei 1950 m Meereshöhe über dem palaeozoischen Bündnerschiefer liegt, 1 km weiter im Westen, wo er eigentlich in ebenso hoher Lage erwartet werden sollte, bereits über 150 m tiefer herabreicht, so dass der unterliegende Schiefer am Ufer des Sees vom Campfèr gar nicht mehr sichtbar ist. Besser unterrichtet sind wir von einer zweiten Verwerfung, welche mit dieser ungefähr parallel verläuft und durch das ganze obere Engadin auf der westlichen Thalseite hinläuft. Auf ihr haben grosse Verschiebungen nachweislich stattgefunden und es zustande gebracht, dass nirgends eine vollkommne Uebereinstimmung im geologischen Bau der beiden Thalseiten besteht. (Näheres darüber werde ich in

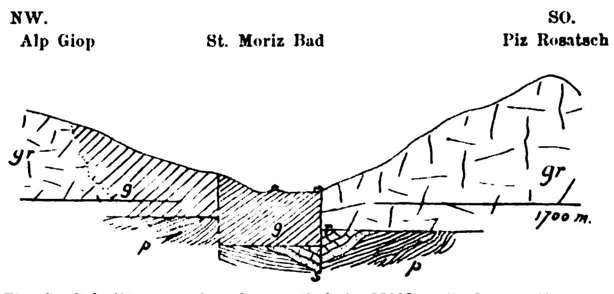


Fig. 2. Schnitt quer über das Innthal (1 : 75000) mit den muthmasslichen tektonischen Verhältnissen unterhalb des 1700 Meter-Niveaus.

Alpenforschungen II später mittheilen.) So mag es denn gestattet sein, die Quellenspalte als eine Begleiterscheinung jener Verwerfungsspalte aufzufassen, und es ergibt dies dann für die nähere Umgebung von St. Moriz das Bild eines Grabenbruches, wie ihn Fig. 2 zur Darstellung bringt.

Was früher als etwas Seltsames und schwer zu Erklärendes erschien, nemlich der Mineralgehalt der Morizer Thermen, das ist für die nun gewonnene tektonische Auffassung etwas ganz selbstverständliches, ja geradezu nothwendiges geworden. Die Quellen müssen aus Kalkgebirg aufsteigen, weil sie Thermen sind, also aus grösseren Tiefen kommen.

3. Woher stammt die viele freie Kohlensäure?

Diese Erscheinung ist nicht auf St. Moriz beschränkt, sondern recht eigentlich eine besondere Eigenthümlichkeit Graubündens, wodurch sich dasselbe vor den meisten anderen Theilen der Alpen auszeichnet. Ebenso eigenthümlich ist aber dieser Gegend das Vorhandensein zahlreicher tertiärer Basalt- und Serpentingänge. Die Basalte sind allerdings in der Literatur hinter den Namen Melaphyr, Spilit, Diabas und Diorit ziemlich gut versteckt, aber es sind jedenfalls basaltartige Eruptionen, die abwechselnd alle alpinen Sedimentgesteine durchsetzten und zwar zu einer Zeit, als die alpine Faltung hier schon vollendet war, also etwa in der mittleren Oligocänzeit oder später. Das Gleiche gilt für die Serpentine, die in wild verbogenen Schichten aufsetzen und trotzdem oft kilometerlange, ganz geradlinige Gänge darin bilden. Freilich hat man vielfach versucht, diese Serpentine in einen genetischen Zusammenhang mit den sog. grünen Bündnerschiefern zu bringen, welche nach meiner Auffassung palaeozoische Diabase und Diabastuffe sind, und es ist ja auch die Möglichkeit keineswegs von der Hand zu weisen, dass in den Alpen auch Serpentinmassen vorkommen, die älter als tertiär sind. Dies ändert aber nichts an der Thatsache, dass Graubünden zur Tertiärzeit der Schauplatz stärkerer vulkanischer Thätigkeit war, die jetzt allerdings ganz erloschen zu sein scheint, aber in den starken Kohlensäure-Exhalationen noch wenn auch schwache Nachwirkungen verräth. Als solche steigen also auch die Gase unter St. Moriz aus grösseren Tiefen und mit hohen Temperaturen auf. Sie werden von den kühleren unterirdischen Gewässern aufgenommen und abgekühlt, erwärmen aber ihrerseits jene Gewässer, die mit dieser Unterstützung lebhafter mineralische Stoffe in Lösung nehmen und mit ihnen in die Höhe steigen.

4. Woher stammen die mineralischen Bestandtheile?

Das Vorhandensein des basalen Kalkgebirges erklärt uns zu Genüge den Gehalt an Kalk-, Magnesium-, Eisen- und Mangancarbonaten sowie an Kieselerde und Thonerde. Anders liegt es mit den Sulphaten, Chloriden, dem Bor, Brom und Jod. Das sind Stoffe, die das Meereswasser in Lösung enthält und unter günstigen Verhältnissen auch in seinen Sedimenten ausscheidet. Aber wo wir ältere Meeresablagerungen zu Tage gehen sehen, sind diese Bestandtheile gewöhnlich nicht, oder doch nur theilweise und in verschwindenden Massen vorhanden, so dass wir uns gewöhnt haben, sie nicht zu den gewöhnlichen Absatzproducten zu zählen. Gleichwohl dürften sie viel häufiger zu Ablagerung gekommen sein, als sich beobachten lässt. Da aber, wo sie nicht in grösseren Mengen in Form von Steinsalz- oder Sollagern auftreten, sondern nur verhältnissmässig spärlich den Kalk-, Mergel- oder Thonschichten beigemengt waren, sind sie im Ausgehenden dieser Gesteine längst durch die circulirenden Tageswässer ausgelaugt, und nur in grösseren Tiefen kann dieser Salzgehalt noch erhalten geblieben sein, wo eben noch keine so kräftige Durchwässerung eingetreten ist. Wir können also erwarten, dass alle marinen Sedimente, die hier unter dem Schutze der darübergeschobenen Granitdecke liegen, noch jene leicht löslichen Salze, soweit sie darin abgesetzt worden waren, aufgespeichert enthalten und nun an die aufsteigenden kohlensäurereichen Thermalwasser abgeben. Besonders jedoch steht zu erwarten, dass die permischen Dolomite, die von Rauhwacken und Gypslagern begleitet sind, reich an solchen Salzen gewesen sind und in ihnen dürfen wir deshalb die Hauptlieferanten sehen.

Wir wissen aber, dass die palaeozoischen Bündner Schiefer von Permablagerungen discordant überlagert werden, und es hätte somit gar nichts auffallendes, wenn unter dem Boden von St. Moriz und seiner Granitdecke solche permische Ablagerungen in grösserer Mächtigkeit vorhanden wären, wie dies in Fig. 1 und 2 dargestellt ist.

Für die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme lässt sich anführen, dass thatsächlich oberhalb Surlej zwischen dem Granit bezw. Gneiss und den liegenden Bündner Schiefern die permischen Sernifitschiefer ausstreichen, und wenn die Dolomite darüber fehlen, so erklärt sich dies durch die Richtung der Ueberschiebung, durch welche sie hier weggeschoben worden sind, während sie auf der anderen Thalseite oberhalb Gravasalvas noch thatsächlich erhalten geblieben sind aus dem Grunde, weil sie da tiefer in die Bündner Schiefer eingefaltet waren. Aehnlich können aber auch die Verhältnisse unter St. Moriz liegen.

5. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Ein grosser Granitstock, der in Gneiss, krystallinen Schiefern und palaeozoischen Sedimenten aufsitzt und wahrscheinlich gegen Ende der palaeozoischen Zeit eingedrungen war, ist mit diesen Schiefern und den später über und neben ihm abgelagerten jüngeren Meeressedimenten in der Oligocänperiode von der ersten alpinen Faltung ergriffen und dislocirt worden. Darauf wurde er von der rhätischen Ueberschiebungsspalte, welche in dem Alpenkörper entstand und denselben von Nord nach Süd quer durchschnitt, in zwei übereinander liegende Theile zerlegt, von denen der obere durch jene Ueberschiebung nach Westen fortgeschoben, von seinem Sockel entfernt und auf bereits gefaltete palaeozoische und mesozoische Meeresablagerungen heraufgeschoben wurde. Der Piz Rosatsch, sowie die ganze Bernina-Granitmasse, der Julier- und Albula-Granit gehörten zu diesem jetzt wurzellosen nach Westen verschobenen Granitstock, der nachträglich nochmals von Gebirgsspalten in verschiedenen Richtungen durchschnitten und in mehrere Schollen zerlegt wurde, die ebenfalls durch vertikale und horizontale Bewegungen gegeneinander verschoben worden sind, so dass deren ursprünglicher Zusammenhang auch in dieser oberen Hälfte des Granitstockes gründlich verloren ging.

Vielleicht gleichzeitig damit, jedenfalls aber zeitlich nicht

weit davon entfernt, fanden im Gebiet dieser Ueberschiebung Durchbrüche von Basalt- und Serpentinmassen statt, die gangförmig aus der Tiefe emporstiegen. Obschon diese vulkanische Thätigkeit längst erloschen ist, so erkennen wir ihre Nachwirkungen doch noch an den starken Gasausströmungen, welche sich an vielen Orten und so auch bei St. Moriz in Form von kohlensäurereichen Thermalquellen äussern.

Die in die Erde eindringenden Wasser der atmosphärischen Niederschläge absorbiren in der Tiefe diese Gase und erhalten dadurch einen Auftrieb, der sie auf vorhandenen Gebirgsspalten aufsteigen macht. Sie steigen um so höher, je grösser der hydrostatische Druck ist, d. h. je höher die Niveaufläche des Untergrundwasserstandes liegt. Da diese im Engadin im Winter ihren tiefsten, im Sommer aber in Folge der Schneeschmelze einen bedeutend höheren Stand hat, so begreift es sich leicht, warum die im Sommer stark fliessenden St. Morizer Thermalquellen im Winter sehr schwach sind oder auch ganz ausbleiben.

Der hohe Mineralgehalt dieser verhältnissmässig kalten Quellen ist demnach dadurch bedingt, dass die Auflösung von Salzen in grösseren Tiefen begünstigt durch die freie Kohlensäure und hohe Temperatur vor sich geht und dass das aufsteigende Wasser erst in höheren Regionen durch das kältere niedersinkende Tageswasser abgekühlt wird.

Der für die St. Morizer Quellen charakteristische Mineralgehalt besteht hauptsächlich aus Bestandtheilen, die im Meereswasser gelöst vorkommen, mithin auch in Meeresablagerungen zum Absatz kommen können und wahrscheinlich von dem palaeozoischen Meere in seinen Sedimenten einstmals aufgespeichert worden sind, aus denen sie jetzt die kohlensäurehaltigen St. Morizer Quellen beziehen und wieder an die Erdoberfläche bringen.

Sitzung vom 5. Juli 1902.

1. Herr C. Göbel hält einen Vortrag: „Ueber Regeneration bei Pflanzen". Derselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Seb. Finsterwalder überreicht, auf Ersuchen des Herrn Herm. Ebert, zu der in der Maisitzung vorgelegten und in den Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlung der Herren Karl Fischer und Heinrich Alt über Dampfspannung des reinen Stickstoffes einen Nachtrag: „Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffes".

Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffs.

Von K. T. Fischer und H. Alt.

(Eingelaufen 5. Juli.)

1. In unserer Arbeit über die Dampfspannung des reinen Stickstoffs[1]) waren wir auf Grund der Clapeyron'schen Gleichung zum Schluss gekommen, dass die Verdampfungswärme des Stickstoffs mit abnehmender Temperatur erst steigt, um dann in der Nähe des Erstarrungspunktes wieder abzunehmen, wenn man die spezifischen Volumina des Stickstoffdampfes aus dem von Dewar ermittelten Wert 256.83 ccm/gr bei 760 mm Druck und 90.5° absoluter Temperatur nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz extrapolieren darf (l. c. S. 147). Die direkten Bestimmungen der Verdampfungswärme, welche Herr Alt inzwischen ausgeführt hat, haben diesen Schluss nicht bestätigt, sondern eine stetige, wenn auch geringe Zunahme der Verdampfungswärme des Stickstoffs bei abnehmender Temperatur ergeben. Von 700 mm bis herab zu 120 mm Druck stimmen die von uns berechneten Werte der Verdampfungswärme mit den beobachteten so genau als zu erwarten war, überein, von da ab jedoch ergeben sich grosse Differenzen. Sucht man den Grund für diese Abweichungen in den Beobachtungen der Dampfspannung, aus welchen wir ja die Aenderung der Dampfspannung mit der Temperatur berechnen mussten, so wäre ein Fehler noch am ehesten in der Druckbestimmung zu vermuten, da wir für den Erstarrungsdruck des Stickstoffs stark von einander abweichende Werte

[1]) Sitzungsber. der bayer. Akad. d. Wissensch. S. 113—151, 1902.

erhalten haben (l. c. S. 135); würde man aus den direkt ermittelten Werten der Verdampfungswärmen auf den Erstarrungsdruck extrapolieren, so würde sich, wenn die Temperatur als richtig angenommen ist, ein Erstarrungsdruck von 78 mm ergeben. Da wir in der That einige Male so niedrige Werte beobachtet hatten, so nahmen wir neuerdings eine eigene Untersuchung über den Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffs vor.

2. Da wir früher zur Vermeidung von Siedeverzügen Wasserstoff in den Stickstoff eingeleitet hatten, und in diesem Falle den Druck sogar eher höher als niedriger wie 86 mm anzunehmen uns veranlasst sahen, so glaubten wir, es könnte, trotzdem wenig Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden war, die Zufuhr von Wasserstoff eine wesentliche Fehlerquelle gebildet haben und vermieden bei den neuen Versuchen dieses Hilfsmittel vollständig. Da die Untersuchungen des Herrn Alt zeigten, dass bei der Verdampfung des Stickstoffs durch elektrische Heizung Siedestösse nicht auftraten, so führten wir in die l. c. S. 125 abgebildete Anordnung statt der Kapillaren *K*, welche früher Wasserstoff zuleitete, eine Platinheizspirale ein, welche aus einem 2 m langen, 0,11 mm dicken Drahte hergestellt war und mit 0,3—0,5 Amper Strom beschickt werden konnte, wenn Siedeverzüge zu befürchten waren. Um auch jedes andere Fremdgas so viel wie möglich vom Stickstoff fern zu halten, schlossen wir den Recipienten, unter dem sich der verdampfende Stickstoff befand, an 2 grosse eiserne Vacuumkessel von zusammen 700 Liter Inhalt an, welche bis auf 40—50 mm Druck durch die schon früher benützte Bianchi'sche Pumpe leer gepumpt werden konnten, und in welchen sich also während der Versuche eine ziemlich reine Stickstoffatmosphäre ansammeln musste. Da der Druck durch die elektrische Heizung und durch Feinverstellung eines zwischen Recipienten und Vacuumkessel angebrachten Hahnes geregelt und konstant gehalten werden konnte, so konnte auch der Seitenhahn fortgelassen werden, durch welchen wir früher zeitweise Luft in die Pumpenleitung hatten eintreten lassen

(l. c. S. 129). Die im Recipienten befindliche Luft wurde wohl bald ziemlich vollständig ausgetrieben, da das Stickstoffgefäss sofort nach der Füllung mit in Luft filtriertem Stickstoff unter den Recipienten gesetzt wurde und zunächst der Stickstoff noch äusserst lebhaft verdampfte, bis das Dewargefäss genügend abgekühlt war.

3. Wir führten im Ganzen 10 Versuchsreihen durch und zwar benützten wir für den ersten Versuch ein kugeliges, durchsichtiges Dewarfläschchen von 153 ccm Inhalt und für die folgenden ein kleineres, cylindrisches, durchsichtiges Dewarfläschchen von 50 ccm Inhalt. Der eine von uns beobachtete das Barometer, welches dasselbe war wie früher und regelte den Druck, der andere beobachtete gleichzeitig mittelst Kompensationsmethode die elektromotorische Kraft des Kupfer-Konstantanelementes, welches wir auch schon früher benutzt hatten. Es lieferte dieses Thermoelement dieselben elektromotorischen Kräfte für den Siedepunkt und Gefrierpunkt, die wir schon früher erhalten hatten, sodass wir für diese dieselben Temperaturen annehmen konnten, den Siedepunkt natürlich mit Rücksicht auf die Aenderung des Barometerstandes entsprechend korrigiert. Um festzustellen, inwieweit der Sauerstoffgehalt den Gefrierdruck erniedrige, nahmen wir eine bestimmte Menge flüssigen Stickstoff und brachten sie wiederholt zum Erstarren und Schmelzen, indem wir gegen geringen Druck verdampfen liessen; da nach den Untersuchungen Baly's[1]) aus einem sauerstoffarmen Gemisch von Stickstoff-Sauerstoff hauptsächlich Stickstoff verdampft, während der Sauerstoff der Hauptsache nach in der Flüssigkeit zurückbleibt, so musste schliesslich ein relativ sauerstoffreicher Flüssigkeitsrest übrig bleiben und sich zeigen, ob in der That, wie wir schon früher vermutet, der Erstarrungsdruck hauptsächlich durch Sauerstoffverunreinigung erniedrigt wird (l. c. S. 132). Wenn der zur Verflüssigung gebrachte Stickstoff auch nur 0,02 % Sauerstoff enthielt, so konnte, wenn schliesslich ein Quantum

[1]) E. C. C. Baly, Phil. Mag. 49. S. 521, 1900.

von 50 ccm auf 1 ccm eingedampft war, dieser Rest ca. 1% Sauerstoff enthalten. Um über diese im schliesslichen Stickstoffrest verbleibende Sauerstoffmenge einen Anhaltspunkt zu gewinnen, analysirten wir am Schluss einiger Versuche die letzten im Dewargefäss verbleibenden Rückstände, indem wir das Dewarfläschchen rasch aus dem Recipienten herausnahmen, mit einem Gummistopfen und Gummischlauch verschlossen, erst noch durch Schütteln kräftige Verdampfung stattfinden liessen und dann den Gummischlauch an die Hempel'sche Bürette ansetzten, um die Sauerstoffanalyse mit Kupfer in ammoniakalischer Lösung vorzunehmen; auch während des Füllens der Bürette, die 53,4 ccm hielt, wurde das Dewarfläschchen geschüttelt, damit energische Verdampfung erfolgte. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, wie viel von der Flüssigkeit verdampft war, wenn dieselbe zum zweiten oder dritten Male zum Erstarren gebracht wurde, hatten wir neben das cylindrische Dewarfläschchen einen Millimetermassstab gestellt, um aus der Höhe der Flüssigkeit auf das noch vorhandene Volumen schliessen zu können. In der folgenden Tabelle S. 214 u. 215 sind die Versuchsresultate zusammengestellt. Die Horizontalreihen enthalten die bei wiederholtem Erstarren und Schmelzen und dabei stattfindender Abnahme der Flüssigkeitsmengen beobachteten Erstarrungs- und Schmelzdrucke mit Angabe des Verhältnisses des ursprünglichen Volumens zu dem jeweils noch vorhandenen Volumen Flüssigkeit, und zwar sind die Versuche so geordnet, dass die reinsten Proben in der ersten Reihe stehen. Der Erstarrungs- und Schmelzdruck ist ausserordentlich konstant und sicher zu beobachten; auch wenn man die Verdampfung rasch erfolgen lässt, stellt sich von dem Momente an, wo das Schmelzen oder Erstarren beginnt, ein konstanter Druck ein, der bei einem genügend guten Barometer auf einige zehntel Millimeter genau zu beobachten ist. In unserem Falle gestattete das — selbsthergestellte — Barometer mit verschiebbarer Skala nicht mehr als 2 zehntel Millimeter Ablesegenauigkeit. Bei dem ersten Versuch, in dem das Volumen über 90 ccm betrug, blieb der Erstarrungs-

druck 10 Minuten hindurch konstant, in den anderen Versuchen je nach der vorhandenen Menge Flüssigkeit eine halbe bis mehrere Minuten, und ebenso der Schmelzdruck. Nachdem die ganze Masse erstarrt war, wurde noch weiter bis auf ca. 20 mm unter den Erstarrungsdruck abgekühlt und ebenso liessen wir, nachdem die ganze Masse vollständig geschmolzen war, jeweils den Druck bei abgeschlossenem Recipienten auf ca. 150 mm ansteigen, ehe wir von neuem Erstarrung herbeiführten.

4. Die Tabelle lehrt, dass in der That der Erstarrungsdruck des Stickstoffs durch Sauerstoffbeimengung erheblich erniedrigt wird, und zwar würde aus den Zahlen schätzungsweise folgen, dass 1 Gewichtsprozent Sauerstoff den Erstarrungsdruck des Stickstoffs um 8—10 mm erniedrigt. Ferner dass nach unserer Beobachtungsmethode der Erstarrungsdruck des reinen Stickstoffs um ca. 1.7 mm niedriger ist als der Schmelzdruck, und dass diese Differenz zunimmt, wenn die Sauerstoffverunreinigung zunimmt. Die angegebene Fehlergrenze $\pm$ 0,6 mm haben wir schätzungsweise eingesetzt; der hierbei sich ergebende Wert steht mit dem in unserer früheren Arbeit angegebenen Wert für den Erstarrungsdruck, nämlich 86 $\pm$ 4 mm, in Einklang. Dass flüssige Luft durch das von uns für Stickstoff angewandte Verfahren des Verdampfens festgemacht werden kann, ist unwahrscheinlich, da der Erstarrungsdruck mit dem Sauerstoffgehalt so stark abnimmt; dagegen dürfte Abkühlung mit einer kälteren Flüssigkeit (Sauerstoff oder am besten flüssigem Wasserstoff) diese Verfestigung leicht herbeiführen.

5. Da wir die Dampfspannungskurve durch den Punkt $p = 86$ mm, $T = -210{,}52^0$ Cels. gelegt haben, müssen die Werte für die Dampfspannung in der Nähe des Erstarrungspunktes etwas geändert werden. Gelegentlich der hier beschriebenen Versuche haben wir mit unserer neuen Anordnung einige Punkte zwischen 150 und 90 mm neu bestimmt und hiernach als Temperatur des gesättigten Stickstoffdampfes

Für 120 mm Druck -208.46^0 C. gegenüber früher -208.24^0 C.
„ 110 „ „ -209.15^0 „ „ „ -208.77^0 „
„ 105 „ „ -209.44^0 „ —
„ 100 „ „ -209.78^0 „ „ „ -209.35^0 „
„ 95 „ „ -210.12^0 „ „ „ -209.68^0 „
„ 89.2 „ „ -210.52^0 „ „ „ -210.1^0 „

gefunden, wobei wie früher als Temperaturskala die des Konstantvolum-Wasserstoffthermometers gewählt und für den Spannungskoeffizienten des Wasserstoffs der Chappuis'sche Wert $\alpha = 0.0036625$ angenommen ist.

Diese neuen Werthe ändern die Grösse $\frac{dp}{dT}$ gegenüber

Aenderung des Erstarrungs- und Schmelzdruckes des

v_0 = ursprüngliches Volumen. $k = \frac{\text{Restvolumen}}{v_0}$

Nr. des Versuchs	v_0 ccm	I p	I p'	I k	II p	II p'	II k	III p	III p'	III k	IV p	IV p'	IV k
1.	150	89.2	90.2	$\frac{1}{3}$		-			—			—	
9.	50	89.2	91.2	$\frac{1}{8}$	88.2	90.7	$\frac{1}{15}$		—		86.2	89.4	!
8.	50	89.2	91.2	$\frac{1}{8}$		—		87.2	90.7	$\frac{1}{8}$		—	
								87.2	90.2	$\frac{1}{4}$			
10.	50		—		88.5	90.2	$\frac{1}{8}$	87.2	89.2	$\frac{1}{6}$		—	
4.	50		—			—		87.2	90.2	$\frac{1}{8}$	86.2	88.2	!
6.	50		—			-			—			—	
7.	50		—			—			—			—	
3.	50		—			—			—			—	
5.	50		—			·			—			—	
2.	50		—			—			—			—	
Mittel der Differenzen $p'-p$			1.7 mm			2.25 mm			2.9 mm			2.6 mm	

Mittel für den **Erstarrungsdruck des reinen Stickstoffs**
„ „ „ **Schmelzdruck „ „ „**

unseren früheren Zahlen nicht erheblich, und es kann daher die Folgerung eines Maximums der Verdampfungswärme des Stickstoffs, die wir aus der Clapeyron'schen Gleichung gezogen haben, nicht deswegen unzutreffend sein, weil die von uns früher angegebene Dampfspannungskurve in der Nähe des Erstarrungspunktes wegen der Unsicherheit der dort beobachteten Erstarrungsdrucke zu ungenau bestimmt war; was die Ursache der Abweichung ist, namentlich ob nicht die specifischen Volumina thatsächlich andere sind als die nach Dewar berechneten, kann nur durch eine weitere Untersuchung festgestellt werden.

Stickstoffs bei Verunreinigung durch Sauerstoff.

p = Erstarrungsdruck in mm Hg. p' = Schmelzdruck in mm Hg.

V			VI			VII			VIII			Analyse des letzten Flüssigkeitsrestes auf Sauerstoffgehalt	
p	p'	k	p	p'	k	p	p'	k	p	p'	k		
	—			—			—			—			—
	—			—			—			—		0.6—0.8 ccm	1.3 % Vol. O_2
	—			—			—			—		0.5 ccm	2.4 % Vol. O_2
85.2	88.2	$\frac{1}{5}$		—		82.7	86.7	$\frac{1}{15}$		—		0.1—0.2 ccm	2.5 % Vol. O_2
	—		84.2	88.7	$\frac{1}{5}$	82.2	86.7	$\frac{1}{5}$	80.2	87.7	$\frac{1}{15}$		—
85.2	87.7	$\frac{1}{5}$	83.7	86.2	$\frac{1}{5}$		—		81.2	84.2	$\frac{1}{10}$	0.8 ccm	4.3 % Vol. O_2
85.2	87.7	$\frac{1}{5}$		—		83.0	85.7	$\frac{1}{5}$	79.2	83.2	$\frac{1}{10}$	0.5 ccm	5.6 % Vol. O_2
85.0	88.1	$\frac{1}{5}$		—			—		77.8	?	$\frac{1}{15}$		—
	—		83.7	87	$\frac{1}{5}$	83.2	87.2	$\frac{1}{5}$	80.2	?	$\frac{1}{20}$	0.1—0.2 ccm	6—7 % Vol. O_2
	—			—			—		81.5	85.5	$\frac{1}{10}$		—
2.8 mm			3.4 mm			3.8 mm			4.6 mm				

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathbf{89.2 \pm 0.6}\ \text{mm} \\ p' &= \mathbf{90.9 \pm 0.6}\ \text{mm} \end{aligned}\right\} \text{Mittel: } \mathbf{90.0 \pm 0.3}\ \text{mm.}$$



Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 143. Stiftungstages

am 13. März 1902.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie, Geheimrath Dr. K. A. v. Zittel, mit folgender Ansprache:

Königliche Hoheiten!
Hochgeehrte Festversammlung!

Die festliche Sitzung der Königl. bayer. Akademie der Wissenschaften im Monat März ist der Erinnerung an ihre Gründung gewidmet. Fast einhundertzweiundvierzig Jahre sind verflossen, seit Churfürst Maximilian Joseph am 28. März den Stiftungsbrief unterzeichnete, durch welchen die churbayerische Akademie ins Leben trat. Ihre Aufgabe sollte sein, alle nützlichen Wissenschaften und freien Künste in Bayern zu verbreiten und insbesondere auch die philosophischen, mathematischen und geschichtlichen Wissenschaften zu pflegen.

Gegenwärtig sind ihre Ziele allerdings nicht mehr auf die Nützlichkeit und praktische Verwertung der Wissenschaften gerichtet — diese Aufgabe hat sie an andere Anstalten abgetreten; in ihr soll vielmehr die freie Forschung unbekümmert um alle Nebenzwecke gepflegt werden. Dankbar wird das bayerische Vaterland anerkennen, was unsere Vorgänger auf dem Boden der praktischen Verwertung der Wissenschaft und

des Schulwesens geleistet haben und wenn uns heute auch vielfach andere Ziele gesteckt sind, so hoffen wir beim Ausblick in die Zukunft, dass auch fernerhin ein guter Stern unseren Bestrebungen leuchtet und dass wir uns der Gunst und des Ansehens, deren wir uns erfreuen, würdig erweisen. Ist unsere Akademie auch in drei Klassen gegliedert, von denen jede ihre besonderen Aufgaben verfolgt und ihre eigenen Wege einschlägt, so will sie doch als Ganzes die Gesamtheit der reinen Wissenschaften darstellen und den inneren Zusammenhang derselben wahren.

Ihre Bestrebungen haben in den letzten Jahren mancherlei höchst erfreuliche Förderung auch von privater Seite erhalten, wie die Zographos-, Thereianos-, Bürger-, Cramer-Klett-, die Königs-Stiftung und verschiedene namhafte Geldunterstützungen für verschiedene wissenschaftliche Zwecke beweisen. Auch im vergangenen Jahre wurde uns eine Spende unseres hohen Protektors für archäologische Ausgrabungen auf der Insel Aegina zu teil und diese von unserem Mitglied Professor Furtwängler mit grossem Erfolg durchgeführten Forschungen können durch eine hochherzige Stiftung des Herrn Bassermann-Jordan, Weingutsbesitzer in Deidesheim, in grösserem Massstab fortgesetzt werden. Bayern kann stolz darauf sein, dass diese von unserem Königshaus eingeleitete Unternehmung durch die Opferwilligkeit eines seiner Bürger weiter geführt wird und damit die bayerische Akademie in Wettbewerb mit anderen Nationen tritt, welche sich die archäologische Erforschung Griechenlands seit langem als Aufgabe gestellt haben.

Zur Förderung von Untersuchungen, welche sich auf die Geschichte, Sprache und Literatur, die Kunst, das öffentliche und Privatleben der Griechen im Altertum und im Mittelalter bis zur Eroberung Konstantinopels durch die Türken beziehen, besitzt unsere Akademie die Stiftung des Griechen Thereianos.

Aus ihren Renten wurden drei einfache Preise zu je 800 M. verliehen:

1. an den Generalephor der Altertümer in Athen Kabbadias für sein im Jahre 1900 erschienenes Werk über das Heiligtum des Asklepios in Epidaurus,

2. an Robert Pöhlmann, Professor für alte Geschichte an der Universität München, für die Geschichte des Kommunismus und Sozialismus, von welcher der erste Band 1893, der zweite 1901 erschienen ist, wobei ausdrücklich betont wird, dass ein einfacher Preis für dieses Werk nur deshalb beschlossen wurde, weil für einen Doppelpreis bei den sonstigen Anforderungen die Mittel gefehlt haben,

3. an den Professor an der Universität Athen Politis für das grosse Unternehmen einer Sammlung griechischer Sprichwörter, von welcher 1899 und 1900 drei Bände erschienen sind.

Für wissenschaftliche Unternehmungen wurden bewilligt:

1500 M. für die Fortsetzung der Byzantinischen Zeitschrift,

1000 M. für die Abfassung eines die ersten 12 Bände der Byzantinischen Zeitschrift umfassenden wissenschaftlichen Index, womit der Lehramtskandidat P. Marc betraut worden ist,

2000 M. für die Fortsetzung des von Professor Furtwängler und Reichold herausgegebenen Werkes über griechische Vasenmalerei.

Aus den Zinsen der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung konnten mehrere wissenschaftliche Unternehmungen unterstützt werden, von denen einige allgemeines Interesse erwecken dürften. So wurde mit 3000 M. aus der Bürgerstiftung eine Expedition nach der libyschen Wüste zum Zweck geologischer und paläontologischer Forschungen ausgerüstet und von den Herren Dr. M. Blanckenhorn, Privatdozent in Erlangen und Dr. Stromer v. Reichenbach, Privatdozent in München mit erheblichem wissenschaftlichem Erfolge durchgeführt.

Professor Dr. Hofer gelang es, den Erreger der Krebspest zu ermitteln; er wird nun seine Untersuchungen mit einer Unterstützung von 500 M. aus der Cramer-Klett-Stiftung in Russland, wo gegenwärtig die Krebspest herrscht, fortsetzen. Die Ergebnisse dürften bei der bevorstehenden Wiederbesetzung

unserer Flüsse mit Krebsen von Wichtigkeit werden. Mit einer kleineren Summe (119 M. 76 Pf.) sollen die bereits am Starnbergersee ausgeführten Untersuchungen über die periodischen Schwankungen des Seespiegels nunmehr in diesem Sommer auch am Chiemsee fortgesetzt werden.

Professor v. Groth erhielt für einen Hilfsarbeiter bei seinen krystallographisch-chemischen Untersuchungen über die Beziehungen zwischen der Krystallform und der chemischen Konstitution der unorganischen und organischen Körper aus der Cramer-Klett-Stiftung 1200 Mark.

Aus der Stiftung für chemische Forschungen wurden Herrn Professor Hofmann 800 M. für Untersuchungen an seltenen Mineralien bewilligt, Herr Professor Lindemann erhielt 200 M. für Berechnungen von Spectrallinien.

In der letzten Festsetzung habe ich versucht, ein Bild von der wissenschaftlichen Thätigkeit unserer Akademie zu geben, heute möge es mir gestattet sein, einige Mitteilungen aus den Jahresberichten der Konservatoren über wichtigere Erwerbungen und Vorgänge in den unter dem General-Konservatorium vereinigten wissenschaftlichen Sammlungen und Anstalten des Staates während der Jahre 1900 und 1901 zu machen.*)

Für das **Antiquarium** wurden durch den in die antiken Ausgrabungsgebiete beurlaubten Assistenten Dr. Hermann Thiersch u. a. griechische Marmorköpfe, Terrakotten, Bronzen und ein ägyptisches Gewandstück erworben.

Aus dem Kunsthandel 10 neue Terrakotten, 5 Bronzen, ein griechischer Spiegel, eine Thonlampe mit dem Töpfernamen Philomusos und syrische Glasgefässe.

An Geschenken erhielt es: 1. vom Berliner Museum 12 Thongefässe aus Kahun (Ende der 12. Dynastie), 2. von einem ungenannten Geber die vollständige Sammlung der Geislinger galvanoplastischen Nachbildungen mykenischer Alter-

*) Aus diesem Bericht wurden nur einige der wichtigsten Erwerbungen in der Festsitzung erwähnt.

tümer, 3. von Herrn Bassermann-Jordan in Deidesheim Bronzespiegel mit Reliefzeichnungen, und eine Sammlung antiker Messinstrumente u. a., 4. von Seton-Karr in London eine Kollektion prähistorischer Steinwerkzeuge aus der östlich von Aegypten gelegenen Wüste, 5. von Kunstmaler E. Platz eine hölzerne Osirisstatue.

Unter Beihilfe von Hermann Thiersch, Karl Dyroff und Ludwig Curtius gab der Konservator v. Christ einen neuen Führer heraus, der den früheren um das Doppelte übertrifft und die wissenschaftliche Benützung ermöglicht.

Münzkabinet: Aus den antiken Erwerbungen des Jahres 1900 sei hervorgehoben ein herrlicher Goldstater von Lampsakus von wunderbarer Erhaltung und ein Tetradrachmon von Metapont mit dem Kopf des Heros Leukippos, beide aus dem 4. Jahrhundert. Die deutschen Kaisermünzen wurden bereichert durch Ankäufe aus dem Nachlass des Majors Schleiss, die Abteilung der Wittelsbacher Medaillen, welche im Kabinet einen hervorragenden Platz einnimmt, durch zwei Porträtstücke (Anna Maria Franziska von Lauenburg, in erster Ehe vermählt mit Philipp Wilhelm von der Pfalz, und Anna Maria Louise von Medicis, Gemahlin des Johann Wilhelm von der Pfalz).

Von Geschenken seien erwähnt jene des Königlich siamesischen Hofarchitekten Sandrezky, des englischen Schriftstellers Sidney-Whitman, der Herren Willmersdörffer (Vater und Sohn) in München und des Kgl. Hauptmünzamtes. Ferner vermachte Herr von Pettenkofer die ihm von gelehrten Gesellschaften, Münchener Bürgern u. a. gestifteten fünf goldenen Ehrenmedaillen.

Das Kabinet wird nach Lage der Sache von Sammlern, Privaten und Händlern stark in Anspruch genommen; daraus ergeben sich ähnliche Vorteile wie beim Gipsmuseum.

Im Jahre 1901 waren es hauptsächlich eine Reihe mittelalterlicher Münzfunde, welche dem Kabinet zur wissenschaftlichen Aufnahme und teilweisen Erwerbung zugingen (darunter die wichtigsten von Wiedermünchsdorf bei Vilshofen,

Seiboldsdorf bei Vilsbiburg aus dem 13. Jahrhundert, von Dökingen bei Gunzenhausen; unter den 2000 Schwarzpfennigen des letzteren fand sich eine bisher unbekannte Münze des Grafen Heinrich V. von Görz).

Bestimmung und Einordnung der bereits erwähnten und einiger neuerer Funde, sowie die Arbeiten für die Fertigstellung des II. Bandes der Wittelsbacher Münzen und Medaillen nahmen den grössten Teil des Jahres 1901 in Anspruch.

Dem Münzkabinet angegliedert ist das Gemmenkabinet. Seit dem epochemachenden Werke Professor Furtwänglers steigt das Interesse für diese reizenden kleinen antiken Kunstwerke von Jahr zu Jahr. Das Münzkabinet war ausserdem in der Lage, einige erlesene Stücke griechischen, ägyptischen und orientalischen Ursprungs (besonders merkwürdige babylonische Thonzylinder) zu erwerben.

Das **Museum für Abgüsse klassischer Bildwerke**, dessen lokale Vereinigung mit dem archäologischen Seminar sich immer vorteilhafter erweist und dessen Besuch (im Jahre 1898 bereits 3500 Personen, Künstler und Gelehrte ungerechnet) von Jahr zu Jahr zunimmt, widmet sich mit besonderem Eifer und Erfolg der modernsten Aufgabe der Gipsmuseen, der Rekonstruktion fragmentierter, antiker Statuen.

Im Jahre 1900 wurde die knidische Aphrodite des Praxiteles in ihrer ursprünglichen Gestalt wieder hergestellt, ebenso die Amazone des Phidias, im Jahre 1901 die Restitution des Diskuswerfers von Myron vollendet. Es wurde nämlich der Abguss des kopflosen Torso im Vatikan mit dem von Professor Furtwängler im Louvre entdeckten, dort nicht erkannten Abguss des Kopfes des Diskobols vereinigt, dessen Original sich im Palazzo Lancelotti befindet, aber seit 30 Jahren absolut unzugänglich ist. Zum erstenmal kann nun das berühmteste Werk des Myron im vollkommenen Abguss studiert werden.

Diese Rekonstruktion fand solchen Beifall, dass sie bereits von 9 auswärtigen Sammlungen erworben wurde.

Die Negativ-Schwefelabdrücke von geschnittenen Steinen wurden um 90 Stück vermehrt und durch eine Bewilligung aus dem Mannheimer Fond 1948 Glaspasten nach antiken Gemmen erworben.

Auf spezielle Veranlassung des Konservators wurden in auswärtigen Sammlungen (Hannover, Kopenhagen, Rom, Florenz, Alexandrien) 17 Stücke neugeformt, darunter ein Portrait Alexanders des Grossen; durch Kauf und Geschenke wurden 73 grosse Abgüsse, 11 Guss- und 203 Gemmenformen erworben.

Da das Abgussmuseum in München mehr und mehr zu einer Zentrale für alle die Antike betreffenden Angelegenheiten wird, so gelangen fortwährend aus Kunsthandel und Privatbesitz antike Gegenstände zur Ansicht und Begutachtung und unter ihnen somit manches wertvolle Stück in Marmor, Bronze, Terrakotta und Gold zur wissenschaftlichen Kenntnis und Verwertung, das sonst im Privatbesitz verschwände. Diesem Vorteil verdankt das Museum einen Zuwachs von 78 wertvollen Plattennegativen.

Die Photographiensammlung hat sich im Jahre 1900 um 533 Stück, im Jahre 1901 um 407 Stück vermehrt, die ganze Sammlung beträgt nunmehr 10000 Stück und wurde durch sorgfältige Ordnung im Jahre 1901 der allgemeinen Benützung zugänglich gemacht.

Ethnographisches Museum: Die Mehrung des ethnographischen Museums betrug im Jahre 1900 175 Nummern, im Jahre 1901 136 Nummern, wobei die Zuwendung chinesischer Waffen von seite Seiner Kgl. Hoheit des Prinzregenten zu erwähnen ist. Die wichtigste Arbeit des Jahres 1901 bestand in der Durcharbeitung der umfangreichen, zum Teil sehr kostbaren japanischen Sammlung und der Anfertigung eines Zettelkataloges für dieselbe durch den japanischen Gelehrten Shinkiki Hara, wodurch für eine grosse Reihe unverständlicher oder (von europäischen Verhältnissen aus) falsch gedeuteter Darstellungen die richtigen Erklärungen ermöglicht wurden.

Die meisten Darstellungen auf den vielbewunderten kunstgewerblichen Gegenständen sind keine willkürlichen, phantastischen, sondern grösstenteils der Mythologie, der Sage, Geschichte u. s. w., oder auch moralischen Beispielen entnommen.

Der **anthropologisch-prähistorischen Sammlung** gelang es nach vielerlei Mühen mit Unterstützung des Mannheimer Fonds die grossartige, steinzeitliche Sammlung des Bauers Lichtenecker vom Auhügel bei Hammerau (B.-A. Laufen) anzukaufen. Neben dieser Erwerbung verdient der vom Museum selbst unternommene Abbau von 150 Reihengräbern in Inzing bei Hartkirchen (B.-A. Griesbach) hervorgehoben zu werden. Aus den mit Zuschüssen des Etats für Erforschung der Urgeschichte erfolgten Ausgrabungen flossen der Sammlung eine nicht unerhebliche Menge werthvoller Gegenstände zu: wichtige steinzeitliche Gefässscherben und Knochen aus den Trichtergruben bei Wenigumstadt durch Hauptmann a. D. von Haxthausen, Gegenstände aus der La Tène-Periode, welche durch Herrn Oberamtsrichter Weber bei Lenting (B.-A. Ingolstadt) gefunden wurden, endlich als das wertvollste etwa 100 Gefässe der Hallstattzeit, welche Herr Bezirksarzt Dr. Thenn aus den Urnenfeldern bei Beilngries erhob und so vorzüglich bearbeitete und ergänzte, dass diese bedeutende Sammlung ohne weiteres der Schausammlung einverleibt werden kann. An den zahlreichen Geschenken an dieses Museum hat sich Dr. Haberer in hervorragender Weise beteiligt; er widmete der Sammlung u. a. 80 japanische Affenschädel (Innus speciosus), 45 Chinesenschädel, ein vollständiges Chinesenskelett und einen künstlich deformierten Chinesenfuss.

Aus München erhielt die Sammlung von Ingenieur Brug ein Kupfergussstück, das dadurch merkwürdig ist, dass es im alluvialen Kiesgerölle in der Pilgersheimerstrasse zwischen Eisenbahnbrücke und Marianum gefunden wurde, von Rechnungsrat Uebelacker Knochen von Hirsch, Ziege u. s. w., welche 4 m tief am Karlsthor gefunden wurden, sowie einen bronzezeit-

lichen Depotfund, welcher in der Widenmayerstrasse auf dem Löss entdeckt wurde.

Botanischer Garten: Die im Jahre 1900 begonnene Reorganisation des botanischen Gartens wurde im Jahre 1901 durch Vergrösserung der Alpenpflanzenanlage, Einrichtung eines besonderen Kulturhauses für Hymenophylleen und eines Farnenhauses weiter fortgeführt.

Das im letzteren untergebrachte Vegetationsbild ist durch die von Konservator Göbel aus Neuseeland und Australien mitgebrachten, sowie durch die im Jahre 1901 aus Neu-Südwales, Neuseeland und Nordamerika bezogene Farne eine Sehenswürdigkeit Münchens geworden. Einige der hier vertretenen Typen befinden sich überhaupt nirgends in Kultur. Eine Ausstellung der Kalthauspflanzen im Sommer, sowie eine Neuanlage für Freiland am Glaspalast macht den botanischen Garten für die Besucher lehrreicher und anregender. Der Thätigkeit des Konservators gelang es, mehrere Vereine und Private zu Beiträgen zu veranlassen, aus denen unter einem Zuschuss der Akademie von 1000 M. die Errichtung des Alpengartens auf dem Schachen für wissenschaftliche und praktische Zwecke im Jahre 1900 in Angriff genommen und im Jahre 1901 vollendet werden konnte. Keinem anderen botanischen Garten Deutschlands steht nunmehr ein solches Hilfsmittel zur Verfügung.

Pflanzenphysiologisches Institut: Den Hauptzuwachs erhielten die Bestände durch die Sammlungen des Konservators in Australien und Ceylon, ferner durch die von Kustos Professor Giesenhagen im malaiischen Archipel gesammelten Materialien. Beide Vermehrungen wurden zur Ausführung einer Reihe wissenschaftlicher Untersuchungen benutzt.

In seinem Berichte über die wissenschaftliche Thätigkeit des Instituts, welche ihren gewohnten Gang nahm, hebt der Konservator die geringe Beteiligung bayerischer Studierender hervor, da die Prüfungsordnung die Lehramtskandidaten zwingt, sich fast ausschliesslich der Chemie zu widmen. Die

Folge ist, dass es schwierig ist, aus dem Kreise bayerischer Studenten Institutsassistenten zu gewinnen, dann aber, dass die Zahl der Lehrer an den Mittelschulen, welche sich an der Erforschung der Pflanzenwelt Bayerns in ihrem Berufe beteiligen, zum Nachteil der naturwissenschaftlichen Erkenntnis Bayerns im Vergleich zu der Teilnahme dieser Stände in anderen deutschen Staaten verhältnismässig eine allzu geringe ist.

Die Kryptogamensammlung, ohnehin eine der wertvollsten der Welt, hat die auf 10000 M. geschätzte Sammlung des Oberlandesgerichtsrates Arnold zum Geschenk erhalten, und ebenso für das Herbarium boicum 800 Exemplare von Moosen von dem Medizinalrate Dr. Holler in Memmingen.

Botanisches Museum: Im Jahre 1900 erwarb das botanische Museum durch Kauf 1282, im Jahre 1901 1584 Arten, darunter 133 aus Kamerun mit 55 Holzproben, durch Tausch im Jahre 1900 250, im Jahre 1901 36 Arten, als Geschenk im Jahre 1900 1518, und im Jahre 1901 2452. Behufs Verwertung für die Wissenschaft wurden Materialien an verschiedene Autoren in Deutschland, Dänemark, Schweiz, Belgien und Russland leihweise abgegeben. Eingesendetes Material aus Indien, Nordamerika, Costarica, Schweiz und Berlin wurde bearbeitet.

Konservator Radlkofer bearbeitete selbst die brasilianischen Sapindaceen, von denen das Schlussheft (im Ganzen 55 Bogen mit 66 Tafeln) erschien, und veranlasste vier Arbeiten anatomisch-systematischer Richtung auf Grund des Museumsmateriales. Die Bibliothek konnte durch besondere Bewilligung des Landtages schwer empfundene Lücken ausfüllen.

Mineralogische Sammlung: Die verfügbaren Mittel wurden im Jahre 1900 auf Anschaffung einer Reihe von Schränken verwendet, um die immer mehr anwachsenden Gesteinssammlungen, hauptsächlich die Aufsammlungen von Dr. Weber im Monzonigebiete (Fassathal) und des Reallehrers Düll im Fichtelgebirge unterzubringen. Im Jahre 1901 wurden die Krystalle

neu aufgestellt und die Meteoritensammlung vermehrt. Von Geschenken sind zu erwähnen: 1. von der Tamnau-Stiftung in Berlin ein Teil der von Dr. Grünling in Ceylon zusammengebrachten Sammlung, 2. von Felix Zeiska in Kissingen Mineralien aus den norddeutschen Salzlagerstätten.

Geologische Sammlung: In den Jahren 1900 und 1901 fanden Aufsammlungen statt in den Bayerischen und Salzburger Alpen, besonders am Fusse der Zugspitze, sodann im Gebiet des Schlern und der Seiser Alp. Aus dem fränkischen Jura wurden Versteinerungen, ferner eine Sammlung von Bernsteininsekten, sowie eine geologisch kolorierte Reliefkarte des Karwendel erworben. Frau Dr. Gordon-Ogilvie schenkte ihre Ausbeute aus den tiefsten Triasschichten bei Campitello im Fassathal.

Paläontologisches Museum: Aus den Erwerbungen der paläontologischen Sammlung sind hervorzuheben: 1. Versteinerungen aus Trias, Kreide und Tertiär Nordwestdeutschlands von Dr. Behrendsen in Göttingen, 2. einige Prachtstücke aus den Solenhofer Schiefern (u. a. Fuss eines sehr grossen Pterodactylus, Homoeosaurus), 3. wertvolle Reste von Rhinoceros aus der altberühmten Fundstätte bei Georgensgmünd in Mittelfranken, 4. eine sehr vollständige Sammlung Versteinerungen aus der weissen Kreide Rügens.

Von Geschenken sind zu erwähnen: 1. ein schön erhaltener Schädel von Aceratherium tetradactylum, gefunden bei Schönau (Niederbayern) von Expositus Paintner, 2. eine von Dr. Haberer noch vor Ausbruch des chinesischen Krieges in China zusammengebrachte, höchst wertvolle Sammlung fossiler Säugetierreste, die zahlreiche, bis jetzt unbekannte Formen enthält, ferner devonische Brachiopoden und jungtertiäre Brachyuren, 3. Säugetierrreste aus der Pampasformation in Uruguay, worunter ein fast vollständiger Panzer des Riesengürteltieres von Dr. Otto Günther in Fray Bentos, 4. Herr Albert Hentschel schenkte die Ergebnisse seiner dreimonatlichen Forschungen auf der Insel Samos dem Museum, worin

sie eine höchst wertvolle Erweiterung der Stützel'schen Aufsammlungen bilden.

Der paläontologischen Sammlung steht ein Fond zur Verfügung, den Herr Kommerzienrat Anton Sedlmayr von Münchener Bürgern zusammengebracht hat. Aus ihm konnten 4 Expeditionen bestritten werden, welche alle von glänzendem Erfolg begleitet waren: 1. Zwei Expeditionen nach Südpatagonien, die gemeinsam mit Professor Florentino Ameghino ausgeführt wurden; durch diese erhielt unser Museum einmal die merkwürdige Fauna der Santa Cruz-Schichten fast in gleicher Vollständigkeit wie in den Museen von La Plata und Buenos Aires, sodann eine hochinteressante Sammlung der von Carlos Ameghino entdeckten und von Florentino Ameghino beschriebenen ältesten Säugetierreste aus angeblich obercretacischen Ablagerungen. Von diesen merkwürdigen, zum Teil primitiven, zum Teil aber auch schon ziemlich hoch differenzierten Formen, unter denen sich auch die grosse Gattung Pyrrhotherium befindet, deren systematische Stellung noch nicht mit Sicherheit ermittelt werden konnte, ist bis jetzt noch kein Stück in ein anderes ausseramerikanisches Museum gelangt. 2. Eine Expedition unter Leitung des Professors John Merriam, eines früheren Schülers unserer Universität, in Oregon, wodurch unsere Sammlung alle wichtigeren Säugetierreste des John Day-Horizontes und zwar in mehr oder minder vollständigen Schädeln und Skeletteilen erhielt; 3. eine Expedition des Sammlers Charles Sternberg im Sommer 1901 nach den permischen Ablagerungen im nördlichen Texas. Die Akademie entsandte zur Teilnahme, Kontrolle und geologischen Untersuchung Herrn Dr. Broili, Assistent am paläontolog. Museum. Schon jetzt zeigt sich, dass die in Texas erworbene Sammlung der besten ihrer Art, welche sich im American Museum in New York befindet, nahezu gleichkommt, ja sie in mancher Hinsicht sogar übertrifft. Vollständig auspräpariert wird sie eine Zierde des Museums bilden.

Zoologische Sammlung: Bei der zoologischen Sammlung zeichnen sich die Jahre 1900 und 1901 vor allem dadurch aus, dass sie Geschenke in einem zuvor nicht erhörten Maasse empfing. Im Jahre 1900 repräsentieren dieselben allein einen Geldwert von 30—40000 Mark. So sandte Dr. Haberer 18 grosse Kisten, welche u. a. 1300 Vogelbälge, Skelette, vor allem aber Fische, Krustaceen und Brachiopoden in grosser Anzahl aus China, Japan und den faunistisch noch sehr wenig untersuchten Kurilen enthalten. Der Afrikajäger Carl Schillings schenkte ausgezeichnet conservierte Bälge und Schädel der grossen im Innern Afrikas lebenden Tiere, welche in absehbarer Zeit vom Menschen vernichtet sein werden, darunter einige von Schillings entdeckte neue Arten (Hyaena und Giraffa Schillingsi). Hofrat Hagen in Frankfurt schenkte eine auf den Südsee-Inseln, Neuguinea und den malaiischen Inseln zusammengebrachte entomologische Sammlung in tadellosem Zustand; mit ihr noch eine Reihe der wertvollen Paradiesvögel, wobei Männchen im Jugendgefieder und Weibchen vertreten waren.

Von den Geschenken des Jahres 1901 seien erwähnt: europäische Carabiden in unübertroffener Vollständigkeit von dem verstorbenen Rentier Felix Strasser, dann die neuerlichen Sendungen Dr. Haberers, welche die grösste Bereicherung darstellen, die die Sammlung jemals durch einen einzigen Forscher erhalten hat; ferner die aus dem Nachlass des zu Swakopmund verstorbenen Militärarztes Dr. Bürkel geschenkten Reptilien und Spinnen aus der dortigen, sehr wenig erforschten Gegend und endlich die Konchyliensammlung des Grafen Otting. Diese kostbare Sammlung, deren Anschaffungswert weit über 10000 M. beträgt, ist eine der hervorragendsten Privatsammlungen Deutschlands; sie besteht nur aus auserlesenen, schönen Stücken, so dass sie ohne weiteres als Schausammlung verwendet werden kann und eine Sehenswürdigkeit unseres Museums bilden wird.

Von den Erwerbungen verdienen hervorgehoben zu werden: australische Konchylien, Objekte aus den deutschen

Schutzgebieten, ein Wisent-Skelett und ein schön ausgestopfter Transvaallöwe.

Anatomie: Die Sammlung der anatomischen Anstalt für deskriptive und topographische Anatomie ist durch 9 Präparate im Jahre 1900 und durch 11 Präparate im Jahre 1901 bereichert worden, worunter sich eine Serie von Modellen über die Gehirnentwicklung nach His befindet; die Abteilung für Histiologie und Embryologie wurde durch eine grosse Zahl von Schnittserien zur vergleichenden Entwicklung der Wirbeltiere vervollständigt.

Die übrigen, dem Generalkonservatorium unterstellten Institute, das **physiologische Institut, die Sternwarte,** das **chemische Laboratorium** und das **physikalisch-metronomische Institut,** sind keine eigentlichen Sammlungen, oder es sind ihnen nur kleinere Sammlungen, wie dem chemischen Laboratorium, beigegeben. Sie dienen vorwiegend dem Unterricht oder wissenschaftlichen Untersuchungen und die hiefür gebrauchten Apparate bilden den Bestand dieser Konservatorien. Aus dem chemischen Laboratorium gingen im Jahre 1900 67 Arbeiten, aus dem physiologischen Institut im Jahre 1900 8, im Jahre 1901 10 grössere Abhandlungen hervor. Die Sternwarte setzte ihre mit dem Meridiankreis seit Jahren angestellten Beobachtungen weiter fort, ebenso die photographischen Daueraufnahmen zur Untersuchung des Fixsternhimmels mit dem aus Mitteln der Akademie angeschafften Doppelfernrohr, ferner die meteorologischen und erdmagnetischen Beobachtungen, wobei freilich bei letzteren infolge der Einwirkung des elektrischen Trambahnbetriebes, welcher die magnetischen Kurven aufs empfindlichste stört, die Lloyd'sche Wage ausser Betrieb gesetzt werden musste.

Wie aus den angeführten Mitteilungen hervorgeht, haben die im Generalkonservatorium vereinigten wissenschaftlichen Sammlungen und Attribute auch in den zwei vergangenen Jahren recht ansehnliche Fortschritte gemacht. Ebenso herrschte

in den damit verbundenen Lehr-Instituten ein reges, wissenschaftliches Leben. Der Besuch unserer Museen steigt von Jahr zu Jahr, obwohl sie gerade in den für das Publikum und für die heranwachsende Jugend günstigsten Winter-Monaten geschlossen bleiben müssen. Freilich werden die seit einer langen Reihe von Jahren erhobenen Klagen über Mangel an Raum immer lauter und das Verlangen nach einer Reform unseres Museumswesens immer lebhafter und ungeduldiger. Dankbar müssen wir es daher anerkennen, dass Seine Excellenz der Herr Kultusminister von Landmann in wohlwollendster Weise unsere Bestrebungen nach Besserung der Verhältnisse unterstützt. Es sind im Budget der 26. Finanzperiode verschiedene, nicht unbedeutende Postulate eingestellt, wodurch das Münzkabinet im neuen Nationalmuseum eine geeignetere Heimstätte und das ethnographische Museum eine beträchtliche Raumvergrösserung erhalten sollen.

Für das Gipsmuseum antiker Bildwerke ist auf dem Areal des alten Nationalmuseums ein selbständiger Neubau vorgeschlagen. Im Wilhelminum soll durch Einrichtung einer Zentralheizung die Benützung und Zugänglichmachung der naturhistorischen Museen im Winter ermöglicht und überdies die allmähliche Entfernung aller fremden jetzt darin untergebrachten Behörden angestrebt werden, so dass der ganze Komplex in den ausschliesslichen Besitz der Akademie und des Generalkonservatoriums gelangt. Da die Aussicht auf einen anderen geeigneten und günstig gelegenen Platz zur Errichtung eines Monumentalbaues für die naturhistorischen Museen mehr und mehr schwindet, so werden wir uns mit dem Gedanken befreunden müssen, durch teilweisen Umbau des Wilhelminischen Gebäudes ein, wenn auch nicht allen ästhetischen Anforderungen entsprechendes, so doch zweckmässiges und den jetzigen und künftigen Bedürfnissen genügendes Museumsgebäude zu erhalten, an welches sich die Akademie und die wissenschaftlichen Lehrinstitute angliedern liessen. Zur Ausführung dieses Planes bedürfen wir freilich der Unterstützung der uns vorgesetzten Kgl. Staatsregierung, sowie des Wohlwollens der beiden Kam-

mern des Landtags. Mit dem schon oft von dieser Stelle wiederholten Wunsch nach einer baldigen Verbesserung unserer jetzigen, wenig erfreulichen Verhältnisse und in der zuversichtlichen Erwartung, dass unsere Wünsche in absehbarer Zeit in Erfüllung gehen mögen, schliesse ich und erteile den Herren Classensekretären das Wort zur Verlesung der Nekrologe auf unsere heimgegangenen Mitglieder.

Der Classensekretär der mathematisch-physikalischen Classe, Herr C. v. Voit theilt mit, dass die mathematisch-physikalische Classe in den beiden letzten Jahren 9 Mitglieder, drei einheimische und sechs auswärtige durch den Tod verloren hat.

Es sind gestorben:

1. am 10. Februar 1901 der frühere Präsident der Akademie, der Chemiker und Hygieniker Max v. Pettenkofer; ihm ist in der Festsitzung vom 16. November 1901 durch den Classensekretär C. v. Voit eine eigene Gedächtnissrede gewidmet worden;
2. am 9. Oktober 1901 der Botaniker Robert Hartig und
3. am 21. Januar 1902 der Zoologe Emil Selenka.

Ferner:

1. am 21. Februar 1900 der Astronom Charles Piazzi Smyth in Edinburgh;
2. am 11. Juni 1900 der Physiologe Willy Kühne in Heidelberg;
3. am 14. Januar 1901 der Mathematiker Charles Hermite in Paris;
4. am 12. August1901 der Geologe Nils Adolf Erik Nordenskjöld in Stockholm;
5. am 21. August 1901 der Physiologe Adolf Fick in Würzburg;
6. am 22. November 1901 der Zoologe Alexander Kowalewski in St. Petersburg.

Robert Hartig.[1])

Am 9. Oktober 1901 ist das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe der Akademie, der verdiente Botaniker Robert Hartig im 63. Lebensjahre nach kurzer Krankheit gestorben. Noch in voller Kraft, mitten aus dem eifrigsten und fruchtbarsten Schaffen heraus, ist er aus dem Leben geschieden. Er war einer derjenigen Gelehrten, welche die Forstwirthschaft auf naturgesetzliche Grundlagen zu stellen suchte durch die naturwissenschaftliche Erforschung des Lebens der Waldbäume; er hat dadurch nicht nur die praktische Forstwirthschaft, sondern auch die Botanik in hohem Grade gefördert.

Robert Hartig wurde am 30. Mai 1839 zu Braunschweig geboren als Sprosse einer Familie, die durch drei Generationen dem Forstfache angesehene Vertreter geliefert hat: Der Grossvater Georg Ludwig Hartig that sich, nachdem er vorher als Forstmeister des Fürsten von Solms-Braunfels eine Privatforstschule zu Hungen geleitet und ein treffliches Lehrbuch für Förster geschrieben hatte, zuletzt als Oberlandforstmeister in Berlin als Organisator der Forstverwaltung Preussens sowie als einer der Begründer des rationellen Waldbaues hervor; der Vater Theodor Hartig, Professor der Forstwissenschaft am Collegium Carolinum in Braunschweig, war durch seine Kenntnisse in der Anatomie und Physiologie der Holzpflanzen einer der ersten Forstbotaniker und hatte sich unter Anderem durch die Auffindung der Kleberkörner oder des Aleurons in den Zellen der Pflanzensamen, den ersten Nachweis krystallisirten Eiweisses, sowie durch seine Ertragsuntersuchungen einen sehr geachteten Namen gemacht; der aufgeweckte und wissensdurstige Sohn Robert trat, die Tradition der Familie fortsetzend, in die Fusstapfen des Vaters, bei dem er sich von früher Jugend an reiche botanische und forstliche Kenntnisse

[1]) Dr. A. Cieslar, Centralblatt für das gesammte Forstwesen, 1902. Karl Wilhelm, österreich. Vierteljahrschrift für Forstwesen, 1901. Dr. Emil Meinecke, ein Nekrolog.

erwarb, die ihm als feste Grundlage für seine spätere Entwicklung dienten.

Anfangs war er, in seiner Vorliebe für den Wald, geneigt, sich dem praktischen Forstdienste zu widmen. Er war schon so weit vorgebildet, dass er gleich nach Absolvirung des Gymnasiums, in den Jahren 1859—1861 weite forstliche Reisen durch die Waldungen Deutschlands unternehmen konnte, wobei er eigene Anschauungen und reiche Erfahrungen über die forstlichen Verhältnisse sammelte, die er später in seiner ersten Schrift verwerthete.

Er studirte dann an der forstlichen Abtheilung des Collegium Carolinum zu Braunschweig während zwei Jahren Forstwissenschaft, vorzüglich bei seinem Vater. Nach der 1863 bestandenen Prüfung für Forstbeamte hörte er noch an der Universität Berlin juristische und kameralistische Vorlesungen und trat hierauf in den braunschweigischen Staatsforstdienst, wo er 1865 seine definitive Anstellung erhielt. Aber der gleichmässige Dienst im Bureau war seinem regsamen Geist nicht zusagend; es war ihm unmöglich, sich dies als Lebensberuf zu denken und als ihm die Beschäftigung mit wissenschaftlichen Arbeiten untersagt wurde, nahm er nach fünf Vierteljahren den Abschied aus dem Staatsdienst.

So wurde der praktische Forstmann mehr und mehr der Wissenschaft zugeführt. Er erwarb sich (1866) an der Universität Marburg den Doktorgrad und begann zunächst eine rege schriftstellerische Thätigkeit; schon bei seinen vorher erwähnten Waldwanderungen hatte er umfassende Beobachtungen über den Zuwachs der Bäume angestellt und darüber (1865) sein erstes Werk: „vergleichende Untersuchungen über den Wachsthumsgang und Ertrag der Rothbuche und Eiche im Spessart, der Rothbuche im östlichen Wesergebirge, der Kiefer in Pommern und der Weisstanne im Schwarzwald“ herausausgegeben, die er als Doktordissertation benützte. Dann sammelte er das Material für die Aufstellung der Ertragstafeln für die Fichte und Rothbuche, welches er (1868) in einer grösseren Abhandlung: „Die Rentabilität der Fichtennutzholz-

und Buchenbrennholzwirthschaft im Harz und im Wesergebirge" verarbeitete.

Dadurch war der hannöverische Forstdirektor Burckhardt auf den strebsamen jungen Forstmann aufmerksam geworden und lud ihn ein, in die hannöverische Forsteinrichtungs-Kommission als Forstgeometer einzutreten und die Vermessung eines Waldcomplexes zu übernehmen. Da kam nach einer mehrmonatlichen Thätigkeit ein Ereigniss, das seinem Leben eine andere, glückliche Wendung gab und ihn bleibend für die Wissenschaft und die akademische Laufbahn gewann. Er erhielt nämlich (1867) den Antrag, an Stelle des erkrankten Professors Julius Theodor Ratzeburg, des ausgezeichneten Kenners der Forstinsekten, die Vorlesungen über Zoologie und Botanik an der preussischen Forstakademie Eberswalde zu übernehmen; es ist ein Zeichen seiner Kenntnisse und seiner Energie, dass er vier Tage später diese Vorlesungen begann. Nach der Genesung Ratzeburg's wurden ihm die Vorlesungen über Botanik (1869) unter Beförderung zum Dozenten definitiv übertragen; 1871 erfolgte seine Anstellung als Professor der Botanik.

Als solcher beschäftigte er sich anfangs noch mit mehr forstlichen Problemen z. B. mit dem Zuwachs und dem Dickenwachsthum der Waldbäume und mit Bestimmungen des specifischen Frisch- und Trockengewichtes, des Wassergehaltes und Schwindens des Kiefernholzes, aber bald wandte er sich rein botanischen Fragen zu, jedoch fast ausschliesslich solchen, welche sich an die Kultur der Waldbäume anschlossen; in Folge seiner gründlichen Ausbildung in der Forstwirthschaft und seiner reichen Kenntnisse in der Botanik bewegte er sich auf einem Grenzgebiete, welches die Botaniker wegen ihrer mangelnden Erfahrung des Lebens der Waldbäume nicht betraten und von dem aus die Resultate der Wissenschaft alsbald für die Praxis die werthvollste Anwendung fanden.

In zwei Richtungen der Botanik hat er Hervorragendes geleistet: in der Lehre von den Baumkrankheiten und in der von dem Bau der Bäume.

Bei seinen Beobachtungen im Walde wurde er auf krankhafte Veränderungen der Holzgewächse, insbesondere durch niedere pflanzliche Organismen, durch Pilze, aufmerksam, die man vorher kaum beachtet hatte, da dazu eingehende mikroskopische Studien nöthig waren, welche der praktische Forstmann damals nicht anzustellen vermochte. Ueber die Krankheiten der Pflanzen überhaupt war nur wenig bekannt, während über die Erkrankungen des thierischen Organismus schon seit längerer Zeit wichtige Kenntnisse vorlagen. Erst im Jahre 1858 erschien Kühn's treffliche Schrift über die Krankheiten der Culturgewächse; darnach wurde durch die Arbeiten von Tulasne in seiner Carpologie (1861) und von De Bary in seinem epochemachenden Werke über die Morphologie und Biologie der Pilze (1866) der exakte Nachweis erbracht, dass eine Anzahl von Pflanzenkrankheiten auf dem Eindringen parasitischer Pilze in das Gewebe der Pflanzen beruht. Hartig erkannte alsbald die Wichtigkeit der Sache und gieng mit wahrem Feuereifer an die Erforschung der pathogenen Parasiten der Bäume. Durch eine lange Reihe ausserordentlich erfolgreicher Untersuchungen förderte er die Kenntniss der Lebenserscheinungen und der Entwicklungsgeschichte der Schmarotzerpilze in sehr erheblichem Maasse. Er hat dabei ein Paar Dutzend neue Arten derselben entdeckt und ebenso viele schon bekannte eingehend in anatomischer und physiologischer Richtung untersucht. Es gelang ihm, den Bau des Myceliums der Holzparasiten im Inneren des Baumes zu erkennen und das Vordringen der Hyphen im Holz zu verfolgen; auch erweiterte er wesentlich die Kenntnisse von dem Bau und der Entwicklungsgeschichte der Fruchtkörper, besonders der Hymenomyceten. Indem er zusah, in welcher Weise die Pilze auf ihre Nährpflanzen einwirken und wie schliesslich das abgetödtete Holz zersetzt wird, fand er die merkwürdige Thatsache, dass jeder Holzparasit eine ihm eigenthümliche Zerstörungsweise ausübt, sein besonderes „Zerstörungsbild“ erzeugt. Er legte seine Erfahrungen in dem Buch: „Die wichtigen Krankheiten der Waldbäume“ (1874) sowie in dem umfassenden Werk:

„Die Zersetzungserscheinungen des Holzes der Nadelholzbäume und der Eiche in forstlicher, chemischer und botanischer Richtung" (1878) nieder, wodurch er sich zum Begründer der Lehre von den Baumkrankheiten und zu der unbestritten ersten Autorität auf dem Gebiete der Pflanzenpathologie erhob.

Als die bayerische Staatsregierung (1878) die Ausbildung der staatlichen Forstbeamten an die hiesige Universität verlegte, und in dankenswerthester Weise eine Stätte für die Wissenschaft gründete, war sie mit weitem Blick bestrebt, die bedeutendsten Fachmänner zu gewinnen; mit Baur, Ebermayer, Gayer und Heyer wurde auch Hartig berufen und zwar als Professor der Anatomie, Physiologie und Pathologie der Pflanzen sowie als Vorstand der botanischen Abtheilung der forstlichen Versuchsanstalt und des forstbotanischen Laboratoriums.

Hier bekam er nach Errichtung des mit allen Hilfsmitteln ausgerüsteten forstbotanischen Instituts das seinen Neigungen und Talenten zusagende Feld für eine äusserst fruchtbare Thätigkeit als Lehrer und Forscher.

Er setzte darin anfangs seine Studien über Krankheiten der Holzpflanzen fort. Im Jahre 1882 sammelte er die Ergebnisse derselben in einem viel benützten vortrefflichen Werke: „Lehrbuch der Baumkrankheiten", in dem er fast ausschliesslich von seinen eigenen Untersuchungen berichten konnte und das drei Auflagen erlebte; in der dritten erweiterten Auflage (1900) tritt der Titel: „Lehrbuch der Pflanzenkrankheiten" auf. — In dem ersten der drei Bände der von ihm herausgegebenen „Untersuchungen aus dem forstbotanischen Institut" (1880, 1882, 1883) sind grösstentheils noch neue, auf genaue mikroskopische Beobachtungen gegründete mykologische Arbeiten und Beschreibungen der Krankheitserscheinungen enthalten. Hierher gehört auch sein Buch „über den echten Hausschwamm" (1885), ein Muster sowohl in wissenschaftlicher als auch in praktischer Hinsicht.

Hartig beschäftigte sich auch mit den Krankheiten der Gewächse nicht parasitärer Natur; er unterschied scharf zwischen den durch niedere Organismen und den durch andere Ursachen

entstandenen Krankheitsformen, und er hütete sich vor der Einseitigkeit, fast bei jeder Pflanzenerkrankung Pilze als Ursache zu sehen, wie man es auch nicht selten bei den Erkrankungen der Thiere und des Menschen zu thun geneigt ist; die Pilze können ja auch die Folge der Erkrankung des Gewebes sein. Hierher sind zu zählen seine Arbeiten: Ueber das Aussetzen der Jahresringe bei unterdrückten Stämmen (1868); über den Einfluss des Raupenleims auf die Gesundheit der Bäume (1892); über das Verhalten der vom Spanner befallenen Kiefern (1895); über das Erkranken und Absterben der Fichte nach der Entnadelung durch die Nonnenraupe (1892), wobei er auf die merkwürdige Erscheinung einer starken Erhitzung der Stämme aufmerksam machte; über die Folgen des Frostes und des Sonnenbrandes (1880); namentlich aber seine wichtigen Erfahrungen über die Beschädigung der Nadelwaldbäume durch die schweflige Säure des Hütten- und Steinkohlenrauchs (1896) und seine merkwürdigen Beobachtungen über die häufig vorkommenden Blitzbeschädigungen der Waldbäume (1897).

Eine zweite grosse Reihe von Arbeiten Hartig's bezieht sich auf den Bau und das Leben der Pflanze, insbesondere wieder des Waldbaumes; es wurden dadurch viele Fragen der Anatomie und Physiologie, namentlich die der Wachsthumsgesetze der Holzgewächse und der physiologischen Vorgänge im Holzkörper gefördert und in Folge davon auch die Waldwirthschaft auf wissenschaftliche Grundlagen gestellt, wie es vorher schon von Seiten der Chemie für die Landwirthschaft geschehen war.

Von den anatomischen Schriften seien genannt das werthvolle, viel benützte, in drei Auflagen erschienene Büchlein über die anatomischen Unterscheidungsmerkmale der wichtigeren in Deutschland wachsenden Hölzer (1879); die umfassende Arbeit über das Holz unserer deutschen Nadelwaldbäume (1885), in welcher die Bedingungen für die Qualität des Holzes derselben entwickelt werden; dann die Abhandlung über das Holz der Rothbuche in anatomischer, physiologischer,

chemischer und forstlicher Richtung (1888, mit Prof. R. Weber); und das Lehrbuch der Anatomie und Physiologie der Pflanzen unter besonderer Berücksichtigung der Forstgewächse (1891). — Von Bedeutung sind seine Erklärungen bestimmter Eigenthümlichkeiten des Holzes der Bäume wie des Drehwuchses (1895) des Wimmerwuchses, des excentrischen Wuchses der Waldbäume (1899) und die aus dem Längsdruck auf das Cambium abgeleitete Rothholzbildung bei der Fichte (1896).

Werthvolle physiologische, rein botanische Untersuchungen handeln von der Vertheilung der organischen Substanz, des Luftraumes und des Wassers im Innern der Bäume, von der Thätigkeit des Cambiums, von den Ursachen der Jahrringbildung, von der Entstehung von Frühjahrs- und Sommerholz, von der Bedeutung der Reservestoffe für die Oekonomie des Baumes. Einen lebhaften Streit führte er mit dem berühmten Botaniker Sachs über die Ursachen der Saftbewegung in der Pflanze; letzterer hatte zur Erklärung derselben seine Imbibitionstheorie ersonnen; nachdem diese schon von Josef Böhm in Wien bekämpft worden war, stellte ihr Hartig (1883) die Gasdrucktheorie entgegen, welche er mit den Resultaten genauer, fein angestellter experimenteller Untersuchungen über die Wasserbewegung im Holzkörper vertheidigte. Wenn es ihm auch nicht geglückt ist, seine Theorie zur allgemeinen Geltung zu bringen, so hat er doch den Weg zu neuen Auffassungen des viel erörterten Problems und zu neuen Forschungen gebahnt. — In seiner letzten Schrift: „Holzuntersuchungen; Altes und Neues" (1901) fasste er die in 40jährigem Studium gewonnenen Ergebnisse seiner alten, schwer zugänglichen Arbeiten und neuerer über die Wachsthumsgesetze der Bäume und des Waldes, über den anatomischen Bau des Holzkörpers, seiner physiologischen Eigenschaften und seiner physiologischen Aufgaben zusammen. —

Ueber die zweckmässige Organisation des forstlichen Versuchswesens sprach er sich energisch für die vollständige Freiheit in der Wahl der Aufgaben sowie der Durchführung derselben aus, namentlich gegenüber Dankelmann, welcher gemein-

sames Arbeiten nach einem bestimmten gleichheitlichen Plane befürwortete. Es ist ja wohl richtig, dass gewisse einzelne Fragen durch gemeinsame Thätigkeit am besten gefördert werden; jedoch wird im Allgemeinen der Wissenschaft sicherlich am meisten genützt durch freies selbständiges Schaffen der Einzelnen.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, dass Hartig durch seine wissenschaftliche Arbeit zwei wichtige Zweige der Pflanzenbiologie in dankenswerther Weise ausgebildet hat und dass er durch die Anwendung seiner Erkenntnisse auf die Forstwirthschaft zur wissenschaftlichen Entwicklung der letzteren sehr viel beigetragen hat. Es war ihm dies, wie erwähnt, nur dadurch möglich, dass er gelernter Forstmann und zugleich gründlich durchgebildeter Botaniker war; weder ein praktischer Forstmann noch ein theoretischer Botaniker hätte das von ihm Geleistete vollbringen können. Es ist dies ein abermaliges Beispiel dafür, dass bei einer gewissen Ausbildung der Wissenschaft die Praxis nur durch die Theorie auf sicherem Wege zum Fortschritt geleitet wird.

Durch einen unausgesetzten Fleiss hatte er sich eine reiche Erfahrung und ein umfassendes Wissen und Können erworben. Es beseelte ihn eine unauslöschliche Lust zur Arbeit und zur Erkenntniss der Dinge; mit einer ungewöhnlichen Energie und Arbeitskraft ausgerüstet war rastloses Schaffen der Inhalt seines ausschliesslich der Wissenschaft geweihten Lebens.

Er war ausgezeichnet durch einen scharfen Blick zu sehen, wo eine neue Erscheinung vorlag, durch eine feine Beobachtungsgabe und durch ein besonderes Geschick die Wege der Erforschung zu finden.

Durch diese Eigenschaften ist er einer der fruchtbarsten Forscher auf seinem Gebiete geworden, der viele neue Beobachtungen, Versuche und Erklärungen von bisher dunkel gebliebenen Vorgängen in der Pflanzenwelt geliefert hat.

Durch die Lebendigkeit und Frische seines Wesens war er auch ein vortrefflicher Lehrer; durch geschickte Experimente,

Demonstrationen und Zeichnungen, sowie namentlich durch Praktika suchte er den Schülern richtige Anschauungen beizubringen. Immer mehr kommt der denkende Lehrer in dem Unterricht der Naturwissenschaften zu der Ueberzeugung, dass die jetzige Art des Studiums eine veraltete und verfehlte ist, welche umgeändert werden muss. Durch die vielen und eingehenden Vorlesungen gelangt der Studirende niemals zu einem wahren Verständniss der Vorgänge; das dabei Haftende ist wahrhaft kümmerlich und findet zumeist nur ein gedankenloses Auswendiglernen, ein eigentliches Studiren so gut wie nicht statt. Es muss mehr dem Privatstudium aus einfachen Lehrbüchern überlassen werden; nur die Curse und Uebungen, bei denen der Lehrer dem Schüler nahe tritt und ihn im Beobachten der Erscheinungen unterrichtet und in Fertigkeiten unterweist, werden dem Uebel abhelfen.

Wir bedauern tief den Verlust des ausgezeichneten Forschers, welcher bei seiner grossen Erfahrung und seinem Geschick die Wissenschaft noch mit vielen Errungenschaften hätte bereichern können. Der Einfluss seines Eingreifens in dem von ihm betretenen Gebiete wird noch lange fortwirken. —

Emil Selenka.

Die mathematisch-physikalische Classe beklagt den Verlust noch eines weiteren Genossen, des ausserordentlichen Mitgliedes Emil Selenka, der nach ganz kurzem Krankenlager, 60 Jahre alt, am 21. Januar dieses Jahres aus dem Leben geschieden ist. Er hat sich auf dem Gebiete der Zoologie und der Entwicklungsgeschichte der Thiere namhafte Verdienste erworben.

Ich verdanke die folgenden Angaben über seinen Lebensgang und seine wissenschaftlichen Arbeiten der Güte unseres verehrten Collegen Richard Hertwig.

Emil Selenka wurde am 27. Februar 1842 zu Braunschweig geboren; er genoss seine Ausbildung zunächst auf dem dortigen

Gymnasium und dann, nachdem er dasselbe nach Absolvirung der Obersekunda verlassen hatte, auf dem Collegium Carolinum, von welchem er nach einer glänzend bestandenen Maturitätsprüfung im Jahre 1863 zur Universität entlassen wurde.

Schon frühzeitig wurde in ihm durch seinen Vater auf gemeinsamen Spaziergängen der Sinn für die Schönheiten der Natur geweckt. Er gewann Interesse für Wolken und Sterne, sammelte Pflanzen, Schmetterlinge und Mineralien, und schmückte mit ihnen sein Arbeitszimmer. Diese früh erwachte Neigung zu den Naturwissenschaften fand auf dem Collegium Carolinum weitere Nahrung, da auf dieser Anstalt ausser den Gymnasialfächern auch die Naturwissenschaften, besonders Chemie, eifrig betrieben wurden.

Als daher Selenka im Jahre 1863 die Universität Göttingen bezog, konnte es für ihn nicht zweifelhaft sein, dass er sich für das Studium der Naturwissenschaften entschied. Er trieb Zoologie bei Wilhelm Keferstein, Physik bei Wilhelm Weber, Geologie bei Karl v. Seebach, Mineralogie bei Wolfgang Sartorius v. Waltershausen. Anfangs war er geneigt, bei letzterem sich in Mineralogie und Geologie auszubilden, aber durch den Einfluss des anregenden Keferstein, zu dem er in besonders nahe Beziehung trat, wurde er veranlasst, sich der Zoologie zu widmen. Unter seiner Leitung unternahm er eine umfassende Bearbeitung der Anatomie und Systematik der Seewalzen oder Holothurien, bei der er eine von Al. Agassiz eingesandte grosse Sammlung dieser merkwürdigen wirbellosen Thiere verwerthete; auf Grund dieser Arbeit wurde er 1866 zum Doktor promovirt und zugleich als Assistent am zoologisch-zootomischen Institut angestellt. An demselben führte er noch mehrere Untersuchungen aus: Ueber die Entwicklungsgeschichte der Luftsäcke des Huhns, über die fossilen Crocodilinen des Kimmeridge von Hannover, über die Stellung des fossilen Tragocerus amaltheus, über die Spongien aus der Südsee, über die Anatomie von Trigonia margaritacea. Auch wurde ihm die Vergünstigung zu Theil, seinen leider früh verstorbenen Lehrer auf einer wissenschaftlichen Reise nach dem an der

Nordküste Frankreichs gelegenen Saint Malò zu begleiten, wo er zum ersten Mal Gelegenheit fand, die reiche Fauna des Meeres kennen zu lernen.

Dem Wunsche seines Vaters folgend machte Selenka im Sommer 1868 das Oberlehrerexamen, um den Rückhalt einer gesicherten Lebensstellung zu haben, falls seine Wünsche sich der wissenschaftlichen Forschung zu widmen auf Schwierigkeiten stossen sollten. Indessen hatte er kaum dieses Examen bestanden, als er auf Empfehlung seines Lehrers Keferstein hin als ordentlicher Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an die Stelle des verstorbenen Professors van der Hoeven nach der holländischen Universität Leiden berufen und so ihm in aussergewöhnlich jugendlichem Alter ein selbständiger akademischer Wirkungskreis gesichert wurde. Das Bedürfniss, seine und seiner Schüler Arbeiten in den Niederlanden selbst veröffentlichen zu können, veranlasste ihn, das Niederländische Archiv für Zoologie zu begründen, eine Zeitschrift, welche auch jetzt noch fortbesteht und die er mit zahlreichen eigenen Arbeiten bedachte. Leider ertrug er das holländische Klima sehr schlecht. Daher ergriff er mit Freuden die Gelegenheit, welche ihm 1874 durch eine Berufung nach Erlangen als Nachfolger von E. Ehlers geboten wurde, seinen Wirkungskreis in Holland, so sehr er ihm auch lieb geworden war, aufzugeben und gegen die Professur der Zoologie und vergleichenden Anatomie in Erlangen einzutauschen. In Erlangen erwuchs ihm die Aufgabe, die Pläne zum Neubau und zur Neueinrichtung eines zoologischen Instituts auszuarbeiten, welches er die Freude hatte, im Jahre 1885 einzuweihen und zu beziehen. Ferner fällt in die Zeit seines Erlanger Aufenthalts die Begründung des angesehenen biologischen Centralblattes, bei welchem er gemeinsam mit seinem botanischen Collegen M. Rees den Physiologen Rosenthal unterstützte. Vor Allem aber verdienen hier seine zahlreichen wissenschaftlichen Reisen Erwähnung; wiederholt hat er in der zoologischen Station in Neapel gearbeitet; sein Wandertrieb und die Lust, fremde Länder und deren Thierwelt aus eigener Anschauung kennen

zu lernen, führten ihn nach Brasilien und zwei Mal nach Ceylon, Indien, Japan und den Sundainseln.

Im Jahre 1895 legte Selenka aus freien Stücken seine Professur in Erlangen nieder, um ganz seinen Studien, namentlich der Verwerthung der von seinen Reisen mitgebrachten Sammlungen, leben zu können; er siedelte nach München über, wo ihm auf den Vorschlag der philosophischen Fakultät die Gelegenheit geboten wurde, seine Lehrthätigkeit an der Universität als Honorarprofessor fortzusetzen. Unserer Akademie gehört er seit 1896 an.

Selenka war eine vielseitig und reich begabte Persönlichkeit, höchst lebendigen Geistes und voll Interesse für Alles. Eine aussergewöhnliche Redegabe machte ihn zu einem hervorragenden Lehrer der akademischen Jugend. Reges Bestreben bekundete er für Vervollkommnung der Unterrichtsmittel; er gehörte zu den ersten, welche das elektrische Projektionsmikroskop und hektographirte Zeichnungen einführten, um den Unterricht anschaulicher zu gestalten. So gelang es ihm denn auch, zahlreiche Schüler an sich zu fesseln, von denen einige selbständige wissenschaftliche Stellungen einnehmen, so Prof. Hubrecht in Utrecht, Prof. Lampert in Stuttgart, Prof. Fleischmann in Erlangen. In wissenschaftlichen Vereinen gab er lichtvolle Darstellungen aus seinem reichen Wissensschatze; die liebenswürdige und anschauliche Art seiner Darstellung sicherten ihm auch reichen Erfolg, wenn sich seine Rede an weitere Kreise des Publikums wandte, wie er denn auch jeder Zeit bereit war, zu gemeinnützigen Zwecken öffentliche Vorträge zu halten.

Seine wissenschaftliche Thätigkeit erstreckte sich nur selten auf den anatomischen Bau und die Systematik der Thiere. Ausser der vorher erwähnten die Holothurien behandelnden Doktordissertation hat er in dieser Hinsicht nur noch die schon von seinem Lehrer Keferstein wiederholt studirte Gruppe der den Holothurien sich anschliessenden, das Meer bewohnenden Sternwürmer oder Gephyren bearbeitet, einmal in einer besonderen Monographie und dann in den Reports der Challenger

Expedition. Selenka's Hauptinteresse wandte sich bald der vergleichenden Entwicklungsgeschichte zu. Er war einer der ersten, welcher die Untersuchungen von Oskar Hertwig über die Befruchtung des Seeigeleies bestätigte, welcher ferner die ersten genaueren Untersuchungen über die Keimblattbildung und die Larvenentwicklung der Strudelwürmer oder Turbellarien machte, wobei er namentlich die an die Rippenquallen oder Ctenophoren erinnernde vierstrahlige Anordnung der Mesodermzellen bei den Embryonen erkannte. Er erweiterte die Entdeckungen Metschnikoff's über die Entwicklung des Mesoderms, der Leibeshöhle und des Wassergefässsystems bei den Stachelhäutern oder Echinodermen, indem er mit grossem Eifer insbesondere die Entwicklung des Mensenchyms und der Coelomdivertikel der Larven untersuchte und die Vertheilung der mesodermalen Gewebe auf diese beiden Componenten des Mesoderms aufzuklären versuchte.

In den letzten 20 Jahren seines Lebens concentrirte sich Selenka auf die Erforschung der Entwicklungsgeschichte der Wirbelthiere. Er begann mit dem Studium der Nagethiere. Unser verstorbenes Mitglied Th. Bischoff hatte bei seinen denkwürdigen Untersuchungen über die erste Entwicklung der Säugethiereier (1852) die später von B. Reichert und V. Hensen bestätigte, merkwürdige sogenannte „Umkehr der Keimblätter" entdeckt; es sollte hier die Lage der Keimblätter die umgekehrte von der gewöhnlichen Lage bei allen anderen Eiern sein d. h. das Darmdrüsenblatt in der Embryonalanlage nach auswärts, das Ektoderm nach Innen gewandt sein. Gleichzeitig mit unserem Collegen Kupffer wies nun Selenka nach, dass die Umkehr der Keimblätter nur scheinbar sei, dass die merkwürdige Lage der beiden Keimblätter durch eine Einstülpung der Embryonalscheibe in das Innere der Keimblase bedingt sei und Bischoff sowie Reichert und Hensen den richtigen Sachverhalt nicht zu erkennen vermochten, weil sie die Wand der Keimblase übersehen hatten.

An die Untersuchung der Nagethiere schloss sich die Untersuchung der bis dahin vernachlässigten Embryonal-Ent-

wicklung der Beutelthiere an; sie war von besonderer Bedeutung, da über diese nächst den Monotremen Neuhollands niederste Gruppe der Säugethiere noch keine zusammenhängenden Untersuchungen vorlagen. Er machte dabei wichtige Angaben über den äqualen Charakter des Furchungsprocesses, über die entodermale Entstehung der Chorda dorsalis und des Mesoderms und über den rudimentären Charakter der Harnhaut oder Allantois. Die Arbeiten Selenka's über die vergleichende Entwicklungsgeschichte finden sich in seinen beiden Hauptwerken: Zoologische Studien (2 Theile, 1878—1881) und Studien über die Entwicklungsgeschichte der Thiere (5 Theile, 1883—1892).

Den Schluss dieser entwicklungsgeschichtlichen Studien sollte die Bearbeitung der Primaten bilden, der Affen, besonders der Anthropoiden, weil zu hoffen war, auf diesem Wege weitere Aufschlüsse über die verwandtschaftlichen Beziehungen dieser höchst organisirten Säugethiere zu dem Menschen zu gewinnen. Um sich das äusserst schwierig zu erhaltende Material zu beschaffen, reiste Selenka zweimal nach den Sunda-Inseln, von seiner Frau bei dem mühsamen Unternehmen begleitet und getreulichst unterstützt. Obwohl durch einen unglücklichen Zufall, den Untergang eines Bootes, welches einen Theil der Sammlung trug, viel wichtiges Material verloren ging, wurden doch durch die beiden Expeditionen Entwicklungsreihen von verschiedenen Affenarten, sowie werthvolles Skelettmaterial des Orang-Utang und des Gibbons zusammengebracht. Letzteres, aus 250 Orangschädeln verschiedenen Alters und Geschlechts, 200 Schädeln von anderen Affen, insbesondere vom Gibbon, und einem männlichen und weiblichen Skelett vom Orang ohne Schädel bestehend, wurde von ihm in liberalster Weise der anthropologischen Sammlung des Staates zum Geschenk gemacht und zu einer Untersuchung verwandt, welche die durch Alter und Race bedingten Unterschiede im Orangschädel aufklärte, sowie die grosse Variabilität in der Zahl der ächten Backzähne nachwies. Von den Studien zur Entwicklungsgeschichte der Affen sind nur die ersten drei

Lieferungen erschienen; die wichtigsten in ihnen enthaltenen Ergebnisse sind die Nachweise, dass die bei den Nagethieren fälschlich als Blattumkehr bezeichnete Anordnung der Keimblätter auch bei den Primaten vorkommt und dass zwischen Affen und Menschen in den jungen Entwicklungsstadien eine ganz überraschende Uebereinstimmung existirt. Leider wurde Selenka durch einen allzufrühen Tod verhindert, diese von ihm begonnenen Untersuchungen zum Abschluss zu bringen.

Man würde der Eigenart Selenka's nicht gerecht werden, wenn man schliesslich nicht auch seiner reichen künstlerischen Begabung gedenken wollte. Er war ein vortrefflicher Zeichner und Maler, ausgerüstet mit feinem Verständniss für alles Schöne und Wissenswerthe, mochte es ihm in der Natur oder im Leben der Völker entgegentreten. Nächst dem Sinn des Forschers war es diese Künstlernatur, welche ihn in die weite Welt hinaustrieb. Er liebte es daher auch bei seinen Vorträgen allgemeineren Inhalts das Gebiet der Zoologie zu verlassen und Kunst, Religion, Sagen und Gebräuche der Völker in feinsinniger Weise zum Gegenstand seiner Betrachtungen zu machen. In dieser Hinsicht brachten ihm besonders reiche Ausbeute die beiden Reisen nach Japan und den malayischen Inseln. Die allgemeinen Ergebnisse derselben über Land und Leute legte er in einem mit seiner Gattin gemeinsam herausgegebenen, höchst anziehend geschriebenen Prachtwerke: „Sonnige Welten, ostasiatische Reiseskizzen, 1895" nieder, sowie in dem Büchlein: „Der Schmuck des Menschen (1899)", in welchem er, gestützt auf seine vielseitige Bekanntschaft mit Naturvölkern, diesen Theil der Ethnographie besonders ausführlich behandelte; er sucht darin nachzuweisen, dass in der Ausbildung des Schmuckes sich eine grosse Gesetzmässigkeit von den primitivsten Völkern an aufwärts erkennen lässt, dadurch bedingt, dass der Schmuck sich den Körperformen anpasst und gleichzeitig ein Ausdrucksmittel einfachster Art ist, um die Stellung seines Trägers und den Gebrauch des dazu verwendeten Gegenstandes anzudeuten.

Es mögen wohl überaus sonnige Tage gewesen sein,

welche die beiden gleichgestimmten Gefährten in den fremden Ländern in Anschauung der Schönheiten der Natur und Beobachtung der Kultur ihrer Bewohner genossen. Wahrlich, das Dasein Selenka's war ein beneidenswerth glückliches und sonniges. Wir werden des liebenswürdigen Mannes stets in Ehren gedenken.

Charles Piazzi Smyth.

Der Astronom Charles Piazzi Smyth in Edinburgh gehörte unserer Akademie schon seit dem Jahre 1855 als correspondirendes Mitglied, zu dem er von J. Lamont vorgeschlagen worden war, an. Ich verdanke die folgenden Angaben über seinen Lebensgang dem verehrten Collegen Hugo Seeliger.

Charles Piazzi Smyth ist geboren am 3. Januar 1819 in Neapel, wo sich sein Vater, ein britischer Admiral, vorübergehend aufhielt. Den sonderbaren Vornamen erhielt er zu Ehren seines Taufpathen und Freundes seines Vaters, des bekannten italienischen Astronomen Guiseppe Piazzi, des Entdeckers der Ceres. Nachdem er in England den gewöhnlichen Schulunterricht genossen, finden wir ihn bereits mit 16 Jahren als Assistent der Sternwarte am Kap der guten Hoffnung unter Maclear. Er betheiligte sich eifrig an den Arbeiten der Sternwarte, besonders aber an der südafrikanischen Gradmessung, so dass für Manchen seine im Jahre 1840 erfolgte Berufung zum Professor der Astronomie an der Universität Edinburgh und zum Director der dortigen Sternwarte mit dem Titel „Astronomer Royal for Scotland" nicht auffällig war. Seine Wirksamkeit in dieser Stellung, in welcher er durch Bearbeitung und Herausgabe der Beobachtungen seines Vorgängers Henderson der Astronomie nützlich war, wurde durch zahlreiche grössere Reisen und Expeditionen unterbrochen, auf welchen wir ihn namentlich hochgelegene Stationen aufsuchen sehen, um hier in reinerer und durchsichtigerer Luft meteorologische und spectroskopische Untersuchungen auszuführen. Besonders die letzteren sind der Wissenschaft von Nutzen gewesen. Am

bekanntesten ist Smyth durch seine Studien über die grosse Pyramide bei Gizeh geworden. Er mass dieses Bauwerk nach allen Richtungen, bestimmte seine Dimensionen und Orientirung auf das genaueste und beschrieb es in mehreren Werken. Allein die Folgerungen, die er aus seinen Studien zog und die ganz neue Ansichten über die Entwicklung der Cultur begründen sollten, haben niemals Anklang gefunden, und verwickelten ihn in unangenehme Streitigkeiten, die 1874 seinen Austritt aus der Royal Society in London zur Folge hatten. 1888 legte Smyth seine Aemter nieder und zog sich auf sein Landgut in der Nähe von Ripon zurück, wo er am 21. Februar 1900 starb.

Willy Kühne.

Am 10. Juni 1900 ist das correspondirende Mitglied unserer Akademie, der Physiologe Willy Kühne zu Heidelberg nach längerer Krankheit im Alter von 63 Jahren aus dem Leben geschieden. Die grossen deutschen Physiologen, welche die Erbschaft von Johannes Müller und der Brüder Weber angetreten hatten, Emil Du Bois Reymond, Ernst Brücke, Hermann Helmholtz und Carl Ludwig, bedienten sich im Wesentlichen der physikalischen Hilfsmittel zur Aufhellung der Lebenserscheinungen; ihren Nachfolgern war die Aufgabe zugefallen, den von ihnen im Grossen errichteten Bau im Einzelnen auszugestalten; sie hatten aber noch ein weiteres mächtiges Hilfsmittel dazu erhalten, denn die organische Chemie war mittlerweile, vorzüglich durch den gewaltigen geistigen Anstoss von Liebig, so weit entwickelt, um mit ihr die Vorgänge der Stoffveränderungen in den Organismen genauer zu verfolgen. Kühne ist einer der verdientesten Physiologen dieser Zeit gewesen; er hat auf den verschiedensten Gebieten die Physiologie mit wichtigen Erkenntnissen bereichert und alle Hilfsmittel zur Erforschung der Lebensvorgänge beherrscht und angewendet: Das Mikroscop, die Physik, die Chemie und das Experiment am Thier; er war namentlich einer der wenigen auch

in der Chemie durchgebildeten Physiologen, der klar erkannte, welche wichtige Bedeutung die letztere für die Erhellung der Lebensprocesse besitzt. Dadurch stand er als einer der wenigen Physiologen unserer Zeit da, welche gleichmässig die ganze physiologische Wissenschaft zu überblicken im Stande sind, verschieden von denen, welche in ganz einseitiger Weise nur einen Bruchtheil derselben kennen.

Kühne wurde zu Hamburg am 28. März 1837 als der Sohn vermögender Eltern geboren. In dieser unabhängigen Lage hatte er das Glück, ganz seinen Neigungen folgen zu können und sich nicht mit dem Brodstudium befassen zu müssen. Frei wählte er sich die Stätten und die Männer, wo er die beste Ausbildung für seine Lebensaufgabe empfangen konnte. Nach Absolvirung des Gymnasiums zu Lüneburg bezog er mit 17 Jahren die Universität Göttingen (1854). Man erkannte alsbald, dass aus dem geistesfrischen, glänzend veranlagten Jüngling sich etwas Bedeutendes entwickeln werde. Er wollte Physiologe werden. Ich traf den 18 Jährigen, der schon genau wusste, was er anzufangen habe, und ein auffallend reifes Urtheil besass, im Wintersemester 1855 bis 1856 in den Instituten Göttingens; er hörte damals bei Wilhelm Weber Physik, bei Listing physiologische Optik, bei Wöhler Chemie, bei Henle Anatomie, arbeitete im chemischen Laboratorium und machte einen physiologischen Cursus mit uns bei Rudolf Wagner mit. Wöhler hat wohl zu dieser Zeit den grössten Einfluss auf ihn ausgeübt und ihn der chemischen Richtung der Physiologie zugeführt. Man braucht sich nur zu erinnern, dass es Wöhler in einer denkwürdigen Untersuchung zum ersten Male gelungen war, einen Stoff des Organismus, den Harnstoff, künstlich darzustellen, auch hatte er mit Keller die Umwandlung der aufgenommenen Benzoesäure in die Hippursäure des Harns gefunden, was Kühne mit Hallwachs weiter verfolgte. Kühne fühlte sich jedoch nicht als Chemiker, sondern stets als Physiologe, der sich der Chemie als unentbehrlichen Hilfsmittels, in die chemischen Vorgänge des Lebens einzudringen, bedient. Bald hörte man von seinen ersten wissenschaftlichen Erfolgen;

im Alter von 19 Jahren wurde er als Assistent Rudolf Wagner's (1856) zum Doktor der Philosophie promovirt mit einer physiologischen Dissertation über künstlichen Diabetes bei Fröschen, angeregt durch Claude Bernard's berühmten Zuckerstich bei Warmblütern. Erst später (1862) erhielt er den Titel eines Doktors der Medizin honoris causa, da er sich die klinisch-medizinischen Studien und Prüfungen erspart hatte. In Göttingen entstanden noch die erwähnten Untersuchungen mit Hallwachs über die Entstehung der Hippursäure nach dem Genuss von Benzoesäure, welche merkwürdige Synthese er fälschlich in der Leber vor sich gehen liess, sowie die über die Umwandlung der Bernsteinsäure im Organismus. Er war dann kurze Zeit bei C. G. Lehmann in Jena, der damals einer der angesehensten physiologischen Chemiker war, und zog hierauf (1858) nach Berlin. Dorten wurde er zunächst durch Du Bois Reymond, den Meister in der Untersuchung der elektrischen Erscheinungen und elektrischen Reizung der Muskeln und Nerven, in die experimentelle Physiologie eingeführt und seine Aufmerksamkeit auf die allgemeine Physiologie der Muskeln und Nerven gelenkt; ausserdem arbeitete er bei Hoppe-Seyler, dem Assistenten in der chemischen Abtheilung des pathologischen Institutes unter Virchow, wo er seine Untersuchungen über den Ikterus machte. Vor Allem aber war es der zweijährige Aufenthalt in Paris bei dem grossen Experimentator Claude Bernard, dessen Entdeckungen, besonders das Auffinden des Glykogens in der Leber, die Physiologie in neue Bahnen lenkten, der seinen Blick erweiterte; in dieser arbeitsfrohen Zeit in der grossen Weltstadt entstanden wichtige Publikationen, zumeist dem Gebiete der Muskelphysiologie angehörig; auch erwarb er daselbst seine Virtuosität im Experiment am Thier. Auf eine Reise nach England folgte noch ein Besuch bei Carl Ludwig und Ernst Brücke in Wien, womit seine Lehr- und Wanderjahre abschlossen.

Als Hoppe-Seyler (1861) die Professur für physiologische Chemie in Tübingen annahm, rief Virchow an seine Stelle Kühne als Assistent des chemischen Laboratoriums im pathologischen

logischen Institut. Die Berliner Jahre brachten ihm die Gelegenheit zu intensiver wissenschaftlicher Thätigkeit und zur Schärfung des Geistes im anregenden Umgang mit talentvollen strebsamen Genossen, welche mit ihm das über die Fortschritte der medizinischen Wissenschaften referirende Centralblatt der medizinischen Wissenschaften gründeten; auch schaarte sich um den jungen Lehrer eine Anzahl gleichalteriger Schüler und da ihm Virchow mit grosser Liberalität freie Hand liess, bildete sich ein kleines physiologisches Institut aus, aus dem manche wichtige Arbeit ausging. Ausser zahlreichen kleineren Einzeluntersuchungen entstand in dieser Zeit die Monographie über die peripherischen Endorgane der motorischen Nerven (1862), dann (1864) die grosse, an Beobachtungen und Gedanken reiche Monographie: „Untersuchungen über das Protoplasma" und das ausgezeichnete Lehrbuch der physiologischen Chemie (1868); in letzterer fasste er zum ersten Male die Aufgabe vom rein physiologischen Standpunkte aus auf und gab eine wahrhaft klassische, höchst lebendige Darstellung der auf chemischen Wirkungen beruhenden Vorgänge im Organismus mit einer Fülle neuer Beobachtungen, so dass ein Chemiker mir sagte, es lese sich unterhaltend wie ein Roman; leider ist von dem Buch keine weitere Auflage erschienen, obwohl es in kurzer Zeit vergriffen war.

Bald stand Kühne als fertiger Physiologe da, angesehen durch bemerkenswerthe eigenartige Arbeiten, und man richtete an mehreren Universitäten die Aufmerksamkeit auf den jungen Forscher. Im Jahr 1868 folgte er einem Rufe als Professor der Physiologie an die Universität Amsterdam; von dorten wanderte er 1871 als Nachfolger von Helmholtz nach Heidelberg, wo er ein musterhaftes physiologisches Institut nach seinen Ideen einrichtete und bis zu seinem Ende unter Ablehnung mehrerer glänzender Rufe wirkte und viele Schüler erzog. In der idyllischen Musenstadt hatte er das Glück ungestört durch Zerstreuungen und zeitraubende Geschäfte sich in die wissenschaftliche Arbeit vertiefen und sich ganz der Erforschung der Lebensvorgänge hingeben zu können, obwohl er manche Vorzüge einer grossen Stadt sehr wohl zu schätzen und zu geniessen wusste.

Ungemein lebendigen Geistes und von klarem selbständigem Urtheil wusste er alsbald mit scharfem Blick das Wesentliche einer Erscheinung herauszufinden; aber dann gelang es ihm auch durch seine feine Beobachtungsgabe, die sinnreichsten Versuchsanordnungen und seine Geschicklichkeit als Experimentator die entgegenstehenden Schwierigkeiten wie spielend zu überwinden und die Fragen ihrer Lösung entgegen zu führen. Zumeist beschäftigten ihn Aufgaben von prinzipieller Bedeutung. Ein Blick über seine grösseren Arbeiten soll uns den Einfluss des Forschers auf die Entwicklung der Physiologie ins Gedächtniss zurückrufen.

Es waren vorzüglich drei grosse Probleme, welche ihn in Anspruch nahmen: die Physiologie des Muskels, die Physiologie der Netzhaut und die Chemie der Verdauung der Eiweissstoffe.

Die Vorgänge im Muskel suchte er in origineller Weise mit Hilfe des Mikroscops, durch die chemische Untersuchung und durch das physiologische Experiment zu erforschen.

Die früh begonnenen chemischen und experimentellen Studien über den Muskel hatten ihn gelehrt, dass es zum Verständniss des Uebergangs der Erregung von der Nervenfaser auf die Muskelfaser zunächst nothwendig ist, das anatomische Verhalten des Nerven im Muskel genau zu kennen und so fieng er als 22 Jähriger an, durch mikroscopische Forschung, in der er es zur Meisterschaft gebracht hatte, die schon von Anderen verfolgte Endigungsweise der Nerven in den Muskeln zu untersuchen; er trug dadurch wesentlich zu der jetzigen Lehre bei, dass das Ende der motorischen Nervenfaser mit der Muskelfaser in direkte Berührung trete und dabei die Nervenendigungen unter der Sarkolemmascheide des Muskelschlauchs in einer End- oder Sohlenplatte sich hirschgeweihartig verbreite. Wie von da die Erregung auf die Muskelfaser übergeht, ist allerdings unbekannt geblieben, denn er war nicht der Ansicht, dass die leitende Nervensubstanz continuirlich in die contraktile des Muskels übergehe. In ähnlicher Weise wurde von ihm die Endigung der Nervenfaseräste in den Ausläufern der Horn-

hautkörperchen beim Frosch und deren Formänderung beim Reiz der Nerven dargethan.

Die 1858 gemachte Beobachtung über die Entstehung der Todtenstarre, wobei er die Angabe von Brücke, dass es sich hier um die Gerinnung eines Eiweissstoffes im Muskel handelt, bestätigte, führten ihn zu der näheren chemischen Untersuchung des eiweisshaltigen Inhalts der Muskelfaser. Auf ingeniöse Weise suchte er den noch nicht geronnenen Inhalt des lebendigen Muskels zu bekommen, indem er die Gerinnung durch Kälte hintanhielt und durch Auspressen der gefrorenen Froschmuskeln eine dickliche Flüssigkeit, das Muskelplasma, gewann, das unter Sauerwerden spontan gerinnt mit Abscheidung eines globulinartigen, von ihm Myosin genannten Eiweissstoffes, der die Hauptmasse des Eiweisses des Muskels ausmacht; auch lehrte er die drei anderen Eiweissstoffe des Muskels genauer kennen. Zu gleicher Zeit mit Kühne war der verdiente, nicht genug anerkannte Emil Harless mit solchen Fragen unter Erhaltung ähnlicher Resultate beschäftigt. Die Untersuchungen Kühne's über die Eiweissstoffe im Muskel haben helles Licht über den Zustand des Protoplasmas im lebenden Muskel verbreitet, denn sie haben gelehrt, dass der Inhalt des Muskelschlauchs eine flüssige Masse, eine concentrirte Lösung von Eiweissstoffen, ist, und viel dazu beigetragen, die alte Lehre vom fibrillären Bau des Muskels und seinem festen Inhalt zu widerlegen. Eine feste Masse hätte die Veränderungen der Form bei der Contraktion nicht zugelassen. Dazu kam (1863) die glückliche Beobachtung, wie eine Nematode frei und leicht in dem Inhalt einer normalen Muskelfaser umherschwamm, eine Entdeckung, welche er alsbald verwerthete und den sichersten Beweis für seine obige Anschauung abgab.

Eine grosse Reihe sinnreicher, vielfach modificirter Versuche wurden von ihm über die chemische Reizung des Nerven und des Muskels beim Frosch gemacht (1859), in der Absicht, die seit Albrecht v. Haller viel diskutirte Irritabilitätsfrage des Muskels zu entscheiden, indem er chemische Reize suchte, welche sich verschieden für den Nerven und den Muskel ver-

halten. In der That fand er Agentien, welche in grösster Verdünnung noch auf das von ihm entdeckte nervenfreie Ende des von ihm in die Muskelphysiologie eingeführten Musculus sartorius vom Frosch erregend wirken, aber erst bei starker Concentration auf die Nerven, andere wie z. B. das Glyzerin, welche nur den Nerven erregen, und wieder andere, welche den Muskel heftig erregen wie das Ammoniak, den Nerven jedoch gar nicht. Wenn auch nachträglich durch die sinnreichen Versuche von Hering erkannt worden ist, dass die Reizung durch Chemikalien grösstentheils auf einer galvanischen Reizung durch den abgeleiteten Muskelstrom beruht, so ändert dies doch nichts an dem verschiedenen Verhalten von Muskel und Nerv gegen chemische Reize. Um nun die galvanische Reizung auszuschliessen, nahm Kühne später Gase und Dämpfe als Reizmittel, von denen die meisten den Muskel erregen, die Nerven jedoch ohne Erregung tödten. — Den sicheren Beweis für die Irritabilität des Muskels sah er darin, dass die nervenhaltigen Theile des Musculus sartorius eine nach der Peripherie abnehmende Erregbarkeit besitzen, die nervenfreien Enden dagegen eine gleichbleibende, und dass die ersteren die Erregung auf den ganzen Muskel übertragen, während die Erregung einer Muskelfaser nie auf eine andere Muskelfaser übergreift. — Lange Zeit hatte man das Verhalten der Muskeln mit Pfeilgift vergifteter Frösche als Beweis für die Muskelirritabilität angesehen; dieses Gift lähmt nämlich die Nervenendigungen im Muskel und doch sind die Muskeln darnach noch direkt erregbar. Da aber die letzteren nach Kühne noch die eben erwähnten Eigenschaften nervenhaltiger Muskeln zeigen, so schliesst er, dass trotz der Curare-Vergiftung sich im Muskel noch erregbare periphere Nerven vorfinden und also dieses Gift zur Entscheidung der Irritabilitätsfrage unbrauchbar sei.

Aus seinen Untersuchungen zur allgemeinen Physiologie der Muskeln und Nerven entwickelte sich sein vorher erwähntes bahnbrechendes Werk: „Untersuchungen über das Protoplasma", welches wohl ein Ausgangspunkt zur allgemeinen Physiologie geworden ist. Dabei prüfte er in gleicher Weise wie vorher

das Muskelprotoplasma das Verhalten des Protoplasmas anderer Gebilde gegen äussere Einwirkungen wie z. B. das der Amöben, der Rhizopoden und Myxomyzeten, der Flimmerhaare, der Zellen der Hornhaut und des Bindegewebes; auch das pflanzlicher Zellen z. B. der Zellen der Staubfädenhaare von Tradescantia. Es ergab sich daraus der ungemein wichtige Schluss, dass die Substanz in allen contraktilen Gebilden die gleiche plasmatische Flüssigkeit ist, oder die Einheit der contraktilen Substanz.

An dem für solche Versuche sich so sehr eignenden parallelfasrigen, an den Enden nervenfreien Musculus Sartorius des Frosches wurden von ihm noch mancherlei schöne Beobachtungen zur allgemeinen Muskel- und Nervenphysik gemacht. Hierher gehört der sogenannte Zweizipfelversuch, der die doppelseitige Leitung der Erregung in den motorischen Nervenfasern mit Sicherheit bewies. Er zeigte ferner die sekundäre Erregung von Muskel zu Muskel ohne Vermittlung von Nerven beim Zusammenschmiegen der Muskeln durch Pressen; weiterhin that er die Uebertragung der Erregung vom Muskel auf den Nerven dar und bewies die Abhängigkeit dieser sekundären Zuckung von den Aktionsströmen; er fand die interessante, allerdings noch unerklärliche Thatsache, dass ein Muskel nicht fähig ist, seinen eigenen Nervenstamm sekundär zu erregen. Es gelang ihm dagegen nicht, die von ihm vorausgesetzte elektrische Reizübertragung vom Nerven auf den Muskel durch Versuche darzuthun. Sonderbarer Weise zeigte nach seinen Beobachtungen das Protoplasma der Protozoen bei elektrischer Reizung beim Schluss des Stroms die Erregung an der Anode und nicht an der Kathode wie das Protoplasma der Muskeln, was allerdings gegen die Einheit des Protoplasmas zu sprechen scheint.

Von hoher Bedeutung sind seine umfassenden Arbeiten über die Verdauung der Eiweissstoffe durch den Pankreassaft und die dabei stattfindenden Veränderungen derselben, welche er schon in Berlin (1867) begonnen hatte. Während man früher nur dem Magensaft die Fähigkeit zuschrieb Eiweiss zu verdauen, hatte man dies auch für den Saft der Bauchspeicheldrüsse nachge-

wiesen, aber es blieb noch zweifelhaft, ob der Vorgang nicht nur eine Wirkung der Fäulniss durch niedere Organismen wäre. Kühne that dar, dass das Eiweiss dabei, nach Ausschluss der Fäulniss mittelst Salicylsäure, wirklich in kurzer Zeit verdaut wird. Es wird zunächst in Globulin verwandelt und dieses schliesslich in zwei Eiweissstoffe gespalten, die er Antipepton und Hemipepton nannte, welches letztere nach seiner Ansicht noch weiter in einfache stickstoffhaltige Produkte (Leucin, Tyrosin) und flüchtige Fettsäuren zersetzt wird; bei der Fäulniss durch niedere Organismen treten daneben noch übel riechende Produkte auf, namentlich das den Kothgeruch bedingende Indol, welches er durch Schmelzen von Eiweiss mit Kali, wobei schon Liebig den Kothgeruch bemerkt hatte, darstellen lehrte.

Kühne wurde dadurch zu dem näheren Studium der Fermentwirkungen geführt; er begnügte sich jedoch dabei nicht mit wirksamen Auszügen, sondern suchte die wirksamen Substanzen, die Fermente, zu isoliren. So stellte er das Eiweiss verdauende Ferment des Pankreas her, dem er den allgemein angenommenen Namen „Trypsin" gab, das durch Kochen in coagulirtes Eiweiss und in Pepton übergeht. Zur Unterscheidung von den sogenannten geformten Fermenten, niederen Organismen, führte er für die löslichen ungeformten Fermente den Ausdruck „Enzyme" ein.

Man war uneinig darüber, welches der normale wirksame Pankreassaft wäre, der bei temporären Fisteln erhaltene dickliche Saft oder der bei permanenten Fisteln gewonnene dünnflüssige Saft. Kühne lehrte in Uebereinstimmung mit Claude Bernard den ersteren als den normalen näher kennen; es ist ein dickflüssiger Saft, der in der Kälte eine wahre Gerinnung eines Eiweissstoffes zeigt und in Wasser geträufelt einen Niederschlag giebt; letzterer verhält sich wie das im Muskelplasma bei der Todtenstarre sich ausscheidende Myosin.

Nach der so folgenreichen Entdeckung von Carl Ludwig (1851) vermag man bekanntlich von gewissen in die Mundspeicheldrüsen sich einsenkenden Nerven die Sekretion dieser

Drüsen anzuregen; diese Nerven wirken also auf die Drüsenzellen ebenso erregend wie die Muskelnerven auf die Muskeln. Heidenhain gelang es später sogar mikroscopische Veränderungen der Drüsenzellen bei der Absonderung nachzuweisen. Solche Veränderungen beobachtete nun auch Kühne an den lebenden Zellen des Pankreas des Kaninchens; dieselben sind im unthätigen Zustande anders geformt als im thätigen und sie sondern nur an der freien, dem inneren Drüsenraum zugekehrten Fläche das Sekret ab.

Aus den Verdauungsversuchen mit dem Pankreassafte entwickelten sich seine weiteren wichtigen Untersuchungen über die bei der Pepsin- und Trypsinwirkung entstehenden Modifikationen der Eiweissstoffe. Während man früher, um Aufschlüsse über den Bau des Eiweisses zu erhalten, das grosse Eiweissmolekül durch die tief eingreifenden Säuren und Alkalien zu spalten suchte, wendete Kühne die eiweissspaltenden hydrolytischen Enzyme des Organismus an, welche anfangs noch hoch zusammengesetzte, vom gewöhnlichen Eiweiss nur wenig verschiedene Produkte liefern. Man liess vordem das Eiweiss bei der Verdauung in das leicht lösliche und leicht diffundirbare Pepton übergehen, das dann durch Wasserentziehung im Körper wieder zu gewöhnlichem Eiweiss zurückgebildet werde. Kühne fand, wie schon früher G. Meissner bei seinen maassgebenden Versuchen, eine ganze Anzahl von Uebergängen und von verschiedenen Produkten. Er bezeichnete die zuerst entstehenden, durch Salze, namentlich durch das von Heynsius in die Eiweisschemie eingeführte Ammoniumsulfat, fällbaren als Albumosen, die später sich bildenden, nicht mehr durch Salze fällbaren als echte Peptone; die verschiedenen natürlich vorkommenden Eiweissstoffe lieferten verschiedene Albumosen. Diese Untersuchungen haben die Kenntniss der Eiweissarten sehr gefördert und werden später, wenn einmal die Constitution des Eiweisses näher bekannt sein wird, noch weitere Bedeutung gewinnen.

Er wandte auch die Verdauung durch Fermente als elegante histologische Methode an zur Isolirung des Neurokeratins im

Nervenmark, zur chemischen Darstellung des Axencylinders und des charakteristischen Produktes der sogenannten amyloiden Entartung der Organe, mit dessen Untersuchung er sich früher beschäftigt hatte. Die Anwendung der Dialysenschläuche zur leichten Trennung der colloidalen Stoffe, wodurch grössere Flüssigkeitsvolumina der Dialyse zugänglich gemacht wurden, brachte einen wesentlichen technischen Fortschritt.

Ein ganz besonderes Interesse nahm Kühne an der (1876) durch den leider zu früh verstorbenen talentvollen Franz Boll gemachten Entdeckung, dass die Netzhaut des Auges im Leben purpurroth gefärbt sei und zwar durch einen merkwürdigen Farbstoff in den Aussengliedern der Netzhautstäbchen, der durch Licht fortwährend gebleicht wird und sich in der Dunkelheit dann wieder regenerirt. Kühne erkannte alsbald die hohe Bedeutung dieser Entdeckung und begann mit einer Energie ohne Gleichen die Sache näher zu verfolgen; er that dabei seine ganze Meisterschaft in der experimentellen Forschung und seine Beherrschung der chemischen und physikalischen Methoden dar. In kurzer Zeit hatte er eine grosse Zahl der wichtigsten Thatsachen aufgefunden, wenn sich auch seine anfängliche Erwartung, das Geheimniss der Erregung der Netzhaut durch die Lichtstrahlen aufzuhellen, nicht erfüllte. Während Boll meinte, dass die rothe Färbung und die Bleichung durch das Licht eine Lebenserscheinung wäre, that Kühne dar, dass die Stäbchenfarbe bei Lichtabschluss auch nach dem Tode und selbst bei der Fäulniss erhalten bleibt und durch Licht noch gebleicht wird, und dass sie von einer bestimmten chemischen Substanz herrührt, welche er aus dem Gewebe durch gallensaures Alkali auflöste und rein darstellte und deren physikalische Eigenschaften durch höchst sinnreiche Versuche prüfte. Er ermittelte die Wirkung der verschiedenen Farben des Spektrums auf den Sehpurpur, dann den Regenerationsprocess der gebleichten Netzhaut, woraus die sogenannte Optochemie entstand, und die Hervorbringung des weissen Bildes eines leuchtenden Gegenstandes auf der Netzhaut des ausgeschnittenen Kalbsauges auf rosarothem Grunde, das Optogramm,

vergleichbar dem Bilde auf einer photographischen Platte. Man hatte ja die kühnsten Hoffnungen daran geknüpft, wie es häufig bei solchen unerwarteten Entdeckungen geschieht; vermeinte man doch das Bild festhalten zu können von Dingen, welche das Auge vor dem Tode zuletzt erblickt hatte. Aber es sollte Kühne, wie gesagt, nicht beschieden sein in den Vorgang der Erregung der Stäbchen und Zapfen durch die Lichtwellen tiefer einzudringen, denn das Sehen zeigte sich nicht an den Sehpurpur gebunden, da gerade an der Stelle des schärfsten Sehens, dem sogenannten gelben Fleck, der Sehpurpur fehlt und Thiere mit ausgebleichter Netzhaut doch noch gut sehen, und viele gut sehende Thiere keinen Sehpurpur besitzen. Aber doch war in der Bleichung des Sehpurpurs durch das Licht ein Weg angedeutet, wie die Aetherwellen die Netzhautelemente zu erregen vermögen; dieselben können immerhin photochemisch wirken und die chemischen Zersetzungsprodukte die Reize für die Nervenendigung abgeben, wie Kühne annahm. In der von ihm entdeckten Wanderung des Pigments in den Stäbchen erblickte er einen durch Licht regulirbaren Lichtschirm.

Durch diese Erfahrungen an der Netzhaut wurde er angeregt, auch die elektrischen Eigenschaften derselben sowie des Sehnerven, welche zuerst von dem Schweden Holmgren in bahnbrechenden Untersuchungen studirt worden waren, noch weiter zu verfolgen. Es gelang ihm an der isolirten Netzhaut des Frosches einen Dunkelstrom nachzuweisen, wornach die äussere Stäbchenseite sich negativ elektrisch gegen die innere Nervenfaserseite verhält. Während der Belichtung der Netzhaut zeigt sich eine dauernde geringere Ablenkung, die negative Schwankung oder der Phototonus. Bei Lichtreiz der Netzhaut des mit dem Sehnerven verbundenen Augapfels erhält man an dem Nerven die negative Schwankung wie bei jeder Erregung und Thätigkeit eines gewöhnlichen Nerven; bei Eintritt der Dunkelheit durcheilt noch eine starke Erregung den Sehnerven und dann tritt wieder der Ruhestrom auf. Die Erregung des Protoplasmas der Innenglieder der Stäbchen durch

das Licht giebt sich also in dem Wandel der elektrischen Kräfte zu erkennen als Vorläufer der Erregung in den zugehörigen Nervenfasern.

Die letzte grössere Arbeit Kühne's vom Jahre 1898 war die über die Bedeutung des Sauerstoffs für die vitale Bewegung des Protoplasmas und zwar an pflanzlichen Organismen, bei der er noch sein ganzes eigenartiges Geschick zeigte. Bei Entziehung des Sauerstoffs hört die Bewegung der Staubfadenhaare der Tradescantien auf und erscheint wieder bei dem Wiederzutritt des Gases. Ebenso untersuchte er durch äusserst sorgfältige, vielfach modificirte Versuche die Protoplasmabewegung in chlorophyllhaltigen Pflanzenzellen ohne und mit Einwirkung des Lichts; letzteres führte zu innerer Sauerstoff-Entwicklung durch das Chlorophyll. Lichtzutritt ruft die Bewegung hervor; Sauerstoffzutritt bewirkt sie, auch wenn der Lichtzutritt schon unwirksam ist. Die Bewegung erlischt im Dunkeln und wird durch Sauerstoffzutritt und durch eigene Sauerstoffentwicklung im Licht wieder hergestellt.

Kühne war noch arbeitsfreudig und er trug sich mit allerlei Arbeitsplänen; öfters äusserte er sich in seinen Briefen an mich, er wünsche uns noch einige Jahre wissenschaftlicher Thätigkeit. Da befiel ihn am Ende des Sommersemesters 1899 nach einer starken Erkältung eine Erkrankung, die seinem Leben ein für die Wissenschaft zu frühes Ende bereitete.

Kühne war ein Naturforscher von hohen Gaben, der in dunkle und verwickelte Vorgänge des Lebens Licht gebracht hat, von grösster Gewissenhaftigkeit und Zuverlässigkeit in seinen Untersuchungen und Beobachtungen. Es war ihm ein leidenschaftliches Bedürfniss nach Erkenntniss eigen und die reine Freude an derselben; darum beseelte ihn auch eine wahre Lust zu schaffen. Er arbeitete leicht, und wenn er einmal eine Sache als bedeutungsvoll erkannt hatte, widmete er sich ihr mit aller Kraft und ruhte nicht eher als bis er sie so weit als möglich erschöpft hatte.

Er war einer der geistvollsten Menschen von sprudelnder Lebhaftigkeit, voller Interesse und von feinem Verständniss für

die Bestrebungen auf allen Gebieten menschlicher Thätigkeit, für die Fortschritte des Wissens und der Kunst, und von einer seltenen allgemeinen Bildung. Es war ein wahrer Genuss eine Kunstausstellung mit ihm zu durchwandern, wobei man erstaunt war über seine eingehenden Kenntnisse. Für seinen inneren Werth sprach es, dass er mit dem um 25 Jahre älteren Robert Bunsen fast täglich freundschaftlich verkehrte und ihm die Resultate der wissenschaftlichen Forschung berichten durfte.

Seine edle und liebenswürdige Persönlichkeit nahm alsbald für ihn ein. In der Wissenschaft war es ihm nur um die Sache und um die Wahrheit zu thun, nie um persönliche Interessen; jedes unwahre, selbstsüchtige Treiben verachtete er. Er konnte sich an jeder ernsten Leistung und an den Fortschritten des Wissens wahrhaft erfreuen. Er hielt sich frei von vorgefassten Meinungen und war stets bereit als irrthümlich erkannte Ansichten aufzugeben. Hypothesen und Theorien galten ihm wie jedem echten Naturforscher nicht als Erkenntniss, sondern nur als Mittel zur Erkenntniss.

Wir Zeitgenossen werden ihm stets dankbar für sein Lebenswerk sein und seiner in Verehrung gedenken; aber auch die spätere Zeit wird ihn zu den bedeutendsten Physiologen zählen.

Charles Hermite.

(Dieser Nachruf stammt aus der kundigen Feder des Herrn Collegen Alfred Pringsheim).

Am 14. Januar des Jahres 1901 starb zu Paris im 79. Lebensjahre der Nestor der französischen Mathematiker, Charles Hermite. Länger als ein halbes Jahrhundert hat er durch Schrift und Wort den Ausbau und die Verbreitung mathematischen Wissens in hervorragender Weise gefördert. Erst 1897, im Alter von 75 Jahren, hatte er seine Lehrthätigkeit, die er als Repetitor für Analysis an der École Polytechnique begonnen, als Professor an der Sorbonne niedergelegt, seine Schaffenskraft aber endete erst mit seinem Tode: tragen doch seine letzten Publicationen („Sur une équation transcendante“ im Archiv für Mathematik

und „Sulle frazioni continue“ in der neu begründeten Zeitschrift: Le Matematiche pure e applicate) das Datum vom 17. December 1900, bezw. Januar 1901!

Hermite wurde am 24. December 1822 zu Dieuze in Lothringen geboren. Nachdem er das Collège zu Nancy, dann die Pariser Collèges Henri IV und Louis le Grand besucht, bezog er 1842 die École Polytechnique. Das Interesse für die reine Mathematik, das schon auf der Schule mächtig in ihm erwacht war und namentlich durch die Lecture von Lagrange's „Traité de la résolution des équations numériques“ und Gauss' „Disquisitiones arithmeticae“ reichliche Nahrung gefunden hatte, verdrängte sehr bald seine ursprüngliche Absicht, Ingenieur zu werden. Schon 1843 schickt er auf Lionville's Rath an Jacobi eine briefliche Mittheilung seiner Untersuchungen über hyperelliptische Functionen und „stellt sich mit einem Schlage, durch einen Brief von wenigen Seiten, in die Reihe der besten Analysten Europa's“.[1]) Im Jahre 1848 wird er zunächst Repetitor und Examinator an der École Polytechnique, 1862 Maître de conférences an der École Normale, 1869 als Nachfolger Duhamel's Professor der höheren Algebra an der Sorbonne (Faculté des Sciences) und zugleich Professor der Analysis an der École Polytechnique. Wohl die gesammte, an hervorragenden Talenten so reiche Generation der jüngeren französischen Mathematiker hat er seit jener Zeit zu begeisterten Schülern gehabt.

Von seinen überaus zahlreichen, über die verschiedensten Gebiete der Analysis, Algebra und Zahlentheorie sich erstreckenden Arbeiten hat P. Mansion in der „Revue des questions scientifiques“ (T. 19) ein vorläufiges Verzeichniss zusammengestellt.[2]) Ihre Anzahl beläuft sich auf mehr als 200, und

---

[1]) Darboux, Rede zur Feier von Hermite's 70. Geburtstage.

[2]) Eine kurze kritische Besprechung der wichtigsten Hermite'schen Arbeiten giebt M. Krause in einem Vortrage, der in der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden gehalten wurde und in deren Organ abgedruckt ist; eine ausführlichere, glänzende Würdigung von Hermite's wissenschaftlichen Verdiensten bietet Emile Picard's in der

es verdient an dieser Stelle ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass mehr als der fünfte Theil in deutschen Zeitschriften publicirt wurde: liegt doch gerade hierin ein beredtes Zeugniss, wie Hermite seit jener ersten Correspondenz mit Jacobi unablässig bemüht war, wissenschaftliche und persönliche Verbindungen mit deutschen Mathematikern anzuknüpfen und zu unterhalten. Und wie er selbst mit Vorliebe sich als Schüler von Gauss, Jacobi und Dirichlet zu bezeichnen pflegte, so gebührt ihm, wie keinem seiner Landsleute und Collegen das grosse Verdienst, eingehendes Studium und gerechte Würdigung der grossen deutschen Mathematiker von Gauss bis Weierstrass in Frankreich angeregt und gefördert zu haben.

Eine einigermaassen ausreichende Classification der Hermite'schen Arbeiten bietet insofern grosse Schwierigkeiten, als viele derselben, und darunter gerade solche von ganz besonderer Tragweite nicht einer der oben genannten Disciplinen, sondern auf gewissen Grenzgebieten sich bewegend mehreren zugleich angehören.

Ein nach Anzahl und Bedeutung besonders erheblicher Theil jener Arbeiten beschäftigt sich mit der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Transcendenten und deren Beziehungen zur Algebra und Zahlentheorie. Dem zuvor erwähnten Briefe an Jacobi war bereits 1844 ein zweiter — über die Transformation der elliptischen Funktionen — gefolgt, welcher von dem auf der Höhe seines Ruhmes stehenden Königsberger Mathematiker mit den schmeichelhaftesten Lobsprüchen erwidert und für würdig erachtet wurde, mit jenem ersten zusammen in der Sammlung seiner „Mathematischen Werke“[1]) abgedruckt zu werden. Das schon in jenem zweiten Briefe

---

Faculté des Sciences gehaltener Vortrag: L'oeuvre scientifique de Charles Hermite (abgedruckt in den Annales de l'École Normale, 3ième Série, T. 18). Ein weiteres eingehendes Referat über Hermite's wissenschaftliche Thätigkeit hat M. Noether in den Mathematischen Annalen publicirt.

[1]) D. h. schon in der von Jacobi selbst veranstalteten Ausgabe: Bd. I (1846), p. 391 ff.

angewendete, heutzutage meist schlechthin als „Hermite'scher Satz" bezeichnete Fundamental-Princip, nämlich die Reduction jeder, gewissen Periodicitäts-Bedingungen genügenden Function auf eine lineare Verbindung bestimmter Elementarfunctionen, hat sich nicht nur für die Behandlung des Transformations-Problems, sondern für die gesammte Theorie der elliptischen Functionen als äusserst fruchtbar erwiesen und wurde späterhin (1855) in verallgemeinerter Form von Hermite auch für die Transformation der Abel'schen (genauer gesagt: hyperelliptischen) Functionen nutzbar gemacht. Andere grundlegende Anwendungen giebt er in seiner „Uebersicht über die Theorie der elliptischen Functionen"[1]) und bei der Behandlung der von ihm eingeführten doppelperiodischen Functionen 2. und 3. Art. Neben einer ganzen Reihe weiterer der Lehre von den elliptischen Functionen angehöriger Arbeiten, welche theils der Herleitung zahlreicher neuer analytischer Beziehungen dienen, theils Vereinfachungen in der Herleitung schon bekannter liefern, verdienen diejenigen eine ganz besondere Erwähnung, in denen Hermite die Theorie der elliptischen Functionen auf algebraische und zahlentheoretische Probleme anwendet. Die Beschäftigung mit der Transformation der elliptischen Functionen und der damit in engem Zusammenhange stehenden, von Jacobi begründeten Theorie der Modulargleichungen führt ihn zur Auflösung der Gleichung 5. Grades (1858) und weiterhin zu bemerkenswerthen Resultaten über gewisse Gleichungen beliebigen Grades, zugleich aber auch zur Herleitung von Classenanzahl-Relationen für quadratische Formen. Ebendahin gelangt er andererseits auch durch Reihen-Entwickelungen gewisser Theta-Quotienten, und die weitere Verfolgung dieses Weges liefert ihm unter anderen zahlentheorethischen Ergebnissen die zum Theil von Gauss und Legendre auf anderen Wegen gefundenen Sätze über die Darstellung

---

[1]) Unter diesem Titel deutsch von L. Natani, Berlin 1863; ursprünglich als Anhang zu Lacroix, Traité élémentaire du calcul différential et intégral, 6ième éd., 1862.

einer Zahl als Summe von drei oder fünf Quadraten. Weitere Anwendungen der elliptischen Functionen macht er auf die Integration der sog. Lamé'schen und anderer Differential-Gleichungen, sowie auch auf verschiedene mechanische Probleme.

Unter den nicht auf die Theorie der elliptischen oder hyperelliptischen Functionen sich beziehenden analytischen Arbeiten gebührt zweifellos der erste Platz seiner vielgenannten Abhandlung über die Transcendenz der Zahl e (1873). Wusste man auch seit Lionville Zahlenreihen anzugeben, welche transcendente Irrationalitäten definiren, so wird hier zum ersten Male ein bindender Beweis dafür gegeben, dass eine von vornherein definirte, für die gesammte Analysis so fundamentale Zahl, wie jenes e, der Classe der algebraischen Zahlen nicht angehört. Der von Hermite benützte Gedankengang darf zugleich für den späterhin (1882) von Lindemann gelieferten Beweis der Transcendenz von π, also für die Erledigung des naturgemäss weit populärer gewordenen Kreis-Quadraturproblems als bahnbrechend und vorbildlich angesehen werden. Die Theorie der algebraischen Kettenbrüche, welche Hermite als Grundlage bei jener Untersuchung über die Zahl e gedient hatte, verdankt ihm auch weiterhin erhebliche Bereicherungen und Verallgemeinerungen. Er wendet sie auf die Integration gewisser linearer Differential-Gleichungen an und findet neue Beziehungen zur Theorie der Kugel-Funktionen. Aber hiermit sind seine analytischen Leistungen noch keineswegs erschöpft. Eine lange Reihe von Arbeiten behandelt analytische Einzelfragen der mannigfachsten Art: solche aus dem Gebiete der Infinitesimal-Rechnung, der Bernouilli'schen Zahlen, der Gamma-Functionen und Euler'schen Integrale, der Fourier'schen Reihen, der analytischen Functionen. Es giebt wohl kaum eine Frage des analytischen Calcüls, in die er nicht gelegentlich mit seiner schöpferischen Eigenart eingegriffen hätte.

Die Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Functionen ist zu eng mit derjenigen der quadratischen Formen verknüpft, um es nicht geradezu als selbstverständlich erscheinen zu lassen, dass Hermite seit Beginn seiner mathe-

matischen Untersuchungen der Formen-Theorie besonderes Interesse und tiefstes Studium gewidmet hat. Hier setzt die grosse Reihe seiner rein zahlentheoretischen und algebraischen Arbeiten ein, die im übrigen seinen analytischen Leistungen an Bedeutung in keiner Weise nachstehen. Von der arithmetischen Theorie der binären quadratischen Formen steigt er auf zu derjenigen der quadratischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen und der binären Formen beliebigen Grades. Bald schafft er sich mit der Einführung stetiger Variablen in der Zahlentheorie ein neues mächtiges Hülfsmittel und eröffnet neue Perspectiven durch die Betrachtung von Formen mit conjugirt complexen Veränderlichen. Im Zusammenhange mit der Theorie der quadratischen Formen entwickelt er eine neue und verallgemeinerte arithmetische Theorie der Kettenbrüche und der damit zusammenhängenden Annäherungs-Methoden. Durch rein arithmetische ebenfalls auf der Theorie der quadratischen Formen beruhende Betrachtungen beweist er den Sturm'schen Satz über die Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung, wie auch den analogen Cauchy'schen Satz über complexe Wurzeln, und wird durch die Beschäftigung mit diesem Gegenstande auf einen ganz neuen höchst merkwürdigen Satz geführt, wonach sich die Wurzeln gewisser Gleichungen allemal mit Hülfe einer endlichen Anzahl bestimmter Irrationalitäten ausdrücken lassen.

Aber auch die algebraische Theorie der Formen empfing sehr bald durch Hermite's Arbeiten ausserordentliche Förderung. Mit Cayley und Sylvester darf er als gleichwerthiger Begründer der Invarianten-Theorie angesehen werden. Viele der von jenen gewonnenen Resultate hat er gleichzeitig und unabhängig aufgefunden, andere sind im wissenschaftlichen Wechselverkehr entstanden, so dass es kaum möglich erscheint, den Antheil jedes einzelnen mit absoluter Genauigkeit zu bestimmen.

Als Documente seiner Lehrthätigkeit hat uns Hermite den (1873 gedruckten) ersten Theil seines „Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique" und den im Winter 1881/82 an der Faculté des Sciences vorgetragenen „Cours" (autographirt in

4 succesive vermehrten und verbesserten Ausgaben) hinterlassen. Dieselben sind für Hermite's ganze wissenschaftliche Persönlichkeit nicht weniger charakteristisch, als seine selbständigen Arbeiten. Die Erörterung subtiler Principien-Fragen liegt ihm ebenso ferne, wie das Streben nach irgendwelcher Einheitlichkeit der Methode und nach geschlossenem, systematischen Aufbau einer zusammenhängenden Theorie. Es ist die eigenartige Behandlung einer reichen Fülle concreter Probleme, durch die er das Interesse des Lesers zu gewinnen sucht und zu fesseln weiss. In der Originalität der Fragestellung, in der vielseitigen Auswahl und eleganten Beherrschung der zur Lösung herangezogenen analytischen Hülfsmittel zeigt er seine eigentliche Meisterschaft.

Hermite, der bereits im Jahre 1856 in die französische Akademie aufgenommen wurde, gehörte späterhin wohl sämmtlichen Akademien der Erde, seit 1878 auch der unserigen als auswärtiges Mitglied an.

Nils Adolf Erik v. Nordenskiöld.[1])

Am 13. August 1901 ist das correspondirende Mitglied unserer Akademie Nils Adolf Erik Freiherr v. Nordenskiöld auf seinem Landsitze Dalbyö bei Lund unerwartet im 69. Lebensjahre gestorben. Welcher Gebildete hätte nicht den Namen des kühnen Entdeckungsreisenden der arktischen Regionen vernommen und seine wunderbaren Fahrten mit staunendem Interesse verfolgt; aber er wäre nicht im Stande gewesen, trotz allen Muthes und aller Ausdauer, die Kenntnisse von der Gestaltung der Erde in so hohem Grade zu bereichern, der Begründer der heutigen Polarforschung und der Entdecker der nordöstlichen Durchfahrt zu werden, wenn er nicht durch seine naturwissenschaftliche Ausbildung und seine hervorragenden in

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von Dr. Moritz Lindemann in Dresden, Deutsche geographische Blätter 1901 Bd. 24 S. 80 und von Siegmund Günther, naturwissenschaftliche Rundschau, 1902 Jahrg. 17 Nr. 6 S. 75.

der stillen Gelehrtenstube gemachten Forschungen in der Mineralogie, Geologie und Geographie dazu befähigt gewesen wäre.

Aus einer alten schwedischen Familie stammend wurde er am 18. November 1832 in Helsingfors, nach der Einverleibung Finnlands in das russische Reich, geboren, woselbst sein Vater als tüchtiger Mineraloge der Direktor des finnländischen Berg- und Hüttenwesens war. Von früh an hatte er, offenbar durch die Thätigkeit seines Vaters veranlasst, eine Neigung zur Geognosie gefasst. Darum betrieb er auch an der Universität Helsingfors von 1849 an eifrig Studien in der Mathematik, Physik und Chemie, besonders aber in der Mineralogie und Geologie. Noch während seiner Studienzeit hatte er das Glück seinen Vater auf Reisen in dem geologisch so merkwürdigen Finnland und in den mineralreichen Ural zu begleiten, wobei seine mineralogischen und geologischen Kenntnisse durch die unmittelbare Anschauung der Natur sehr erweitert wurden; die Ergebnisse dieser Reisen legte der junge Forscher schon 1857 in mehreren Abhandlungen in den Verhandlungen der finnländischen wissenschaftlichen Gesellschaft nieder.

Vor dem Abschluss seiner Studien zog er sich durch eine freisinnige Rede das Missfallen des russischen Gouverneurs v. Berg zu; er begab sich desshalb an die Universität Berlin, wo er naturwissenschaftliche Vorlesungen hörte und namentlich durch Gustav Rose, den ersten Analytiker seiner Zeit, in die genaue Mineralanalyse eingeführt wurde.

Nach seiner Vaterstadt zurückgekehrt erwarb er (1857) den Doktorgrad; jedoch kam es bald zum abermaligen Bruch mit den russischen Behörden in Folge einer Rede, worauf er für immer Finnland verliess und nach Stockholm ging; er fand daselbst ein angeregtes wissenschaftliches Leben im Umgang mit strebsamen jungen Gelehrten.

Es mögen hier seine mineralogischen Arbeiten, welche ihn in der ersten Zeit seiner wissenschaftlichen Thätigkeit beschäftigten, erwähnt werden. Er hat zahlreiche Mineralien Finnlands und Schwedens chemisch und krystallographisch untersucht und dadurch werthvolle Beiträge zur Kenntniss der dort

vorkommenden seltenen Species geliefert und mehrere neue Mineralien entdeckt; es gehören hierher die Beschreibungen des aus kieselsaurer Yttererde bestehenden Gadolinits von Ytterby, des Selenkupferthallium enthaltenden Crookesit's, des Laxmannits, Demidowits, Thermophyllits, des tantal- und miobsaure Salze mit Uranoxyd führenden Nohlits, des Tantal und Mangan haltigen Tantalits, des merkwürdigen Yttro-Uranmetalls Cleveïts, der Niobite, dann der seltene Erden wie Cerium, Lanthan, Didym, Zirkonium einschliessenden Mineralien, sowie solche mit Wolframsäure, Molybdänsäure, Vanadinsäure und Chromsäure. Eine ausführliche Arbeit ist den Kupferphosphaten von Nischno-Tagilsk gewidmet. Er untersuchte ferner die Beziehungen zwischen Krystallwasser und Krystallgestalt und betheiligte sich an der Lösung der damals viel erörterten Fragen über Iso- und Dimorphismus; auch nahm er schon früh lebhaftes Interesse an der Zusammensetzung der Meteorite, angeregt durch die in Hessla in Schweden und in Grönland gefundenen Eisenmassen meteorischen Ursprungs. Diese werthvollen Mineraluntersuchungen bestimmten den Mineralogen Franz v. Kobell ihn 1876 zur Aufnahme in unsere Akademie vorzuschlagen.

In Stockholm wurde Nordenskiöld von den letzteren Aufgaben bald auf eine ganz andere Bahn, die der naturwissenschaftlichen Erforschung der vereisten Gebiete des hohen Nordens, der Spitzbergen-Inselgruppe und Grönlands, gelenkt. Er war mit Otto Torell in Lund bekannt geworden, der in Schweden das Interesse für die arktische Forschung erweckt hatte; er durfte (1858) Torell bei einer mit geringen Mitteln ausgerüsteten dreimonatlichen Fahrt mit der kleinen norwegischen Jacht „Fritjof“ nach der Bäreninsel und der Westküste von Spitzbergen als Geologe zugleich mit dem Zoologen Quennerstedt begleiten; er bewährte sich bei dieser orientirenden ersten Polarreise der Art, dass er alsbald nach der Rückkehr im Alter von 25 Jahren zum Professor der Chemie und Mineralogie am Carolinischen Institut und zum Vorstand der mineralogischen Sammlung des Reichsmuseums ernannt wurde.

Nach der Bearbeitung seiner geologischen Funde und Beobachtungen folgte (1861) eine zweite mit grösseren Mitteln und mit Unterstützung des Königs, der Regierung und der Akademie angestellten Expedition unter Torell's Führung zugleich mit zahlreichen schwedischen Forschern, welche aus zwei Segelschiffen und sechs Booten bestand. Auf dieser ersten grösseren schwedischen Expedition wurde Spitzbergen zuerst in naturhistorischer Hinsicht näher kennen gelernt.

Bei einer weiteren Polarreise unter Nordenskiölds Leitung nach Spitzbergen (1864) mit dem alten Kriegsschiffe „Axel Tordsen" wurden durch den jungen Astronomen Dunér aus Lund Vorarbeiten für eine Gradmessung gemacht und vom weissen Berge aus, nahe der Ostküste der Hauptinsel Spitzbergens, ein hohes Gebirgsland „Schwedisch Vorland" entdeckt.

In Folge dieser günstigen Aussichten nahm sich nun der Staat sowie die Akademie (1868) der Sache energisch an und liess den stark gebauten Postdampfer „Sofia" für eine neue Reise nach Spitzbergen ausrüsten. Er drang dabei bis 81° 42′ nördlicher Breite vor, weiter als vor ihm ein Forscher, aber das Eis zeigte sich von da an unbezwingbar. Reiche Ausbeute zur Geologie, Physik und Biologie dieser arktischen Regionen wurde von ihm und seinen wissenschaftlichen Mitarbeitern mitgebracht.

Von diesen drei Fahrten nach Spitzbergen stammt grösstentheils unsere gegenwärtige Kenntniss jenes Archipels: von Nordenskiöld rühren die Aufnahmen der geologischen und geophysikalischen Verhebung, der Hebung und Senkung der Küsten, und ein erster Versuch zur Begründung der Klimatologie der Bäreninseln her, während man seinen Begleitern die geographische Ortsbestimmung, die Tiefseeerforschung und die Untersuchung des Thier- und Pflanzenlebens verdankt.

Sein Blick richtete sich nun (1870) auf ein neues und höheres Ziel, nämlich auf die Erschliessung von Grönland, dieses grössten Polarkontinents, wo die zweite deutsche Nordpolfahrt unter Drygalski und dänische Forscher schon vorgearbeitet hatten. Es lag die Frage vor, ob das Inlandseis von

Grönland, von dem man nur einen schmalen Küstensaum kannte und auf dem tiefer ins Innere zu dringen bis dahin nicht gelungen war, passirbar sei. Nordenskiöld kam nach sorgfältiger Vorbereitung mit Dr. Berggren und zwei Grönländern mittelst Schlitten auf dem Binneneise 45 Kilometer weit. Auf der Insel Disko entdeckte er dabei die drei grössten bis jetzt bekannten mächtigen Eisenmassen meteorischen Ursprungs, deren grösste er auf 500 Zentner schätzte.

Bald darauf fasste er den Plan zu einer fünften mit allen Hilfsmitteln sorglich vorbereiteten Reise nach Spitzbergen; er wollte überwintern und dann mit Schlitten auf dem Eise nach dem Pol zu gelangen suchen. Unter Beihilfe des Staates und der Akademie, der Seehandelsstadt Gothenburg und des Grosskaufmanns O. Dickson in Gothenburg erhielt er die Mittel, um zwei Schiffe, den eisernen Postdampfer „Polhene" und die Segelbrig „Gladan" mit zwei Dampfern für Kohle, Proviant, das Ueberwinterungshaus und die Renthiere auszurüsten. Im Juli 1872 ging die Expedition von Tromsö ab und blieb den Winter über an der Mossel- oder Halbmondsbai; leider trat allerlei Missgeschick ein, wodurch der Plan nur unvollkommen zur Ausführung kam, es froren die Transportschiffe vorzeitig ein, so dass der Proviant für 67 statt für 21 Personen ausreichen musste, auch liefen die Renthiere davon. Im Frühjahr 1873 ging es mit Leutnant Polander und 14 Mann über die Parryinseln auf drei Schlitten und zwei Booten gegen Norden nach den Siebeninseln. Von der Phippsinsel, der nördlichsten der Siebeninseln, fand sich bei einer Umschau das Treibeis im Norden der Art, dass es unmöglich erschien einen höheren Breitegrad zu erreichen. Sie fuhren daher über Cap Platen längs der unvollständig bekannten Nordküste des Nordostlandes und dann über das Binneneis des letzteren nach der Mosselbai zurück. Es war ein kühner Zug, durch den man die Ueberzeugung gewann, dass sich der 90. Grad nicht mittelst Schiffen, sondern nur mit Schlitten und Eskimohunden erreichen lasse, wie es später durch Nansen und den Herzog der Abruzzen durchgeführt worden ist.

Die österreichisch-ungarische Expedition von 1872/74 unter Payer und Weyprecht sowie die Nachrichten der Walfischfänger, dass es möglich sei, zu bestimmten Jahreszeiten in das karische Meer einzudringen, lenkten seine Aufmerksamkeit auf die über drei Jahrhunderte alte Aufgabe, einen Schifffahrtsweg im Norden um Europa und Asien nach den ostasiatischen Gewässern, die nordöstliche Durchfahrt, zu finden, welche seit der Angabe K. E. v. Baer's, dass das karische Meer aus undurchdringlichem Eis bestehe, für unmöglich gehalten wurde. Nordenskiöld prüfte auf zwei Fahrten diese Angabe; mit dem kleinen Segler „Proeven" erreichte er (1875) an der nordsibirischen Küste die Jenissei-Mündung und mit dem grösseren Fahrzeug „Ymer" den Dickson's Hafen an der gleichen Flussmündung, wodurch jene Angabe von Baer als irrthümlich erwiesen war.

Diese vorläufige Erkenntniss liess ihn nicht ruhen, er wollte das wichtige Problem der nördlichen Umschiffbarkeit Asiens lösen. Von König Oskar von Schweden, seinem alten Gönner Dickson in Gothenburg und dem sibirischen Bergwerksbesitzer Sibirianoff bekam er die Mittel zur Ausführung des grossen Unternehmens. Es standen der Dampfer „Vega" und zwei Transportdampfer zur Verfügung; die Vega leitete der damalige Kapitänleutnant Palander, den einen Transportdampfer der Kapitän Johannesen; zahlreiche Naturforscher begleiteten die überaus glückliche Fahrt, durch welche er sich den grössten Ruhm erworben hat. Sie gieng am 8. Juli (1878) von Gothenburg aus; die Vega fror aber Ende September unter 67° 5' nördlicher Breite nahe ihrem Ziele in der Koljutschinbai ein und konnte erst im Juli 1879 die Reise durch die Behringsstrasse fortsetzen; anfangs September war das so lange erstrebte Ziel der Umseglung Europas und Asiens mit ihrer Ankunft in Japan gelungen. Die Fahrt erregte überall das grösste Aufsehen; der König von Schweden ehrte Nordenskiöld durch die Erhebung in den Freiherrnstand und der Reichstag bewilligte ihm einen Ehrensold.

Zuletzt trat er (1883), gestützt auf die Erfahrungen bei dem ersten Versuch von 1870, nochmals eine Grönlandfahrt an, um die Durchquerung des Grönländischen Eises zu versuchen und zu entscheiden, ob diese Insel ganz vergletschert sei oder eisfreie Bezirke berge. Auch zu dieser seiner siebenten arktischen Reise erhielt er die Mittel von Dickson und das Schiff „Sofia" durch den König von Schweden; unter den sechs wissenschaftlichen Begleitern befand sich der Botaniker und Paläontologe Professor Nathorst. Der Zug ging über Island nach dem Anleitsivikfjord, von wo die Wanderung über das Binneneis auf Schlitten und Schneeschuhen begann. Sie kamen 120 Kilometer weit in das Innere und fanden eine langsam ansteigende Eisfläche vor. Auf der Rückreise gelang es, das die südliche Ostküste Grönlands umlagernde Treibeis zu durchdringen und diese Ostküste südlich vom Polarkreis zu erreichen, ein Ziel welches man schon seit Jahrhunderten vergeblich zu erreichen versucht hatte. Darnach stellte sich Grönland als ein gewaltiger Eiscontinent dar, so wie ein grosser Theil der Erdoberfläche während der Eiszeit beschaffen war, was später von Nansen durch seine geglückte Durchquerung Grönlands bestätigt wurde.

Nach Abschluss dieser seiner Entdeckungsfahrten widmete sich Nordenskiöld der Bearbeitung des davon mitgebrachten reichlichen wissenschaftlichen Materials, durch welches er die Geologie und die polare Länderkunde wesentlich bereicherte. Die Resultate finden sich in grossen Werken zusammengestellt. Die Vegafahrt ist in einer deutschen Schrift: „Die Umsegelung Europas und Asiens auf der Vega" in zwei Bänden im Allgemeinen beschrieben; das wissenschaftliche Detail in schwedischer Sprache in fünf Bänden berichtet; die letzte Reise nach Grönland in dem Buche: „Grönland, seine Eiswüsten im Innern und seine Ostküste".

Seine Beobachtungen über eine dereinstige höhere Temperatur in der kalten Zone führten ihn zu bestimmten Vorstellungen über die Veränderungen der Wärme in diesen Regionen in

geologischer Vorzeit, sowie über die Eisbildung, welche dazu beigetragen haben unsere Kenntnisse von der Entwicklung der Erde und von der Abgrenzung der einzelnen tellurischen Zeitalter sicherer zu stellen.

Besonders nahmen sein Interesse in Anspruch die merkwürdigen Ansammlungen des eisenhaltigen feinen grauschwarzen Staubes, des Lehmschlammes oder Kryokonits, den man in Spitzbergen antrifft, und den er sogar auf dem ewigen Eise Grönlands in weiter Entfernung vom Strande vorfand; die Staubdecke ist aus diesem Grunde und nach dem Resultate der von ihm gemachten chemischen Untersuchung nicht von zerriebenem Gneis Grönlands abzuleiten; er hält dieselbe vielmehr wie die Meteoriten für kosmischen Ursprungs, entstanden durch Verbrennung der Meteoriten in unserer Atmosphäre.

Von grosser Bedeutung sind seine Studien über das Nordlicht, welche er namentlich während des Winteraufenthaltes im Nothhafen zu Pitlekay anstellte; es bot dorten das Phänomen ganz andere Erscheinungen dar wie in Skandinavien oder Spitzbergen; die geographische Lage des Beobachtungsortes bedingt also eine Verschiedenheit des Anblicks. Er stellte darnach eine besondere Theorie auf: er sagt, man müsse auf der Erde verschiedene concentrische Kreisringe unterscheiden, und man nehme je nachdem man sich in dem einen oder anderen dieser Ringe befinde, einen anderen Typus des Nordlichts wahr, ein strahlenwerfendes oder ein sogenanntes Draperielicht oder nur ein diffus leuchtendes. Der Mittelpunkt der Ringe fällt nach ihm nicht mit dem magnetischen Nordpol zusammen, sondern liegt etwas nördlich von letzterem.

Seine Ermittlungen über die Hebung des Landes in Skandinavien ergaben, dass daselbst überall in der Tiefe von 100 Metern nach Durchdringung der archaeischen Formation Grundwasser sich findet, so dass selbst auf kleinen sonst wasserlosen Felseninseln der Küste Bohrungen zur grossen Wohlthat der Bewohner mit Erfolg angestellt werden können.

In den letzten zwanzig Jahren seines Lebens beschäftigte er sich eifrig mit der Geschichte der Erdkunde, namentlich durch Seefahrten und ihrer Darstellung durch Karten. Es sind wahrhaft grossartige Leistungen an Fleiss und Genauigkeit.

1883 gab er drei Karten zu den Reisen des Venetianers Zeno nach den Far-Öer, Island und Grönland heraus, wobei es sich allerdings nach Storms um ein späteres Machwerk handelte; dann folgte eine neue Ausgabe einer Reisebeschreibung von Marco Polo. 1889 erschien der Facsimile-Atlas mit der Entwicklung der gedruckten Landkarten im 15. und 16. Jahrhundert; 1892 zum 400jährigen Jubiläum der Entdeckung Amerikas die Nachbildung der ältesten Karte von Amerika, und 1897 der wunderbare Periplus mit der Geschichte der Seekarten und Segelanweisungen von ihren Anfängen bis ins 18. Jahrhundert. Diese Werke werden für lange Zeit die Grundlage der Forschung auf dem Gebiete der Kartographie und der geographischen Entdeckungen bilden.

Es war ein an Thaten reiches Leben, die ihm durch seine umfangreichen Kenntnisse, seine unauslöschliche Liebe zur Wissensehaft, durch besonnenes Abwägen des Erreichbaren und sein entschlossenes kühnes Handeln gelangen. Er war weit davon entfernt durch seine Reisen und das Ueberstehen von Gefahren Aufsehen machen zu wollen; auch wollte er sich nicht durch die Polsucherei, die ihm von geringem wissenschaftlichen Werth zu sein schien, einen berühmten Namen machen, ihm war es nur um die Wissenschaft zu thun, welche er auch als Mitglied des schwedischen Reichstages, dem er seit 1869 angehörte, durch Unterstützung ihrer Anforderungen zu fördern suchte. Darum blieb er auch trotz reicher Ehren und Anerkennungen der einfache, die lärmende Oeffentlichkeit scheuende Gelehrte, der ob seiner Verdienste um die Wissenschaft in seinem Vaterlande und in der ganzen gebildeten Welt stets in Ehren gehalten werden wird.

Adolf Fick.

Am 21. August 1901 ist in dem Seebade Blankenberghe, wo er mit seiner Familie die Sommerfrische geniessen wollte, der emeritirte Professor der Physiologie an der Universität Würzburg Adolf Fick im Alter von fast 72 Jahren noch körperlich und geistig rüstig an einer Gehirnblutung unerwartet gestorben. Er gehörte ebenfalls zu den deutschen Physiologen, welche seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts durch physikalische Methodik und Denkweise zum Ausbau der Physiologie im Sinne der mechanischen Anschauung der Lebensvorgänge beigetragen haben; er war von diesen der besten einer.

Adolf Fick wurde am 3. September 1829 zu Kassel geboren, woselbst sein Vater, der aus Bamberg zur Reorganisation des hessischen Strassenbauwesens berufen worden war, Oberbaurath war. Er besuchte zunächst die Schulen seiner Vaterstadt und bezog 1847 die Landes-Universität Marburg. Schon in früher Jugend zeigte sich bei ihm ein besonderes Talent für die Mathematik, welcher er sich auch anfänglich als Lebensberuf zuwenden wollte; auch hatte er sich frühe reiche Kenntnisse in der theoretischen Mechanik erworben. Sein älterer Bruder, welcher später Professor des römischen Rechts an der Universität Zürich war, überredete ihn jedoch sich der Medizin zuzuwenden. In diesem Entschluss mag ihn auch sein Bruder Ludwig Fick bestärkt haben; derselbe war Professor der Anatomie in Marburg und hat sich durch treffliche entwicklungsgeschichtliche Arbeiten einen Namen gemacht. Sein Prosektor war der Privatdozent für Anatomie und Physiologie Carl Ludwig, der später berühmte Physiologe; dieser lebendige und reiche Geist gewann schon damals auf Fick den grössten Einfluss und auch Ludwig hatte die ungewöhnliche, der seinigen verwandten Begabung des Jünglings für die Mechanik erkannt und eine durch das ganze Leben währende Freundschaft mit ihm geschlossen. Im Jahre 1850 bezog er die Universität Berlin, wo er hauptsächlich klinische Studien betrieb, aber auch mit Traube, Du Bois-Reymond und Helmholtz in Be-

ziehungen trat, während er von Johannes Müller, der damals mit vergleichend anatomischen Studien beschäftigt war, keine besondere Anregung empfing. Nach Marburg zurückgekehrt erwarb er 1851 den medizinischen Doktorgrad mit einer bemerkenswerthen Dissertation „tractatus de errore optico“ und trat bei seinem Bruder, dem Anatomen, als Prosektor ein; aber bald (1852) forderte ihn Ludwig, der als Professor der Anatomie und Physiologie nach Zürich berufen worden war, auf, zu ihm als Prosektor zu kommen. Ludwig war damals mit seinen ersten bahnbrechenden Arbeiten beschäftigt, welche die Vorgänge im Organismus auf physikalische Wirkungen zurückzuführen suchten; von ihm wurde er vorzüglich bestimmt, seine mathematischen und physikalischen Kenntnisse zur Erforschung der Lebensvorgänge anzuwenden und erhielt er die Richtung seiner wissenschaftlichen Forschung. Es erfolgte die Habilitation als Privatdozent in Zürich; als Ludwig an das Josefinum nach Wien gieng und Jacob Moleschott aus Heidelberg das von der Anatomie abgetrennte Ordinariat für Physiologie erhielt, bekam (1856) Fick den Titel eines ausserordentlichen Professors für anatomische und physiologische Hilfswissenschaften, und 1862 nach der Uebersiedlung Moleschott's nach Turin übertrug man dem 33 jährigen Fick, der sich durch mehrere ausgezeichnete Arbeiten als vielversprechender Physiologe erwiesen hatte, die Professur der Physiologie. Die 16 Jahre seiner Thätigkeit in Zürich waren eine schaffensfrohe Zeit, in der er mit einer Anzahl ausgezeichneter junger Naturforscher verbunden war und an die er sich stets mit Vorliebe erinnerte.

Nach dem frühen Tode von Albert v. Bezold erhielt Fick (1868) einen ehrenvollen Ruf nach Würzburg, wo er als ein äusserst geschätzter Lehrer und angesehener Forscher 31 Jahre lang segensreich wirkte; eine Anzahl von Schülern hat er dorten durch sein Beispiel zu wissenschaftlichem Schaffen angeregt. Im Jahre 1899 trat er mit vollendetem 70. Lebensjahre noch in vollster Kraft des Körpers und Geistes von seinem Lehramt zurück, da er die Anschauung hatte, dass eine Weiterführung desselben über diese Zeit hinaus nicht mehr erspriesslich sei und man jungen Kräften Platz machen müsse.

Seine Arbeiten zeichnen sich aus durch grosses Wissen und einen scharfen kritischen Verstand. Schon als Student veröffentlichte Fick (1850) seine von ihm gleich bei Beginn der Universitätsstudien in Angriff genommene wissenschaftliche Untersuchung: „statische Betrachtungen der Muskulatur des Oberschenkels“ (mit einem Vorwort von C. Ludwig), in der er die mechanischen Verhältnisse der Hüftgelenksmuskeln analysirte, indem er für jeden Muskel des Oberschenkels die ihm äquivalente Resultante substituirte und die Drehungsmomente der in Betracht kommenden zwanzig Muskeln in Bezug auf drei durch den Hüftgelenksmittelpunkt gelegte Achsen bestimmte. Später hat er sich noch mehrmals mit Problemen der Mechanik des menschlichen Körpers beschäftigt: in einer Abhandlung über die Gelenke mit sattelförmigen Flächen (1854), dann in einer grundlegenden Darstellung der Muskelstatik und der Geometrie der Gelenke in seiner medizinischen Physik und in den Studien über die complizirten Bewegungen des menschlichen Augapfels durch seine sechs Muskeln, wobei er nach Ermittlung der Drehungsachsen und der Momente der Muskeln die Betheiligung der letzteren an der Ausführung bestimmter Bewegungen darthat sowie den Drehpunkt im Auge feststellte.

Zu seinen ersten Arbeiten gehören die über die Hydrodiffusion und Endosnose (1855), welche im Anschluss an die im Ludwig'schen Laboratorium zur Erklärung der Resorption und des Austauschs der Stoffe im Körper angestellten Versuche gemacht wurden. Er erfand dabei ein höchst sinnreiches Verfahren, um den Ablauf der Diffusion näher zu verfolgen, indem er in die diffundirende Flüssigkeit verschieden schwere Glaskugeln einsenkte, welche je nach ihrem Gewicht in verschiedenen Höhen schwammen, woraus er dann das specifische Gewicht der Lösung von Schicht zu Schicht erhielt. Er stellte dadurch sein Gesetz fest, dass die aus einer Schicht in eine andere in einem Zeitelemente übergehende Salzmenge dem Flächeninhalt und dem Concentrationsunterschied proportional ist.

Seine Kenntnisse in der Mechanik führten ihn naturgemäss zu dem Studium der einer mathematischen Behandlung am

zugänglichsten erscheinenden Vorgänge bei der Muskelzusammenziehung, denen seine zahlreichsten und wichtigsten Arbeiten gewidmet sind; er hat dadurch über das Wesen der Muskelcontraktion mehr als irgend ein anderer Aufklärung gebracht und sich ein ehrenvolles Andenken in der Geschichte der Wissenschaft gesichert. In einer Abhandlung (1860) über die Längenverhältnisse der Skelettmuskeln zeigte es sich durch Messungen, dass die ein Gelenk bewegenden Muskeln eine von der durchschnittlichen Beanspruchung abhängige Längenentwicklung aufweisen, indem eine Dickenzunahme eintritt, wenn die Kraft, mit der sie gespannt werden, häufig eine grosse ist, dagegen Längenzunahme, wenn häufig Spannungen durch grosse Wegstrecken hindurch ausgeübt werden. Durch seine Reizversuche an dem glatten Schliessmuskel der Muschel (1860) sowie durch seine Beiträge zur vergleichenden Physiologie der irritabeln Substanzen (1863) betrat er mit Glück das Gebiet der allgemeinen Physiologie: er fand, dass bei diesen Muskeln nicht die Geschwindigkeit der Aenderung der elektrischen Stromdichte für die Erregung maassgebend ist wie bei den quergestreiften Muskeln, sondern vielmehr die Dauer des Reizstroms und dass Induktionsströme wegen ihrer kurzen Dauer nur bei grosser Intensität wirksam sind. In den Untersuchungen über die Muskelarbeit (1867) gab er eine Analyse der mechanischen Leistung des tetanisirten Muskels; als die günstigste Arbeitsweise erwies sich die Muskelcontraktion mit zunehmender Entlastung, was auch bei dem Gebrauch unserer Muskeln eine wichtige Rolle spielt. Er prüfte die Abhängigkeit der Muskelarbeit von der Reizstärke und lieferte den experimentellen Beweis für die Giltigkeit des Satzes von der Erhaltung der Kraft bei der Muskelzusammenziehung.

Von der grössten Tragweite war die scharfe Unterscheidung der isometrischen und isotonischen Zuckung, wobei er einerseits bei verschiedener Spannung die Länge des Muskels und andererseits bei verschiedener Länge die Spannung desselben unverändert liess. — Trotz den grundlegenden Untersuchungen von Ed. Weber und Helmholtz war die Kenntniss

der von den Muskeln bei der Zusammenziehung jeweils entwickelten Spannungen doch noch sehr unvollkommen; Fick griff die Sache wieder auf und verfolgte die Abhängigkeit des Contraktionsverlaufes von der Spannung genauer, namentlich in seinem Buche: „Mechanische Arbeit und Wärmeentwicklung bei der Muskelarbeit“ (1882); der jeweilige Zustand des Muskels ist darnach nicht nur eine Funktion seiner Länge und der seit der Erregung verstrichenen Zeit, sondern auch eine Funktion der Spannungsänderung. Er prüfte auch die Verkürzung des Muskels bei der Wärmestarre, welcher Vorgang in manchen Stücken viele Aehnlichkeit mit der Contraktion besitzt. — Er vervollkommnete ausserdem die Methode zum Aufzeichnen der Muskelcontraktion, besonders durch sein Pendelmyographion; auch gab er zur Messung der von dem Muskel in längerer Zeit geleisteten Arbeit den Arbeitssammler an, der die Arbeit einer Reihe von Zuckungen aufspeichert. — Viel beschäftigte ihn die Frage nach der von Helmholtz zuerst nachgewiesenen Wärmeentwicklung bei der Muskelcontraktion, aus der er die Zersetzungsgrösse im arbeitenden Muskel zu entnehmen suchte. Er erfand dafür neue, sehr feine thermoelektrische Vorrichtungen, mit denen es ihm gelang auch die absolute beim Tetanus entwickelte Wärmemenge annähernd zu bestimmen. Es wurde die Wärmeentwicklung unter verschiedenen Einflüssen untersucht z. B. bei wechselnden Temperaturen des Muskels, wobei sich zeigte, dass bei höherer Temperatur des Muskels die Wärmebildung in ihm bei gleicher Zuckungshöhe eine grössere ist. Der ohne äusseren Nutzeffekt zuckende Muskel giebt, entsprechend dem Gesetz der Erhaltung der Energie, mehr Wärme nach aussen ab als der arbeitende Muskel. Besonders wichtig ist der Nachweis (1894), dass selbst der Stoffumsatz im tetanisirten Muskel von seiner Spannung abhängig ist; denn bei gehemmter Contraktion im isometrischen Zustand wächst die Wärmeentwicklung mit wachsender Reizstärke rascher als die Spannung, so dass also zur Erhaltung einer grösseren Spannung relativ mehr Kraft aufgewendet werden muss als zur Erhaltung einer geringeren Spannung.

Der Vergleich der gebildeten Wärme mit der geleisteten Arbeit stellt sich beim Muskel günstiger als bei guten Dampfmaschinen; während der Nutzeffekt der letzteren 5 bis höchstens 12 % beträgt, ist der des ersteren 20 bis 25 %. Fick sprach darauf hin, gestützt auf den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, den prinzipiell ungemein wichtigen Satz aus, dass die durch die Stoffzersetzungen im Muskel entstehende kinetische Energie nicht zuerst in Wärmebewegung umgewandelt wird und diese dann erst die Muskelcontraktion bedingt, sondern dass vielmehr die bei der Zersetzung frei werdende chemische Energie direkt in mechanische übergeht oder mit anderen Worten, dass der Muskel keine thermodynamische Maschine ist wie eine Dampfmaschine. Er wendet sich dabei auch gegen Engelmann's Erklärung des Contraktionsvorgangs als einer Quellung der anisotropen Substanz und gegen andere mögliche Erklärungsarten, weil sie im Widerspruch stehen mit dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. —

Weiterhin wurde von Fick die Lehre von der Herz- und Blutbewegung durch viele bedeutsame Thatsachen bereichert. Er war der Erste, welcher die Grösse der Herzarbeit aus dem von ihm gemessenen Gewicht und der Höhe des bei jeder Systole gehobenen Blutes berechnete. Aus der Beobachtung, dass das in Zickzackabschnitte getheilte Froschherz noch ganz normale Zusammenziehungen macht, erschloss er die Fortpflanzung der Erregungsleitung und Contraktion von Muskelzelle zu Muskelzelle. Die Kritik der gebräuchlichen Quecksilbermanometer zur Aufzeichnung der Schwankungen des Blutdrucks, welche durch die Trägheit der zu bewegenden Masse mannigfache Fehler zeigen, führte ihn zur Erfindung anderer Wellenzeichner, besonders der nur in geringem Grade Eigenschwingungen zeigenden Membran-Manometer, welche jetzt in verschiedener Form zu wissenschaftlichen Zwecken fast ausschliesslich angewendet werden. Er beobachtete mit denselben die Erscheinung des Dikrotismus, dann die Blutdruckschwankungen an mehreren Arterien zu gleicher Zeit, sowie in der Aorta und in der Herzkammer, und zog wichtige Schlüsse

daraus. Er suchte ferner die damals nicht direkt darstellbaren periodischen Geschwindigkeitsänderungen im arteriellen Blutstrom oder die Geschwindigkeitskurve aus der Volumkurve des Arms abzuleiten; er brachte den Arm in ein cylindrisches mit Wasser gefülltes Gefäss und beobachtete an einem damit verbundenen Manometer Schwankungen der Wassersäule, hervorgerufen durch die Volumänderungen des Arms in Folge der wechselnden Füllung der Blutgefässe bei jedem Herzschlag. Aus dieser Volumkurve leitete er eine neue Kurve ab, deren Ordinaten angeben, um wie viel die arterielle Blutgeschwindigkeit jeweils grösser oder kleiner ist als die constante venöse. Auch benützte er die Unterschiede zwischen Druckkurve und Geschwindigkeitskurve zur Feststellung der Richtung des Ablaufs der Pulswellen, und that dar, dass in der Aorta bis zu den Capillaren nur ein sehr unbedeutendes Gefälle des Blutdrucks sich findet und dass letzterer in den Capillaren nur wenig abnimmt, dagegen am Anfang der Venen rasch sinkt. Die Volummessungen am Arm hat später Mosso weiter verfolgt und daraus seine berühmt gewordenen plethysmographischen Beobachtungen gestaltet; namentlich erregte die Vergrösserung des Armvolums beim Schlafe und die Verminderung bei der Hirnthätigkeit das grösste Aufsehen, führte jedoch nicht zu den Aufschlüssen, welche man im ersten Augenblick davon erwartet hatte.

Interessante Untersuchungen liegen von ihm vor über elektrische Nervenreizung (1864); im Anschlusse an die vorher erwähnten Funde beim Schliessmuskel der Muschel erkannte er, dass die Grösse der Zuckung nicht allein von der Dichtigkeitsschwankung in der Zeiteinheit abhängig ist, wie es das Gesetz von Du Bois-Reymond aussagt, sondern auch von der Zeit während der der Strom nach dem Schluss andauert, und bei der Oeffnung von der Zeit während der der Strom vorher den Nerven durchfloss; es ist demnach eine gewisse Zeit zur Bewegung der Nerventheilchen nöthig und er setzte als Grenzwerth die Zeit von 0.0015 Sekunden fest. Kurz dauernde elektrische Ströme müssen stärker sein, wenn sie den Nerven reizen sollen als solche von längerer Dauer. Er fand die ver-

schiedene Erregbarkeit funktionell verschiedener Nerven; ferner dass die Fasern des Rückenmarks direkt erregbar sind, was Manche geleugnet hatten.

Ueber die Physiologie des Sehens liegen von ihm wichtige Beobachtungen vor. Er war es, der zuerst, schon in seiner erwähnten Dissertation Tractatus de errore optico, die ungleiche Deutlichkeit vertikaler und horizontaler Linien erkannte und von einer verschiedenen Krümmung der Hornhautmeridiane ableitete; aus dieser seine feine Beobachtungsgabe darthuenden Erscheinung entwickelte sich namentlich durch Donders die für die Augenheilkunde so bedeutungsvolle Lehre vom Astigmatismus. — Indem er auf die Vorderfläche der Linse einer Camera obscura Oeltropfen brachte, wodurch äussere leuchtende Punkte oder Linien bei ungenauer Einstellung im Bilde doppelt und vielfach erscheinen, erklärte er das bis dahin räthselhafte Doppelt- und Mehrfachsehen mit einem Auge oder die Diskontinuität der Zerstreuungsbilder durch Unregelmässigkeiten in den brechenden Medien des Auges. — Er gab (1888) ein brauchbares Instrument an, um den Druck im Auge des lebenden Menschen zu bestimmen, das Ophthalmo-Tonometer. — Eine Scheibe mit einem weissen und schwarzen Sektor giebt nach Fick bei rascher Drehung nicht eine mittlere Helligkeit, wie Helmholtz glaubte, sie erscheint vielmehr heller durch das Uebergewicht der intermittirenden Reize. — Sehr schön ist die Beobachtung, dass wenn man einen einzelnen farbigen Punkt in gewisser Entfernung nicht mehr als farbig erkennt, die Farbe wieder erscheint, sobald mehrere farbige Punkte zu gleicher Zeit dargeboten werden. — Seine Beiträge zum zeitlichen Verlauf der Netzhauterregung haben werthvolle Aufklärung gebracht. — Die Erklärung der Farbenempfindungen und die Theorie der Farbenblindheit haben ihn mehrmals zu Untersuchungen und Spekulationen angelockt; er war ein eifriger Verfechter der so einfachen Young'schen Farbentheorie und er konnte sich namentlich nicht mit der von Hering aufgestellten Anschauung von der Assimilation und Dissimilation befreunden.

Er stellte auch Betrachtungen über den Mechanismus der Bewegung und der Resonanz des Trommelfelles mit Hilfe des Phonautographen an.

In den experimentellen Beiträgen zur Physiologie des Tastsinns suchte er darzuthun, dass die Druck- und Temperatur-Empfindung von der Haut nur Modifikationen ein und derselben Sinnesempfindung sind, denn man vermag, wie er nachwies, nicht zu unterscheiden, ob eine leise Berührung einer Hautstelle erfolgt ist oder ob ein warmer Körper derselben genähert wird.

Den chemischen Vorgängen im Körper wendete Fick nur in einzelnen Fällen seine Aufmerksamkeit zu. So sind von ihm über die Wirkung der Verdauungsfermente, des Pepsins und des Labs einige Beobachtungen gemacht worden. Aber ein von ihm mit dem Chemiker Joh. Wislicenus (1865) angestellter Versuch über die Entstehung der Muskelkraft hat viel Aufsehen erregt und war von prinzipieller Bedeutung. Ich hatte, entgegen der Lehre Liebig's, nach der bei der Arbeit die eiweisshaltige Muskelsubstanz zerstört werden und die Kraft für erstere liefern soll, die Entdeckung gemacht, dass bei starker Muskelarbeit im Körper des Hundes und des Menschen nicht mehr Eiweiss zersetzt wird als bei möglichster Ruhe, wohl aber mehr Fett. Fick bezweifelte es, dass die wärmeliefernden stickstofffreien Stoffe sich nicht an der Arbeit betheiligen sollten und lud seinen Freund Wislicenus zu einem gemeinsamen, wohl ausgedachten Versuch hierüber ein. Sie bestiegen nüchtern das Faulhorn und bestimmten aus der Stickstoffausscheidung im Harn das während der Besteigung des hohen Berges in Zerfall gerathene Eiweiss; die Menge desselben war nun nach seiner Verbrennungswärme nicht im Stande die kinetische Energie zu liefern, um das Gewicht des Körpers auf die Höhe des Berges zu erheben, so dass also die stickstofffreien Stoffe sich bei der Arbeitsleistung betheiliget haben müssen. Man hätte dies wohl schon aus meinen Untersuchungen am hungernden arbeitenden Hunde entnehmen können; aber durch die schönen Bestimmungen und Darlegungen von

Fick und Wislicenus wurde doch dieser Satz zuerst bestimmt erwiesen und ausgesprochen. Später wurde durch Versuche in meinem Laboratorium strengstens dargethan, dass sowohl das Eiweiss als auch die stickstofffreien Stoffe bei ihrer Zersetzung im Körper die Kraft zur Arbeit liefern. Im Uebrigen würdigte Fick nicht gehörig die Errungenschaften in der Lehre vom allgemeinen Stoffwechsel und der Ernährung, dieses grossen und wichtigen Theils der Physiologie, wie auch so manche andere Physiologen, welche keine Erfahrungen in dieser Richtung gemacht haben. Seine Veröffentlichungen über das Pepton und seine Schicksale in der Blutbahn, über den Eiweissstoffwechsel, über die Bedeutung des Eiweisses und Fettes in der Nahrung etc. etc. stützen sich grösstentheils nicht auf eigene Arbeiten, sondern bringen nur gelegentliche Gedanken über diese Vorgänge.

Wir verdanken Fick auch eine Anzahl trefflicher Lehrbücher, die sich durch ungemein klare und fassliche Darstellung auszeichnen; besonders ist hier zu nennen die medizinische Physik, welche er (1856) in seinem 27. Lebensjahre schrieb und die erste einheitliche Darstellung der Lehren der Physik in ihrer Anwendung auf die Physiologie brachte, sowie das Lehrbuch der Anatomie und Physiologie der Sinnesorgane (1862).

Fick begnügte sich jedoch nicht mit rein physiologischen Aufgaben; seine Veranlagung und seine Kenntnisse in der Mathematik und Physik führten ihn zur Betrachtung allgemeiner Fragen der Mechanik und erkenntnisstheoretischer Probleme. Es gehören hierher seine Schriften: über die der Mechanik zu Grunde liegenden Anschauungen, über das Prinzip der Zerstreuung der Energie, der Versuch einer physischen Deutung der kritischen Geschwindigkeit in Weber's Gesetz, über den Druck im Innern von Flüssigkeiten, Ursache und Wirkung, die Naturkräfte in ihrer Wechselwirkung, das Grössengebiet der vier Rechnungsarten, das Weltall als Vorstellung, philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit, die stetige Raumerfüllung durch Masse.

In diesem Streben nahm er das lebhafteste Interesse an

allen Zweigen menschlichen Wissens. Er suchte nicht nur durch emsige Arbeit die Kenntnisse in der Naturwissenschaft zu fördern, er war auch bestrebt das Errungene anzuwenden zum Wohle der Menschheit in körperlicher und sittlicher Beziehung. Von wahrhaft idealer Gesinnung und von reinster Gesittung und Lauterkeit des Charakters suchte er seinen Idealen nachzukommen und Opfer für sie zu bringen; stets bekannte er offen seine Ueberzeugung und trat furchtlos ein für das, was er für wahr und gut hielt, auch wenn es den Anschauungen der Mehrheit widersprach.

Er betheiligte sich thatkräftig an den Fragen der Erziehung in den Schulen und an den Angelegenheiten des Volkswohles. Durch seine Vorliebe für die Naturwissenschaften und ihre grossen Erfolge war er überzeugt, dass diese jüngste Tochter menschlichen Wissens auch besonders geeignet sei den Geist auszubilden; er schloss sich daher mit Feuereifer der Bewegung an, welche den Realgymnasien mit naturwissenschaftlicher Vorbildung den Zutritt zu den Studien an der Universität, namentlich der Medizin, gewähren sollte. Er war der Meinung, die humanistischen Gymnasien bereiteten ihre Zöglinge nicht so weit vor, um die Naturwissenschaften und die Medizin auf der Universität gehörig zu erfassen. Ob dies die Abiturienten des Realgymnasiums thun und besser denken gelernt haben, das muss die Zeit lehren.

Fick war bekanntlich einer der heftigsten Gegner des Alkohols, der ihm kein Bedürfniss für den Menschen zu sein schien und in dem er wie so viele andere eine grosse Gefahr für das Volkswohl erblickte; er bekämpfte daher die unsinnigen Trinksitten in unserem Vaterlande und verpflichtete sich zu völliger Abstinenz.

Das was der edle Mann und bedeutende Gelehrte gesäet, wird noch über sein Leben hinaus reiche Früchte tragen.

Alexander Kowalewski.

(Die Daten zu diesem Nekrologe habe ich von Herrn Collegen Richard Hertwig erhalten.)

Alexander Kowalewski wurde am 7./19. November 1840 auf dem Gute Workowo (Bezirk Dünaburg) geboren. Den Elementarunterricht erhielt er in seinem Elternhause, 1856 besuchte er die Ingenieurschule, 1859 die Universität in Petersburg, wo er Naturwissenschaften studirte. Im Herbst 1860 setzte er seine Studien in Heidelberg fort, wo er bei Bunsen, Carius und Bronn arbeitete. Von Heidelberg ging er 1861 nach Tübingen, um hier Leydig, Mohl, Luschka und Quenstedt zu hören. 1862 nach Petersburg zurückgekehrt, bestand er sein erstes Examen. Die zwei folgenden Jahre verlebte er mit selbständigen zoologischen Arbeiten beschäftigt abermals im Ausland, zum Theil an den Küsten des Mittelmeers. 1865 erlangte er auf Grund seiner Arbeit über die Entwicklung des Amphioxus lanceolatus die Würde eines Magisters der Zoologie, zwei Jahre später auf Grund seiner Dissertation über die Entwicklung von Phoronis die Doktorwürde. Im Jahre 1866 zum Custos der zoologischen Sammlung und Privatdocenten an der Universität Petersburg ernannt las er hauptsächlich über vergleichende Anatomie; doch wurde er schon 1868 als ausserordentlicher Professor der Zoologie nach Kasan, ein Jahr später als ordentlicher Professor nach Kiew berufen. 1870 machte er behufs Untersuchungen über die Entwicklung der Brachiopoden und zum Zwecke von Sammlungen eine Reise an das rothe Meer und nach Algier. In den Jahren 1873—1887 war Kowalewski Professor der Zoologie in Odessa, von da ab bis zu seinem Lebensende an der Akademie in St. Petersburg, wo er am 22. November 1901 starb.

In Kowalewski's wissenschaftlicher Thätigkeit kann man zwei Perioden unterscheiden. In den ersten 20 Jahren beschäftigte er sich hauptsächlich mit Studien über vergleichende Entwicklungsgeschichte. Er untersuchte zuerst die Entwicklung des merkwürdigen Amphioxus und der Tunicaten, dann die

von Phoronis, Sagitta, Balanoglossus, den Brachiopoden, Insecten und Ringelwürmern, den Korallen und Mollusken. Abgesehen von vielen einzelnen wichtigen Ergebnissen haben diese Untersuchungen das bedeutungsvolle Gesammtresultat gefördert, dass die Keimblättertheorie und demgemäss die Unterscheidung von Entoderm, Ektoderm und Mesoderm, welche viele Zoologen und Embryologen auf die Wirbelthiere beschränkt wissen wollten, auch für die wirbellosen Thiere Geltung besitze. Abgesehen von Baer's berühmter Entwicklungsgeschichte des Hühnchens und von Haeckel's Gasträatheorie haben keine Arbeiten auf den Fortgang der vergleichenden Entwicklungsgeschichte einen so nachhaltigen Einfluss ausgeübt wie die Arbeiten Kowalewski's. Früher als die meisten anderen Zoologen bediente er sich dabei der Methode dünner Querschnitte. Es ist ein Zeugniss seiner aussergewöhnlichen Beobachtungsgabe, dass trotzdem die Schnittmethoden damals noch sehr mangelhaft waren, er mit ihnen ausgezeichnete Resultate zu erzielen wusste.

Von den genannten entwicklungsgeschichtlichen Untersuchungen erregte (1866—1867) das grösste Aufsehen nicht nur in den Kreisen der Zoologen, sondern bei allen, die sich für die damals in den Vordergrund gestellte Descendenztheorie interessirten, diejenigen welche die Entwicklung der Ascidien und des Amphioxus behandelten, indem sie zum ersten Male in überraschender Weise darthaten, dass unter allen wirbellosen Thieren die Tunicaten den Wirbelthieren am nächsten stehen. Kowalewski wies in ihnen nach, dass zwischen beiderlei in ihrer äusseren Erscheinungsweise so grundverschiedenen Thiergruppen eine ganz überraschende Uebereinstimmung in der Entwicklungsgeschichte besteht, und er machte bei Ausdehnung seiner Untersuchungen auf die niedersten Fische, die Haie, drei weitere fundamentale Entdeckungen: erstens dass sich bei den Ascidien in gleicher Weise wie beim Amphioxus das Nervensystem als Neuralrohr auf dem Wege der Faltung bildet und dieses Neuralrohr durch den Canalis neurentericus vorübergehend mit dem Darmrohr communicirt, zweitens dass auch die Ascidien ein axiales Skelet in der Chorda dorsalis

besitzen, welche im Gegensatz zu der herrschenden Anschauungsweise nicht aus dem Mesoderm, sondern aus dem Entoderm sich entwickelt, und drittens beim Amphioxus die Leibeshöhle durch Divertikelbildung vom Urdarm entsteht, wobei zugleich das Mesoderm oder mittlere Keimblatt als Abkömmling des Entoderms gebildet wird, ein Vorgang der von ihm in gleicher Weise für Sagitta und die Brachiopode Argiope bewiesen wurde.

Den genannten Untersuchungen über die Entwicklung aus dem Ei schloss Kowalewski weitere Arbeiten über die Knospungsvorgänge der Tunicaten an. Dabei ergab sich das unerwartete, inzwischen aber anderweitig bestätigte Resultat, dass die Organe sich nicht nach gleichem Princip wie bei der Entwicklung aus dem Ei anlegen, dass z. B. Organe, welche bei der Embryonalentwicklung vom Ektoderm gebildet werden, bei der Knospung vom Entoderm aus entstehen.

In den letzten Jahrzehnten seines Lebens wandte sich Kowalewski mehr physiologischen Fragen und der experimentellen Zoologie zu. Die Erfahrung, dass gewisse Farbstoffe wie Indigcarmin und carminsaures Ammoniak durch die Nieren ausgeschieden werden, benutzte er um mit Hilfe derselben die excretorischen Organe wirbelloser Thiere aufzufinden. Mittelst Einspritzung von Tournesol-Blau ermittelte er die Acidität und Alkalescenz der verschiedenen Darmabschnitte. Auch mit der Verbreitung lymphoider Organe bei Wirbellosen (Scorpionen, Muscidenlarven, Polychaeton) beschäftigte er sich eingehend. Er benutzte hierbei die von Mecznikow zuerst beobachtete Phagocytose der Leucocyten, indem er fein vertheilte Sepia oder Bakterien dem Thiere einspritzte.

Mit der Anatomie der Thiere hat sich Kowalewski nur wenig befasst. Immerhin hat er auch auf diesem Gebiet Vortreffliches geleistet. Besonders sind vier Arbeiten nach dieser Richtung zu erwähnen. Am rothen Meer entdeckte nnd anatomirte Kowalewski die Coeloplana Mecznikowi, welche von vielen Forschern als eine Mittelform zwischen Ctenophoren und Turbellarien gedeutet wird. Nachdem man lange Zeit vergeblich das Männchen der Gephyree Bonellia viridis gesucht

hatte, fand er es endlich als einen wenige Millimeter grossen, hochgradig rückgebildeten, in seiner Erscheinung an Turbellarien erinnernden Wurm im Oesophagus des bis zu ½ Meter grossen Weibchens. Grundlegend waren ferner seine Untersuchungen über den Balanoglossus. In der Neuzeit endlich fand Kowalewski wichtige Uebergangsformen zwischen Hirudineen und Oligochaeten in der auf Fischen schmarotzenden Acanthobdella peledina, welche den hermaphroditen Geschlechtsapparat und die Saugnäpfe der Hirudineen besitzt, gleichzeitig aber auch die beiden Blutgefässe, die Borsten und die von Septen abgetheilte Leibeshöhle der Chaetopoden.

Die vielseitigen Verdienste, welche sich Kowalewski erworben hat, haben ihm rasche Anerkennung eingetragen. Nicht nur in seinem Vaterland, sondern auch ausserhalb Russlands erblickte man in ihm den hervorragendsten der russischen Zoologen. Er war Mitglied einer grossen Zahl wissenschaftlicher Akademien. Unserer Akademie gehörte er seit dem Jahre 1895 an.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 8. November 1902.

1. Herr Alfred Pringsheim bringt als Nachtrag zu dem in der Junisitzung d. Js. vorgelegten Aufsatze eine zweite Mittheilung „Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen."

2. Herr Joh. Rückert legt einen von dem Professor an dem hiesigen zahnärztlichen Institut Dr. Otto Walkhoff erstatteten Bericht über die Ergebnisse seiner mit Unterstützung der Akademie gemachten Studienreise zur Untersuchung der Struktur diluvialer menschlicher Skeletttheile vor und bespricht dieselben.

3. Herr August Rothpletz hält einen Vortrag: „Ueber die Möglichkeit den Gegensatz zwischen der Contraktions- und Expansions-Theorie aufzuheben."

4. Herr W. C. Röntgen überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. August Schmauss „Ueber die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien."

5. Herr K. A. v. Zittel legt vor:

a) den Bericht über eine von den Privatdozenten Dr. Max Blankenhorn und Dr. Ernst Stromer von Reichenbach mit Unterstützung der Akademie ausgeführten Reise nach Aegypten; Einleitung von Emil Stromer von Reichenbach;

b) Geologisch-stratigraphische Beobachtungen aus Aegypten von Dr. Max Blankenhorn.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 163—192 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

Der in dem oben citirten Aufsatze mitgetheilte elementare Beweis für die Poincaré-Hadamard'schen Sätze über den Zusammenhang zwischen dem infinitären Verhalten gewisser ganzer transcendenter Functionen und demjenigen ihrer Coefficienten gestattet noch eine merkliche Vereinfachung. Herr Lüroth hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass der auf die Voraussetzung $\sum C_\nu r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r}$ sich beziehende Theil des Hauptsatzes § 1 und zwar zunächst in der Form, welche a. a. O. in dem Zusatze unter (12^b) angegeben wird, ganz unmittelbar aus einer allgemeinen Bemerkung über Potenzreihen mit reellen Gliedern resultirt. Macht man nun aber von dieser Vereinfachung Gebrauch, so erscheint es angemessen, auch denjenigen Theil des Beweises, der sich auf die Voraussetzung $\sum c_\nu r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma r}$ bezw. $< A \cdot e^{\gamma r^a}$ bezieht, entsprechend umzugestalten. Während nämlich bei der a. a. O. von mir benützten Methode die zur Behandlung der C_ν erforderlichen Hülfsmittel auch die entsprechenden Resultate für die c_ν lieferten und mir in Folge dessen eine vollkommene symmetrische Behandlung der beiden in Betracht kommenden Voraussetzungen am Platze schien, so hört diese Möglichkeit auf, wenn man bezüglich der C_ν den von Herrn Lüroth angegebenen kürzeren Weg einschlägt. Alsdann erweist es sich

aber als zweckmässiger, den Fall der c_ν mit Hülfe der schon von Herrn Hadamard[1]) benützten Schlussweise zu behandeln: man gewinnt dabei zugleich den Vortheil, von vornherein mit beliebigen complexen c_ν und der Voraussetzung $|\sum c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma^a \cdot |x|}$ operiren zu können.[2]) Für die C_ν ist dies ohnehin der Fall, da ja die Voraussetzung $|\sum C_\nu x^\nu| \geqq A \cdot e^{\gamma^a \cdot |x|}$ allemal a fortiori die folgende: $\sum |C_\nu| \cdot r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma^a \cdot r}$ nach sich zieht.

Hiernach ergiebt sich nun für den Gesammtbeweis des a. a. O. p. 187 formulirten Haupt-Resultates die folgende ausserordentlich kurze und elementare Darstellung.

---

§ 1.

Hauptsatz A. *Ist für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt:*

$$\text{(A)} \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu\right| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^a} \qquad (A > 0,\ \gamma > 0,\ a > 0),$$

so hat man:

$$\text{(a)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot |c_\nu|} \leqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Beweis. Aus (A) folgt auf Grund des Cauchy'schen Coefficientensatzes, dass:

$$|c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^a} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ |x| > R).$$

Setzt man:

$$|x| = \left(\frac{\nu}{a\gamma}\right)^{\frac{1}{a}} > R, \quad \text{also: } \nu > a\gamma \cdot R^a,$$

so wird:

---

[1]) Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 183.

[2]) Man erspart auf diese Weise die auf p. 186 meines Aufsatzes angestellte Betrachtung.

$$|c_\nu| \cdot \left(\frac{\nu}{a\gamma}\right)^{\frac{\nu}{a}} \leqq A \cdot e^{\frac{\nu}{a}},$$

anders geschrieben:

$$\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{a}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (a\gamma)^{\frac{\nu}{a}},$$

woraus durch Erhebung in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Uebergang zur Grenze $\nu = \infty$ unmittelbar die erste Form der Behauptung (a) resultirt.

Um die zweite zu gewinnen, braucht man nur auf die letzte Ungleichung die auf p. 170 angegebene Relation:

$$n!\, e^{n-1} < n^{n+1}, \quad \text{also: } n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n\, e$$

anzuwenden.[1]) Alsdann ergiebt sich die Beziehung:

---

[1]) Man kann sich, wie Herr Lüroth bemerkt hat, auch der Ungleichung:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1)$$

bedienen, welche aus der Reihe für e^n in folgender Weise resultirt. Man hat:

$$e^n = \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{n^\nu}{\nu!} + \sum_n^\infty{}^\nu \frac{n^\nu}{\nu!}$$
$$= s_n + r_n.$$

Da $\frac{n}{\nu} > 1$ für $\nu < n$, so nehmen in s_n die Terme beständig zu, sodass also:

$$s_n < n \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Andererseits hat man nach bekannter Schlussweise:

$$r_n < \frac{n^n}{n!} \sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{n}{n+1}\right)^\nu = \frac{n^n}{n!} \cdot (n+1),$$

und somit

$$e^n < \frac{n^n}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!}(n+1) = \frac{n^n}{n!}(2n+1),$$

also schliesslich:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1).$$

$$(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (\nu e)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

welche, in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhoben, für $\nu = \infty$ die zweite Form der Behauptung (a) liefert.

---

§ 2.

Hauptsatz B. *Ist für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\text{(B)} \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu x^\nu\right| \geqq A \cdot c^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \qquad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0),$$

so hat man:

$$\text{(b)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Zum Beweise dieses Satzes dienen die folgenden zwei Hülfssätze:

Hülfssatz I. *Bedeutet r eine positive Veränderliche, $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu$ eine beständig convergirende Reihe mit reellen Coefficienten und ist für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu \geqq 0,$$

so giebt es unendlich viele Indices m_ν, für welche:

$$a_{m_\nu} \geqq 0$$

ausfällt.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre unrichtig, so müsste von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\nu \geqq n$, beständig

$$a_\nu < 0$$

sein. Sodann könnte man R so fixiren, dass für $r > R$:

$$|a_n| \cdot r^n > \left| \sum_0^{n-1} {}^{\nu}\, a_\nu\, r^\nu \right|,$$

und daher, wegen $a_n r^n < 0$:

$$\sum_0^n {}^{\nu}\, a_\nu\, r^\nu < 0 \quad (\text{für } r > R).$$

Da überdies für jedes r

$$\sum_{n+1}^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu\, r^\nu < 0$$

wäre, so hätte man schliesslich:

$$\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu\, r^\nu < 0 \quad \text{für } jedes\ r > R,$$

was der Voraussetzung widerspricht. —

Hülfssatz II.[1]) *Ist* $\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, b_\nu^\varkappa$, *wo* $\varkappa > 0$, *eine convergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern,* δ *eine beliebig anzunehmende positive Zahl, so hat man:*

(1) Für $\varkappa > 1$: $\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, b_\nu \right)^\varkappa$.

(2) Für $\varkappa < 1$: $\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu \right)^\varkappa$.

Beweis. Setzt man: $\sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, b_\nu = B$, so besteht für jedes ν die Beziehung:

$$\frac{b_\nu}{B} < 1$$

und daher auch, falls $\varkappa > 1$:

$$\left(\frac{b_\nu}{B} \right)^{\varkappa - 1} < 1,$$

also:

---

[1]) Es ist dies der hier ausschliesslich in Betracht kommende Theil des auf p. 179 von mir bewiesenen Hülfssatzes. Der hier gegebene, etwas kürzere Beweis rührt in der Hauptsache von Herrn Lüroth her.

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^\varkappa < \frac{b_\nu}{B}.$$

Substituirt man hier $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf., so folgt durch Summation:

$$\frac{1}{B^\varkappa} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \frac{1}{B} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu = 1,$$

also in der That, wie unter (1) behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu\right)^\varkappa \quad (\varkappa > 1).$$

Um die Richtigkeit von (2) zu beweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = A, \quad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu = S,$$

wobei $\sum a_\nu$, $\sum a_\nu c_\nu$ irgend zwei convergente Reihen mit nicht-negativen Gliedern bedeuten sollen. Ist sodann für $\varkappa < 1$ auch $\sum a_\nu c_\nu^\varkappa$ convergent, so besteht die Identität:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa = \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa.$$

Nun ist aber[1]) für $\varkappa < 1$:

$$\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa < 1 + \varkappa\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu - 1\right),$$

woraus durch Multiplication mit a_ν, Substitution von $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf. und Summation sich ergiebt:

---

[1]) Die betreffende, für jedes $a > 0$, $\varkappa < 1$ geltende Ungleichung, nämlich:

$$a^\varkappa < 1 + \varkappa(a - 1),$$

geht aus der auf p. 176 für $\varkappa > 1$ abgeleiteten Ungl. (29):

$$A^\varkappa > 1 + \varkappa(A - 1)$$

ohne weiteres hervor, wenn man $A = a^{\frac{1}{\varkappa}}$ setzt und schliesslich $\frac{1}{\varkappa}$ statt $\varkappa$ schreibt.

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S}\cdot c_\nu\right)^\varkappa < \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu + \varkappa\left(\frac{A}{S}\cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu - \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu .$$

Mit Benützung dieser Ungleichung liefert die obige Identität die Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa .$$

Setzt man noch:

$$a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu, \qquad a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa ,$$

also:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \frac{1+\delta}{\delta}, \qquad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu = (1+\delta)^{\frac{\nu}{\varkappa}} \cdot b_\nu ,$$

so folgt, wie unter (2) behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \quad (\varkappa < 1). -$$

Beweis des Hauptsatzes B. Es werde zunächst $a = 1$ angenommen. Setzt man sodann $|x| = r$, so resultirt aus der Voraussetzung (B) a fortiori die folgende:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu| r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r} = A \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \frac{\gamma^\nu r^\nu}{\nu!},$$

sodass also für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse, die Beziehung besteht:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!}(\nu!\,|C_\nu| - A\gamma^\nu) \cdot r^\nu \geqq 0 .$$

Man hat somit nach Hülfssatz I für unendlich viele m_ν:

$$m_\nu!\,|C_{m_\nu}| \geqq A \cdot \gamma^{m_\nu}$$

und wegen:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} > \frac{1}{m_\nu e} \cdot m_\nu!,$$

zugleich auch:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} \cdot |C_{m_\nu}| > A \cdot \frac{1}{m_\nu e} \cdot \gamma^{m_\nu}.$$

Aus den beiden gefundenen Ungleichungen ergiebt sich sodann:

$$\text{(b}')\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|} \geqq \gamma,$$

eine Beziehung, welche mit der unter (b) behaupteten für $a = 1$ zusammenfällt.

Ist jetzt a von 1 verschieden, so bringe man die aus der Voraussetzung (B) resultirende Beziehung:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \, |C_\nu x^\nu| \geqq e^{\gamma \cdot |x|^a}$$

durch die Substitution:

$$|x| = r^{\frac{1}{a}}$$

auf die Form:

$$\text{(C)}\qquad \sum_0^\infty {}^\nu \, |C_\nu| \cdot r^{\frac{\nu}{a}} \equiv \sum_0^\infty {}^\nu \left(|C_\nu|^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}} \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot r}.$$

Im Falle $a < 1$ hat man nun nach Ungl. (1) des Hülfssatzes II (für $\varkappa = \frac{1}{a}$, $b_\nu = |C_\nu|^a \cdot r^\nu$):

$$\sum_0^\infty {}^\nu \left(|C_\nu|^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}} < \left(\sum_0^\infty {}^\nu \, |C_\nu|^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}}$$

also, wenn man diese Ungleichung in die a^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (C):

$$\sum_0^\infty {}^\nu \, |C_\nu|^a \cdot r^\nu > A^a \cdot e^{a \gamma r},$$

sodass sich mit Hülfe von (b′) unmittelbar ergiebt:

$$(\text{b}_1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^a} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|^a} \geqq a\gamma \quad (a < 1).$$

Im Falle $a > 1$ hat man analog nach Ungl. (2) des Hülfssatzes II:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (|C_\nu|^a \cdot r^\nu)^{\frac{1}{a}} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{(a-1)\nu} C_\nu^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}},$$

folglich, wenn man diese Ungleichung in die a^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (C), zunächst:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{(a-1)\nu} \cdot |C_\nu|^a \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{a-1} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (|C_\nu|^a \cdot r^\nu)^{\frac{1}{a}}\right)^a$$

$$\geqq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{a-1} A^a \cdot e^{a\gamma r}$$

und, wenn man noch r durch $(1+\delta)^{1-a} \cdot r$ ersetzt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu|^a \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{a-1} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma(1+\delta)^{1-a} \cdot r}.$$

Hieraus würde sich mit Hülfe von (b′) zunächst ergeben:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^a} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|^a} \geqq (1+\delta)^{1-a} \cdot a\gamma,$$

und da $\delta > 0$ unbegrenzt verkleinert werden darf, schliesslich:

$$(\mathrm{b}_2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^a} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|^a} \geqq a\gamma \quad (a > 1).$$

Durch Erhebung der Relationen (b_1), (b_2) in die $\left(\frac{1}{a}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Zusammenfassung mit Ungl. (b′) findet man also, wie behauptet:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot |C_\nu|} \geqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}$$

für jedes positive a.

Die in den Hauptsätzen (A) und (B) enthaltenen Resultate stimmen genau mit den früher auf p. 187 angegebenen

überein. Daraus folgen dann die auf pp. 188, 189 zusammengestellten umkehrbaren Sätze mit Hülfe der nämlichen Schlüsse, welche a. a. O. zum Beweise der analogen Sätze von §§ 4 und 5 angewendet wurden.

Die diluvialen menschlichen Knochenreste in Belgien und Bonn in ihrer structurellen Anordnung und Bedeutung für die Anthropologie.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von **Otto Walkhoff.**

(Eingelaufen 18. November.)

Eine im letzten Jahre von mir mit Beihülfe der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften ausgeführte Untersuchung der in Bonn, Lüttich und Brüssel befindlichen menschlichen Reste aus der Diluvialzeit erstreckte sich auf sämmtliche Knochen der aus der Chelléen- und Mousterien-Periode stammenden Funde. Das in den Belgischen Museen noch lagernde, ungeheure Material von menschlichen Knochenresten aus der Magdalénien-Periode und dem Neolithicum konnte von mir nur in Bezug auf Kiefer berücksichtigt werden. Meine Arbeit wurde theils als Nachprüfung der bisher beschriebenen äusseren Formen der Objecte, hauptsächlich jedoch mit Rücksicht auf die zu erwartenden Structurbilder nach der von mir in die Anthropologie eingeführten Untersuchungsmethode ganzer Knochen mittelst Röntgenstrahlen unternommen.

Auf Grund der Röntgenaufnahmen kann der in Bonn befindliche Neanderthal-Mensch nicht mehr als pathologisches Individuum angesehen werden, wie es Virchow geschildert hat. Die deutsche Anthropologie hielt seit jener

Untersuchung Virchows ziemlich allgemein daran fest. Die Aufnahmen sämmtlicher Knochen ergaben jedoch jetzt als einzige pathologische Erscheinung den schon bekannten Bruch einer Ulna. Das Schädeldach zeigt keine structurelle Veränderung durch Atrophie oder „Gicht der Alten", wie Virchow annahm. Dieser Neanderthal-Mensch erlebte auch kein hohes Greisenalter, wie dieser Autor erklärte, sondern war bei seinem Tode höchstens im besten Mannesalter, denn die Nahtlinien der Epiphysengrenze an sämmtlichen Extremitäten-Knochen sind noch nicht einmal vollständig verschwunden! Diese Nahtlinien sind der unzweifelhafte Ausdruck des Ueberganges vom jugendlichen zum fertigen Knochen und beweisen, dass jener Neanderthaler keinenfalls das Alter von 30 Jahren überschritten hat! Nirgends ist ein malum senile, welches die eigenartigen Formen erklären sollte, durch die Röntgenaufnahmen zu constatiren. Die genaue Feststellung der Grösse der Hirnhöhlen gelang bei dem diluvialen Schädel vollkommen ebenso des Verhaltens der Supraorbitalbögen und der Nähte. Die wohlerhaltenen Femura des Neanderthal-Menschen zeigen eine Ausbildung der sämmtlichen Trajectorien von einer Mächtigkeit und Eigenart, wie sie beim heutigen Menschen meines Wissens nicht bekannt sind. Die Trajectorien deuten auf eine sehr starke functionelle Beanspruchung, welche von derjenigen des recenten Menschen in manchen Punkten abweicht. Ein Ward'sches Dreieck ist nicht vorhanden, dagegen strahlen vom inneren Halsschaftwinkel im Verlauf einer ganzen Biegung sehr starke und zahlreiche Knochenbälkchen in den Trochanter major und die Fossa trochanterica. Die wiederholt aufgeworfene Frage des aufrechten Ganges beim diluvialen Menschen ist durch die Untersuchung entschieden bejahend zu beantworten. Die Structur auch des heutigen menschlichen Femurs und der Tibia weicht in Folge der verschiedenartigen Function und statischen Belastung von derjenigen der Antropomorphen principiell ab. Während die Röntgenaufnahme an dem Kniegelenksende des menschlichen Femurs nur starke Trajectorien ergiebt,

welche parallel der Längsachse angeordnet sind, verlaufen die Knochenbalkenzüge bei den Anthropomorphen vom äusseren oder inneren Condylus nicht nur in dieser Richtung, sondern auch in concaven Bogen zahlreich zur entgegengesetzten Seite. Die starke Entwickelung je eines horizontalen Trajectoriums, welches von der Fossa poplitaea zu der Tuberositas condyl. ext. und int. verläuft, fehlt den Anthropomorphen nahezu vollständig. Die Structur des unteren Endes des heutigen menschlichen Femurs zeigt eine durchaus einseitige Belastung durch den aufrechten Gang. Bei den Anthropomorphen tritt die Vielseitigkeit der functionellen Beanspruchung des unteren Femurendes deutlich zu Tage. Beim Neanderthal-Menschen finden sich Anklänge der Structur an letztere: Es überwiegt jedoch weitaus das Trajectorium der statischen Belastung. Auch der vorhandene Rest des steilen Beckens zeigt besondere Structureigenthümlichkeiten, welche noch vergleichend bearbeitet werden müssen.

Der Spy-Fund in Lüttich erweist sich als ein höchst werthvolles Gegenstück zum Neanderthal-Menschen. Nicht nur die äusseren Formen schliessen sich dem letzteren an, sondern die Structur der einzelnen Knochen wiederholt sich in derselben Anordnung und mit denselben Abweichungen gegenüber dem heutigen Menschen. Ganz besonders trifft dieses für die Femura zu. Die Tibia scheint die Annahme von Fraipont zu bestätigen, dass der damalige Mensch mit gebogenen Knieen aufrecht ging. Die Schädel der Spy-Menschen folgen jedenfalls in Form und Structur dem Neanderthaler.

Die gewaltige Ausdehnung der Stirnhöhlen war durch die Röntgenaufnahme gut zu constatiren. Höchst wichtig sind die bei dem Spy-Funde erhaltenen Kieferreste. Diese Kiefer waren ganz gewaltige Kauwerkzeuge und zeigen wie die Zähne entschieden eine Reihe pithekoider Formen. Ich hebe den Ansatz des genioglossus in einer Grube, den Mangel eines Kinnes, die theilweise Grössenzunahme der Molaren nach hinten, die Grösse des Zahnbogens durch eine mächtige Zahnentwickelung überhaupt, den Kiefer- und Zahnprognathismus

und die Rückwärtskrümmung der Schneidezahnwurzeln hervor. Dennoch sind auch sämmtliche belgischen Reste unverkennbar menschlich. Die enorme Kaumuskulalur des diluvialen Menschen lässt sich theils durch die grossen Insertionsstellen und Leistenbildungen theils durch die Wiedergabe der Trajectorien mittelst Röntgenstrahlen nachweisen. Durch den nachweisbaren Rückgang der Kaufunction und der damit verbundenen Reduction der Zähne und Kiefer an Grösse beim späteren Menschen ist meines Erachtens auch ein Einfluss auf die Umgestaltung der Schädelkapsel anzunehmen. Erst die veränderte Stärke der Kaumuskulatur ermöglichte die Umgestaltung der vorderen Schädelkapsel. Aus der fliehenden Stirn und der starken postorbitalen Einschnürung der Schädelkapsel des Diluvial-Menschen hervorgehend, konnte bei der immer geringer werdenden Thätigkeit des m. temporalis der vordere Theil der Schädelkapsel durch das gleichzeitig sich stärker entwickelnde Gehirn sich erhöhen. In Anbetracht der schon ziemlich grossen Capacität der diluvialen Hirnkapsel und der später auftretenden Veränderung der Occipitalpartie ist die Annahme einer Umformung der Hirnkapsel durch Umlagerung und Umgestaltung der einzelnen Hirntheile in Folge der zurückgehenden Kaumuskulatur wohl mindestens ebenso zu berücksichtigen, wie die Vergrösserung der Frontallappen des Grosshirns, welche bisher ziemlich allgemein als einziges Moment für die Entwickelung der hohen Stirn angesehen wird.

Dass seit der Diluvialzeit eine Reduction der Kiefer und alsdann der Zähne an Grösse beim Menschen eintrat, ist nach den sich immer mehrenden Funden unzweifelhaft. Die belgischen diluvialen Kiefer (neben den Spykiefern ist besonders der Kiefer von la Naulette als durchaus normal zu bezeichnen) sind hervorragende Zeugen für jene Ansicht. Der ursprüngliche Kiefer- und Zahnprognathismus, welcher durch die Spykiefer und den berühmten Kiefer von la Naulette unzweifelhaft bewiesen wird, und worauf schon der Schipkakiefer und die Funde von Krapina hindeuteten, ging allmählig mit

dem verminderten Gebrauch in eine Orthognathie über. Für die diluvialen Kieferfunde sind eine Reihe von ganz bestimmten Eigenschaften festgestellt, welche heutigen Schädeln durchaus fehlen. Wir können deshalb von einem diluvialen Typus menschlicher Kiefer sprechen. Das jüngste Diluvium zeitigte aber schon Formen dieser Organe, welche Uebergangsformen zum Neolithicum sind. Die belgischen, mährischen und kroatischen Funde, welche eine ganze Anzahl von Kiefern und Zähnen lieferten, ferner die neolithischen Schädel, die Kiefer der heutigen inferioren Rassen und endlich die Kauwerkzeuge der civilisirten Völker bilden eine ununterbrochene Reihe von äusseren Formen, welche mit der allmählig veränderten Function der Kiefer und Zähne sich äusserlich und innerlich veränderten. Durch den Nachweis dieser neuen functionellen Gestaltung auf Grund der Uebergangsformen kann wenigstens für diese Organe festgestellt werden, dass der Mensch seit der Diluvialzeit sich in seiner Gestalt bedeutend verändert hat, was bisher von den meisten Anthropologen geleugnet wurde.

Meine Theorie über die Entstehung des Kinnes beim Menschen durch die vermehrte Thätigkeit der Sprachmuskeln bei gleichzeitiger Reduction des Gebisses an Grösse in der Sagittalebene wird durch die belgischen Funde sehr gestützt. Die Reduction betraf besonders die Schneidezähne.

Der Annahme von King und Schwalbe, dass der diluviale Mensch wohl eine besondere Art oder gar eine besondere Gattung gewesen sei, kann ich in Folge der schon jetzt für die Kauwerkzeuge lückenlos nachweisbaren Uebergangsformen, welche sich sehr wohl durch die Entwickelungsmechanik erklären lassen, nicht zuneigen. Unter Berücksichtigung der letzteren erscheint der diluviale Mensch als Ahne des heutigen, dessen Knochenformen durch eine ganz allmählig veränderte Function der Organe auch eine allmählig veränderte Gestalt erhielten. Dann lässt sich das sporadische Auftreten einzelner diluvialer Merkmale bei den Knochen der Zwischenzeiten oder Anklänge der ersteren bei

den heutigen Rassen leichter durch Vererbung erklären, als durch Annahme eines besonderen genus für jene Diluvialfunde. Diese sind nach der Untersuchung keinenfalls pathologische Excessbildungen, sondern der Ausdruck der damaligen normalen Formen des menschlichen Geschlechtes.

Ueber die Möglichkeit den Gegensatz zwischen der Contractions- und Expansionstheorie aufzuheben.

Von A. Rothpletz.

(Eingelaufen 18. November)

Diese beiden Theorien scheinen sich gegenseitig auszuschliessen und die Anhänger der einen sind gewöhnlich auch Gegner der anderen. Gegenwärtig jedoch gibt es nur wenige Anhänger der Expansionstheorie und um so mehr Gegner oder doch Ungläubige. Das hat seinen Grund darin, dass die Entstehung der Ketten- oder Faltengebirge im Vordergrund des allgemeinen Interesses steht und dass für sie die Contractionstheorie entschieden die einfachste und am leichtesten verständliche Erklärung liefert. Welcher vorsichtige Beobachter kann sich der Ueberzeugung verschliessen, dass Faltung und Ueberschiebung — die charakteristischen tektonischen Formen der Kettengebirge — mit Zusammenschub der festen Erdrinde verknüpft sein und die vielen im Laufe der geologischen Perioden entstandenen Gebirge eine erhebliche Verkürzung oder Verkleinernng dieser Rinde hervorgebracht haben müssen? Wie aber könnte dies möglich sein, wenn das Erdinnere sein Volumen nicht verringerte oder gar vergrösserte? Und wie vortrefflich stimmt diese Forderung mit jener anderen überein, dass die Erde durch Ausstrahlung von Wärme in das Weltall sich langsam abkühlt, erstarrt und dabei sich zusammenzieht!

Nimmt man jedoch die vulkanischen Erscheinungen zum Ausgangspunkt, dann treten diese Forderungen leicht in den Hintergrund. Durch die feste und dicke Erdkruste dringen

von unten herauf in cylinder- oder spaltenförmigen Kaminen überheisse und flüssige Schmelzmassen, um entweder an der Oberfläche überzufliessen und sich zn weiten Decken auszubreiten oder um zu zerspritzen und in die Luft geschleudert zu werden, aus der sie als vulkanische Tuffe wieder niederfallen. Oder aber es dringen gewaltige plutonische Massen von unten in die Erdrinde ein, ohne bis zu ihrer Oberfläche heraufzusteigen, aber sie verdrängen ausgedehnte Theile derselben und krystallisiren in den eroberten Gebieten zu granitischen Gesteinsmassen aus. Zugleich pressen sie sich in die bereits erhärteten Gesteinsschichten ihrer Umgebung hinein in Form viel verzweigter Adern, Gänge und Apophysen, oder sie imprägniren diese Schichten förmlich mit ihren Bestandtheilen von Feldspath, Quarz etc. Ausserdem sind Erdbeben und locale Hebungen mit den vulkanischen Eruptionen häufig verknüpft und so scheint denn alles dies darauf hinzuweisen, dass in grösseren Tiefen eine Kraft thätig ist, welche die Massen ihrer eigenen Schwere und der darauflastenden Erdkruste zum Trotz zwingt, diese zu durchbrechen oder zu heben. Solche Wirkungen stehen so wenig mit einer Contraction des Erdkernes im Einklang, dass ausschliessliche Betrachtung vulkanischer Vorgänge wohl niemals zur Contractionstheorie geführt hätte. Was sie zur Erklärung fordert, ist nicht Contraction, sondern Expansion des Erdinneren. Aber wie soll diese zu Stande kommen, da doch die Erde Wärme abgibt, sich also abkühlen muss? Ausgehend von der längst bekannten Thatsache, dass einige Stoffe, wie das Wasser und Wismuth, beim Uebergang von dem flüssigen in den festen Zustand ein grösseres Volumen einnehmen, so wie von einigen allerdings nicht ganz einwandfreien Experimenten mit geschmolzenen Erzen hat man die Möglichkeit in Erwägung gezogen, dass auch die anderen Stoffe im Innern der Erde, wo sie ungeheurem Druck und sehr hohen Temperaturen ausgesetzt sind, sich vielleicht, entweder beim Uebergang in den festen Zustand oder überhaupt bei Verminderung der Temperatur, ausdehnen könnten. Mit dieser experimentell allerdings auf ihre Richtigkeit nicht controllir-

baren Annahme hätte man eine Expansionskraft zur Verfügung, die ohne weiteres alle vulkanischen Erscheinungen aufs beste erklärte. Denn wenn das Erdinnere sich ausdehnt, wird die Erdkruste zu eng; sie wird also auseinander gezogen, Risse und klaffende Spalten müssen entstehen, auf denen wie durch Sicherheitsventile die überhitzten Massen aus der Tiefe aufsteigen, in die Kruste in Form von granitischen Stöcken und Lagergängen eindringen oder dieselbe durchbrechen und auf der Aussenseite Vulkane aufbauen.

Die Befriedigung, welche dieses Ergebniss gewährt, ist aber von kurzer Dauer, sobald wir uns wieder den Kettengebirgen zuwenden, bei denen nicht Ausdehnung sondern Zusammenschub erklärt sein will. Versuche sind gemacht worden, auch diesen als eine Folgewirkung der Expansion aufzufassen, aber niemand wird sich verhehlen können, dass diese Versuche auf schwachen Füssen stehen, und jedenfalls lange nicht so einleuchtend und überzeugend sind wie die Erklärungen durch die Contractionstheorie.

Gegenüber solchem Misserfolg könnte nur theoretischer Fanatismus seinen Trost darin finden, dass auch umgekehrt die dort siegreich gebliebene Contractionstheorie hier an der Erklärung der vulkanischen Erscheinungen Schiffbruch leiden muss. Aber selbst diesen hat man von der anderen Seite in Abrede zu stellen versucht und zu Gunsten der Contractionstheorie die Meinung vertreten, dass die in Folge Schwindens des Erdkernes zusammenbrechende und einsinkende Erdkruste auf die im geschmolzenen Zustande befindlichen Massen des Kernes einen solchen Druck ausüben werde, dass diese in wogende Bewegung kommen und an solchen Stellen, wo die Erdkruste sich noch selber trägt, von unten an sie heranbranden müssen und dabei in beim Einbruch der Rinde entstandene Spalten heraufgepresst werden. Also im Grunde soll die Gewalt der einsinkenden Rindentheile selbst es sein, welche die geschmolzenen Massen aus der Tiefe emportreibt.

Was bisher zur Begründung solcher Annahme vorgebracht wurde, ist weit entfernt von einer exacten und überzeugenden

Beweisführung und es mögen hier nur vier Bedenken dagegen geltend gemacht werden.

1. Man hat die Vorstellung des vermutheten Vorganges durch schematische Bilder zu unterstützen versucht, die aber wie z. B. fig. 127 in dem sonst so vorzüglichen Traité de Géologie von de Lapparant soweit von den thatsächlichen Verhältnissen abweichen, dass sie entschieden abgelehnt werden müssen. Solche profilmässige Darstellungen der Erdkruste, welche Continente und Meeresbecken in ihrer gegenseitigen Beziehung zur Anschauung bringen wollen, müssen im richtigen Verhältniss der Höhe zur Länge entworfen werden, und es darf die Krümmung der Erdoberfläche nicht unberücksichtigt bleiben. Es hat schon vor mehr als 50 Jahren Élie de Beaumont hervorgehoben, dass sowohl die Wasseroberfläche wie der Boden der Oceane in diesem Falle nach oben convex gekrümmt erscheinen und dass die Bodenlinie flacher gekrümmt und mithin kürzer ist als die Wasseroberflächenlinie. Der muldenförmig eingebogene Theil der Erdkruste erscheint auf einer richtigen Zeichnung mithin nicht als ein concaver sondern als ein ebenfalls aber nur weniger stark convexer Streifen, der somit auf seiner Unterseite keine Ausdehnung, sondern im Gegentheil Zusammenpressung zeigt.

2. Wenn man als Ursache des Sinkens der Erdkruste den Schwund des Erdkernes gelten lassen will, so darf man doch nicht voraussetzen, die Kruste könne sich selbst auch nur für kurze Zeit nach Art eines Kugelgewölbes frei tragen. Der entstehende tangentiale Druck müsste sofort die Druckfestigkeit der Krustengesteine um ein Vielfaches überschreiten und diese zermalmen. Es kann aber auch kein Hohlraum zwischen Kern und Kruste entstehen und weder von einem Niederstürzen einzelner Rindentheile auf den schwindenden Kern noch von lokaler Druckentlastung die Rede sein.

3. Da die Erdkruste specifisch leichter als der Kern ist, so ruht sie gewissermassen schwimmend auf demselben. Wenn die Oberfläche des Kernes aber durch Contraction kleiner wird, so findet die Unterseite der Kruste nicht mehr Platz

genug auf ihr, es entsteht Spannung in der Kruste, die alsbald die Druckfestigkeit der Gesteine überwindet und zu seitlichem Zusammenschub führt, bis die Unterfläche sich wieder in das richtige Verhältniss zur Oberfläche des Kernes gesetzt hat. Dieser Zusammenschub muss aber etwa vorhandene klaffende Spalten oder sonstige Hohlräume sofort fest schliessen, und er versperrt somit den geschmolzenen Kernmassen alle Wege, auf denen sie aufsteigen könnten.

4. Trotzdem haben thatsächlich ungeheure Massen von unten herauf ihren Weg in die Erdkruste gefunden und sich darin ausgebreitet, so dass sie jetzt in Gestalt granitischer Gesteine Räume von Hunderten von Kubik-Kilometern einnehmen und entsprechende Massen der Kruste verdrängt zu haben scheinen. Damit dieses Eindringen Folge des Druckes der niedersinkenden Erdkruste sein, also entstehen könnte zu einer Zeit, da in der Kruste starke tangentiale Spannung und seitlicher Zusammenschub herrschen. müsste die aufsteigende und noch nicht verfestigte Masse jedenfalls schon eine ebensogrosse Druckfestigkeit wie die festesten Gesteine der Erdkruste haben und ausserdem eine besondere Expansionskraft besitzen, um sich den weiten Raum in der Kruste zu erobern. Es scheint aber unmöglich, solche Annahmen physikalisch zu begründen.

So bleibt denn nichts anderes übrig als zu erklären, dass die Contractionstheorie, obschon sie sehr geeignet ist die Entstehung der Faltengebirge zu erklären, in Bezug auf die plutonischen und vulkanischen Vorgänge gänzlich versagt. Wir stehen also zwei sich gegenseitig ausschliessenden Theorien gegenüber, von denen keine ganz genügt. Eine dritte Theorie aber, zu der wir unsere Zuflucht nehmen könnten, gibt es nicht.

In dieser Nothlage müssen wir nach allen Seiten Ausschau halten, wo der Fehler in unserer Argumentation liegen kann. So fassen wir alles nochmals kurz zusammen: Vulkanismus ist in der Hauptsache eine centrifugale, die Faltung der Kettengebirge eine tangentiale Bewegung. Beide Be-

wegungsarten wollten wir unmittelbar aus der Wärmeabgabe der Erde an das Weltall ableiten, indem wir das eine Mal annahmen, dass diese Wärmeabgabe eine centripetale, das andere Mal, dass sie eine centrifugale Bewegung im Erdkerne erzeuge. Das ist aber ein Entweder-Oder, denn die zwei Annahmen schliessen sich anscheinend einander aus.

Zweierlei Vorgänge, die wir als gleichzeitige voraussetzten, können natürlich nicht aus zwei sich ausschliessenden Ursachen hervorgehen. Wäre es aber nicht vielleicht möglich, dass wir gerade in jener Voraussetzung der Gleichzeitigkeit geirrt hätten? Wir sind an dieselbe allerdings so sehr gewöhnt, dass sie uns selbstverständlich erscheint. Dennoch müssen wir uns entschliessen, sie auf ihre Berechtigung zu prüfen.

Die erste Lehrerin für den Geologen ist die Gegenwart, sie wollen wir also zuerst befragen. Wir sehen allenthalben auf der Erde — wenn auch oft in weiten Abständen — Vulkane in Thätigkeit. Sie liegen auf den Festländern und im Meere, sie schleudern theils periodisch theils nur in unregelmässigen Zeitabständen Asche und Bomben in die Luft oder ergiessen Lavaströme über ihre Umgebung. In den Zwischenzeiten beschränken sie sich darauf, Gase auszuhauchen. Mag man vielleicht auch zur Meinung berechtigt sein, dass in manchen früheren geologischen Perioden die vulkanische Thätigkeit viel bedeutender war, so ändert das nichts an der Thatsache, dass auch unsere Zeit eine Periode solcher Thätigkeit ist.

Ob in der Gegenwart auch Intrusionen von plutonischen Gesteinen stattfinden, lässt sich nicht durch Beobachtung feststellen, aber längst erloschene Vulkane älterer Perioden, deren unterirdische Theile durch Dislocationen und Erosion blos gelegt worden sind, lehren uns, dass häufig genug die oberirdische vulkanische Action von plutonischen Intrusionen begleitet wurde. Es ist deshalb nicht unwahrscheinlich, dass solche auch heute noch sich bilden.

Erdbeben sind häufige Ereignisse. Die Ursachen der sog. tektonischen Beben, die nicht unmittelbar mit vulkanischen Ausbrüchen in Verbindung stehen, kennen wir nicht, aber es

ist möglich, dass sie Begleiterscheinungen von vulkanischen Ereignissen sind, die sich innerhalb der Erdkruste abspieler, ohne die Oberfläche zu erreichen.

Mit vulkanischen Ausbrüchen und solchen Erdbeben kommen zuweilen auch locale Hebungen der Erdkruste vor. Ausserdem sind Hebungen grosser continentaler Gebiete sicher festgestellt, die nicht mit solchen gewaltsamen Ereignissen in Beziehung stehen und so langsam vor sich gehen, dass sie erst durch Jahre lange genaue Messungen erkannt werden können.

Centrifugale Bewegungen sind somit in der Gegenwart vorhanden, aber umsonst hat man bisher nach den Spuren tangentialer Bewegungen gesucht. Kettengebirge, Faltungen im grossen Massstabe sind in historischer Zeit nicht entstanden, denn die continentale Hebung, von welcher Skandinavien ergriffen ist, kann nicht unter diese Art von tektonischen Vorgängen eingereiht werden.

Die Gegenwart zeigt sich somit unverkennbar als eine Periode vulkanischer Thätigkeit, centrifugaler Bewegung, während die Wirkungen tangentialer Bewegung alle einer früheren Zeit angehören.

Beiderlei Bewegungen müssen also nicht gleichzeitige sein, das lehrt uns die Gegenwart mit Sicherheit.

Da liegt nun die Vermuthung nahe, dass sie sich vielleicht überhaupt ausschliessen? Wenn wir darüber uns Klarheit verschaffen wollen, ist es nothwendig Perioden zu untersuchen, in denen Kettengebirge entstanden sind. Jedenfalls am günstigsten dafür wird die Tertiärzeit sein, weil in diese die Entstehung unserer grössten Kettengebirge und ebenso bedeutende Vulkanausbrüche fallen.

Der Kaukasus ist ein typisches Faltengebirge, das vorwiegend aus Meeressedimenten aufgebaut wird, deren ursprünglich horizontal gelagerten Schichten in zahlreiche Falten zusammengeschoben worden sind. In dem entstehenden Gebirge haben sich tiefe Thäler eingeschnitten und, nachdem die Faltung zum Stillstand gekommen war, immer weiter vertieft. Dann erst öffneten sich die vulkanischen Kanäle und bauten

sich die Riesenvulkane des Elbrus, Kasbek u. s. w. auf, von denen zahlreiche Lavaströme an den Thalgehängen zum Theil bis auf die Thalsohlen herabliefen. Hier kann man darüber nicht im Zweifel sein, dass einer Periode intensiver Faltung, also tangentialer Bewegung, eine andere grosser vulkanischer Thätigkeit gefolgt ist.

Im Kettenjura der Schweiz haben wir ebenfalls ein tertiäres Faltengebirg, in dem aber weder plutonische noch vulkanische Gesteine bekannt sind. Es beweist uns also, dass hier jedenfalls in die Periode tangentialer Bewegungen keine Vulkanausbrüche fielen.

Fassen wir nun die Alpen ins Auge, so muss zunächst constatirt werden, dass die Faltungen dieses Gebirges sich auf zwei Perioden vertheilen. Die erste Periode gehört der mittleren Oligocän-, die zweite dem Ende der Miocän-Zeit an. Von den vielen vulkanischen Gesteinen der Alpen sind weitaus die meisten älter als diese mitteltertiären Faltungen (z. B. die palaeoz. Diabase und Quarzporphyre, die Porphyrite und Melaphyre der Trias und die eocänen Basalte). Für uns kommen deshalb nur diejenigen Basalt-, Trachyt- und Serpentindurchbrüche in Betracht, welche oligocänen oder noch jüngeren Alters sind. Da ergibt sich nun, dass die Trachyte bei Cilli in der südlichen Steiermark erst in der oberoligocänen und untermiocänen, die Basalte der östlichen Steiermark aber im Pliocän, die ersteren also in der Zwischenzeit zwischen beiden Faltungsperioden, die letzteren nach der letzten Faltungsperiode erumpirt sind. Ebenso steht es fest, dass die Basalt- und Serpentingänge in den rhätischen Alpen nicht während, sondern erst nach der ersten Faltungsperiode entstanden sind. Also hier wie im Kaukasus schliessen sich die Perioden vulkanischer Thätigkeit und der Gebirgsfaltung gegenseitig aus.

Was hingegen die Granitstöcke betrifft, an denen die Alpen so reich sind, so eignen diese sich für unsere Untersuchung weniger, weil es meist nicht möglich ist, ihr genaues Alter festzustellen. Darauf käme es aber vor allem an. Wenn also z. B. in neuerer Zeit das tertiäre Alter der Tonalit-

stöcke Südtirols angenommen werden will, so muss dem gegenüber festgestellt werden, dass wir in Wirklichkeit sicher nur wissen, dass sie jünger als die Trias oder ein Theil der Trias sind, weil sie die Gesteine dieser Periode metamorphosirt haben. Sie können freilich noch erheblich jünger sein, aber wir haben zu einer bestimmten Altersangabe keine zuverlässigen Anhaltspunkte. Es liesse sich noch eine Anzahl anderer tertiärer Gebirgsketten anführen, für welche ein zeitliches Auseinanderfallen der vulkanischen und der Faltungsvorgänge nachweisbar ist. Doch will ich mich in dieser Beziehung auf die Erwähnung beschränken, dass mir kein Gebirg bekannt ist, in dem die beiderlei Vorgänge sich gleichzeitig abgespielt haben. Ob andere solche Gebiete kennen, weiss ich nicht, wenn es aber der Fall sein sollte, wäre eine Mittheilung darüber sehr erwünscht, da bei der Weitläufigkeit des Beweismateriales nur gemeinsame Arbeit Vieler gesicherte Ergebnisse verspricht.

Eine Entscheidung mit Bezug auf die vortertiären Gebirge ist natürlich mit noch grösseren Schwierigkeiten verknüpft, weil die Altersbestimmung der einzelnen Vorgänge um so unsicherer wird, je weiter sie in der Vergangenheit liegen. Doch ist es auffällig genug, dass, um nur dies eine Beispiel zu erwähnen, die gewaltigen Porphyr- und Melaphyreruptionen des Rothliegenden erst nach den weitausgedehnten Faltungen eingetreten sind, welche die älteren Ablagerungen des rheinischen Schiefergebirges, des Harzes, Thüringerwaldes und Erzgebirges betroffen haben, und dass soweit das Rothliegende selbst von Faltungen ergriffen worden ist, diese vulkanischen Gesteinsmassen geradeso wie die mit ihnen wechsellagernden Sandsteine, Conglomerate, Kalksteine und Dolomite gefaltet wurden zu einer Zeit, in der ihre Eruption längst in der Vergangenheit lag.

Ich schliesse daraus auf die Wahrscheinlichkeit, dass nirgends und zu keiner Zeit Gebiete unserer Erdkruste gleichzeitig der Schauplatz vulkanischer Eruptionen und von Gebirgsfaltung gewesen sind. Dieses Ergebniss stimmt aber mit demjenigen genau überein,

zu dem wir bereits gelangt sind, dass nämlich in der Gegenwart die Erde nur der Schauplatz vulkanischer Eruptionen, nicht aber auch von Gebirgsfaltungen ist.

Ich höre hier den Einwand machen, dass damit noch gar nichts gegen den Synchronismus der vulkanischen und Faltungsvorgänge bewiesen sei, denn es sei leicht möglich und vielleicht sogar selbstverständlich, dass in Faltungsgebieten vulkanische Ausbrüche wegen des seitlichen Zusammenpressens nicht eintreten können, dass sie dafür aber um so intensiver an anderen Stellen zum Durchbruch gelangen. Die postalpinen und postkaukasischen Eruptionen in den Alpen und dem Kaukasus brauchen in der That in keinen causalen Zusammenhang mit der Faltung dieser Gebirge gesetzt zu werden, sie können ja die Folge späterer anderweitiger Faltungsprocesse sein, während deren jene Gebirge nicht mehr im Zustand der Zusammenpressung sich befanden.

Wir müssen also nachforschen, ob ausserhalb der bekannten Kettengebirge vulkanische Gesteine bekannt sind, deren Eruption gleichzeitig mit dem Faltungsprocesse jener Gebirge stattgefunden hat, mit anderen Worten, ob Beweise dafür existiren, dass die vulkanischen und Faltungsvorgänge zwar gleichzeitig aber örtlich von einander getrennt auftreten.

Dagegen spricht allerdings von vornherein, worauf schon früher hingewiesen worden ist, die Erfahrung aus historischer Zeit, aber man könnte einwenden, dass diese doch im Verhältniss zur Länge der geologischen Perioden zu kurz sei, um daran eine für unsere theoretischen Anschauungen so bedeutungsvolle Schlussfolgerung zu knüpfen.

Wenn man von allen vulkanischen Eruptionen und allen Gebirgsfaltungen genaue Kenntniss ihres Alters und ihrer Dauer hätte, so bräuchte man sie nur alle aufzuzählen und gegen einander zu stellen, um sofort die Frage nach dem Fehlen eines Synchronismus beantworten zu können. Man wage aber nur einen solchen Versuch, dann tritt die Unmöglichkeit einer derartigen Beweisführung sofort zu Tage. Die Mangelhaftigkeit unserer synchronistischen Formationstabellen

ist jedem Geologen bekannt für alle die Fälle, wo es sich um Vergleiche weit von einander abliegender oder in ihrer Facies stark sich unterscheidender Ablagerungen handelt. Dazu kommt, dass der Zeitpunkt für viele, insbesondere aber für die älteren Gebirgsfaltungen, die vulkanischen und insbesondere die plutonischen Bildungen nur innerhalb sehr weiter Grenzen festgelegt werden kann, die zur Entscheidung der uns vorliegenden Fragen oft viel zu unbestimmt sind.

Leichter könnten wir zu einem greifbaren Ergebniss kommen, wenn wir nach Beweisen für den Synchronismus suchen, denn dann brauchen wir nicht alle einschlägigen Fälle zu untersuchen und es würde nur ein einziger genau geprüfter Fall von Synchronismus genügen, um die Behauptung zu widerlegen, dass vulkanische und Faltungsvorgänge in unserer Erdkruste sich einander zeitlich ausschliessen. Vielleicht gelingt es anderen einen solchen Fall ausfindig zu machen, mir ist dies bis jetzt nicht gelungen. Dahingegen haben sich gegentheilige Fälle in Menge ergeben, von denen ich diejenigen, welche auf die Alpenfaltung Bezug haben, aufzählen will.

Das Alpengebirg hat, wie bereits erwähnt, zwei Faltungsperioden, die erste in der Zeit des mittleren Oligocäns, die zweite am Ende der Miocänzeit erlebt. Im Norden der Alpen, aber nicht weit davon entfernt, liegen die zahlreichen Zeugen wenn auch kleiner Vulkandurchbrüche auf der schwäbisch-bayerischen Juratafel. Soweit ihr Alter bestimmt werden konnte, fallen sie in die mittlere Miocänzeit, wohin auch die viel umfangreicheren Basalteruptionen Hessens gestellt werden, während diejenigen des Siebengebirges dem Untermiocän angehören. Viel jünger sind die wahrscheinlich diluvialen Vulkane der Eifel. In Nordböhmen begannen die Basaltausbrüche erst mit der oberoligocänen Periode und die zahlreichen Eruptionen Ungarns scheinen sich, wenn schon ihre Altersbestimmungen in vielen Fällen zweifelhaft sind, auf drei Perioden zu vertheilen, nämlich auf das Obereocän und Unteroligocän, dann auf das Oberoligocän und Miocän mit Trachyteruptionen und endlich auf das Ende der Congerienstufe und den Anfang der Pliocän-

zeit mit Basalteruptionen. Mit Bezug auf die Alpenfaltungen haben wir somit eine praealpine, eine interalpine Trachyt- und eine postalpine Basalt-Eruptionsperiode, nur fällt es auf, dass der Zwischenraum zwischen den beiden letzteren, geologisch gesprochen, recht kurz war. Auch die vulkanischen Ausbrüche des französischen Centralplateaus lassen sehr deutlich drei Perioden erkennen, von denen die erste im mittleren Miocän liegt und zu Ende der Miocänzeit erlischt, während die zweite mit dem Pliocän anhebt, während die dritte dem Diluvium angehört.

Alle diese Thatsachen deuten darauf hin, dass auch in der weiteren Umgebung des Alpengebietes vulkanische und Faltungsvorgänge sich zeitlich einander abgelöst haben. Wir können also von einem periodischen Wechsel derselben so lange sprechen, als keine vulkanische Eruptionen namhaft gemacht werden, welche ohne Unterbrechung die mittlere Oligocän- oder die jüngere Miocänzeit ausgefüllt haben. Angenommen jedoch es hätten solche wirklich existirt, dann würde sich daraus in Verbindung mit der Thatsache, dass auch während der Trias- und Juraperiode, die wir für die Gebirgsfaltungen als Zeiten der Ruhe zu betrachten gewöhnt sind, in den Südalpen, in Amerika und Asien eine Menge von Eruptivgesteinen zu Tage getreten sind, der Satz ableiten lassen, dass die vulkanischen Vorgänge zu den dauernden Begleiterscheinungen der erdgeschichtlichen Entwickelung gehören, während Gebirgsfaltungen nur periodische Ereignisse darstellen. Auch dieses Ergebniss stünde mit den Erfahrungen im Einklang, die wir aus der historischen Zeit gewonnen haben. Beiden Möglichkeiten gemeinsam ist, dass sie die Möglichkeit ausschliessen, die vulkanischen Vorgänge als unmittelbare Folgen des Einsinkens einzelner Schollen der Erdkruste aufzufassen.

Damit sind wir jedoch unversehens vor ein neues Hemmniss eigner Art gelangt, nämlich unsere Abneigung periodische Wiederholungen in der Entwickelungsgeschichte der Erde gelten zu lassen, wenn sie uns ursächlich nicht verständlich sind.

Den Wechsel von Tag und Nacht, Sommer und Winter, Ebbe und Fluth anerkennen wir zwar unbedenklich, weil er handgreiflich und leicht erklärbar ist. Aber welche Schwierigkeiten waren zu überwinden, bis die Existenz einer grossen Eiszeit, auf die wieder eine wärmere, die jetzige Periode folgte, zugegeben wurde! War doch eine gleichmässig fortschreitende Abkühlung der Erde und ihres Klimas viel einleuchtender. Die Brutalität der Thatsachen hat uns nur allmählich gezwungen, den Widerstand aufzugeben, und jetzt sind wir sogar bereit an die mehrfache Wiederholung von glacialen und interglacialen Perioden zu glauben, trotzdem für ihre Entstehung noch immer keine genügende theoretische Begründung gefunden ist.

Der Widerstand, der sich voraussichtlich auch gegen die hier ausgesprochene Wahrscheinlichkeit des periodischen Wechsels zwischen centripetalen und centrifugalen Bewegungen der Erdkruste erheben wird, kann mit Erfolg natürlich nur überwunden werden, wenn Nachforschungen auf allen Theilen der Erde, ähnlich wie für die Eiszeiten, zu übereinstimmenden Ergebnissen führen. Selbstverständlich lässt sich heute der Erfolg noch nicht mit Sicherheit voraussehen, den solche Untersuchungen zeitigen werden. Aber letztere fallen jedenfalls ausschliesslich in das Arbeitsgebiet des thätigen Feldgeologen und bleiben unabhängig davon, ob eine Theorie ihre Ergebnisse erklären kann oder nicht. Gleichwohl mag es von Nutzen sein darauf hinzuweissen, dass die theoretische Physik in neuerer Zeit auf Bahnen wandelt, die der Annahme jener Periodicität nicht ungünstig sind.

Man ist geneigt vorauszusetzen, dass die krystalline Erdkruste einen gasförmigen Erdkern umschliesst, der so hohe Temperaturen besitzt, dass sich die Gase alle im überkritischen Zustande befinden und in Folge des hohen Druckes thatsächlich doch mit festen Massen grosse Aehnlichkeit besitzen. Die Wärmeabgabe der Erde nach Aussen erzeugt in diesem Kerne Contraction als eine centripetale beschleunigte Bewegung. Nach den Berechnungen A. Ritters ist es denkbar, dass diese Bewegung sich in Wärme umsetzt, die an Menge um ein

Vielfaches grösser ist als die Wärmemenge, aus deren Abgabe die Contractionsbewegung hervorgegangen ist. Für die Erde wäre demnach Wärmeabgabe nach aussen nicht gleichbedeutend mit Wärmeverlust, sondern im Gegentheil von erheblicher Wärmezunahme in dem gasförmigen Kerne gefolgt. Es handelt sich hierbei um allerdings sehr langsame Bewegungen, deren Bedeutung jedoch in der Grösse der bewegten Massen liegt.

Geht man von einem Ruhezustande aus, in dem die centripetale Tendenz der Massen und die centrifugale Wirkung der Wärme im Gleichgewicht sind, dann wird derselbe durch Wärmeabgabe nach aussen gestört. Es entsteht im Kern Contraction und in der Erdkruste tangentiale Spannung, die zu Gebirgsfaltungen führt. Nach einer gewissen Zeit erlangt aber die Wärme die Ueberhand und erzeugt entgegengesetzte Bewegung. Die Erdkruste wird für den sich ausdehnenden Kern zu eng, es entstehen Hebungen einzelner Theile (continentale Hebungen), die Kruste wird stärker erwärmt (Steigen der Geoisothermen), in der Kruste entsteht statt tangentialer Spannung Tendenz zum Zerreissen und Auseinanderweichen (Spaltenbildung), und die überheissen Massen des Kernes steigen in die Region der Kruste empor (plutonische Injectionen und vulkanische Durchbrüche). Hierdurch wird der Ueberschuss an Wärme allmählich aufgebraucht und es muss schliesslich wieder ein Zeitpunkt eintreten, in dem Druck und Wärme ins Gleichgewicht gekommen sind. Sogleich wird die fortgesetzte Wärmeabgabe nach aussen nun wieder Contraction erzeugen und damit eine Wiederholung der geschilderten Vorgänge einleiten.

So ist also immerhin schon ein Weg gegeben, auf dem für jene Periodicität, falls sie den geologischen Thatsachen gegenüber sich dauernd bewähren sollte, eine theoretische Begründung gesucht werden kann. Freilich ist vieles noch ungeklärt, insbesondere die Länge jener Perioden, welche vom geologischen Standpunkte aus als sehr bedeutend angenommen werden muss. Denn die historische Zeit hätte als ein Theil nur der letzten Expansionsperiode zu gelten. Ob es aber möglich sein wird auf jenem theoretischen Weg zu ähnlich

langen Perioden der Contraction und Expansion zu gelangen, kann erst die Zukunft lehren. Die geologischen Thatsachen scheinen übrigens dafür zu sprechen, dass die Contractionsperioden kürzer als die anderen sind.

Trotz aller Unsicherheit im Einzelnen und in den Voraussetzungen lässt sich soviel doch wohl mit einiger Berechtigung behaupten, dass schwerwiegende theoretische Bedenken gegen die Annahme jener Periodicität nicht bestehen, und wenn sich auch der hier skizzirte Erklärungsversuch als unhaltbar erweisen sollte, so würde das noch nichts gegen die Richtigkeit der Periodicität selbst beweisen.

Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien.

Von **August Schmauss.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

(Mit Taf. III—VI.)

Den früheren Untersuchungen des Verfassers[1]) über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand, die sich bisher auf diamagnetische Substanzen beschränkt hatten, mögen im folgenden Messungen angereiht werden, welche die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes unter dem Einflusse des Magneten an magnetischen, absorbirenden Medien bestimmen sollten.

Betreffs der Versuchsanordnung, mit der die nachfolgenden Resultate erhalten sind, darf auf die bereits erwähnten Mitteilungen verwiesen werden.

I.

Anomale Dispersion in flüssigem Sauerstoff.

Es schien von Interesse, zu untersuchen, ob dem flüssigen Sauerstoff, der ein ausgezeichnetes Absorptionsspektrum besitzt, anomale Drehung der Polarisationsebene zukommt.

Zur Messung der Drehung befand sich der flüssige Sauerstoff in einem Dewar'schen Gefässe von 8 cm innerer Weite. Um Licht hindurchschicken zu können, war die Silberbelegung an zwei diametralen Stellen weggenommen. Das Gefäss wurde

[1]) A. Schmauss, Ann. d. Phys. 2, p. 280, 1900; 8, p. 482, 1902.

zwischen die durchbrochenen Pole des Elektromagneten gestellt. Die folgende Tabelle I gibt die erhaltenen Zahlenwerte der Drehung, die für das Gebiet von drei Absorptionsstreifen bestimmt wurde.

Tabelle I.

$\lambda =$	658	652	645	642	......	602	600	593	....	553	551	547	541	....	527	522	515	507
I. $\varrho =$	0,34°	0,36	0,40	**0,45**		**0,37**	0,41	**0,50**		**0,40**	0,43	0,43	**0,52**		**0,38**	0,41	0,47	0,58
II. $\varrho =$	0,65°	0,66	0,74	**0,78**		**0,74**	0,79	**0,87**		**0,87**	0,89	0,92	**0,99**		**0,90**	0,93	0,99	1,11
III. $\varrho =$	0,97°	1,02	1,06	**1,13**		**1,14**	1,18	**1,28**		**1,34**	1,33	1,38	**1,45**		**1,40**	1,42	1,51	1,63

Die Zahlenwerte sind in die beigegebene Tafel III eingetragen. Die Messungen geschahen für drei verschiedene Feldstärken. Um einen Anhalt über die Grösse derselben zu haben, wurde die Drehung in Wasser bei denselben Feldstärken (I bis III) in demselben Gefässe bestimmt. Die in Tafel III punktirt eingetragenen Kurven erläutern die Dispersion in

Wasser unter denselben Versuchsbedingungen und geben ein Bild der relativen Drehung des flüssigen Sauerstoffs in Bezug auf Wasser.

Die Betrachtung der Tabelle — die entsprechenden Zahlen von und nach einem Absorptionsstreifen sind durch stärkeren Druck hervorgehoben — oder der beigegebenen Kurven zeigt eine anomale Drehung des flüssigen Sauerstoffs in demselben Sinne, wie er bereits für diamagnetische absorbirende Medien festgestellt ist.

Zugleich bestätigt sich auch hier das von Herrn Prof. Voigt aus der Theorie vorhergesehene Gesetz der Abnahme der negativen Drehung innerhalb eines Absorptionsstreifens mit wachsender Feldstärke. Die bei niedriger Feldstärke negative Differenz der Höhe der Fortsatzpunkte 1′, 2′, 3′ gegenüber 1, 2, 3 (siehe Fig.) geht bei steigender Feldstärke durch Null zu positiven Werten.

Anmerkung: Das Verhältnis der Drehung gasförmigen Sauerstoffs zu der des Wassers unter gleichen Bedingungen wurde von A. Kundt und W. C. Röntgen[1]) = 0,354. 10^{-3} bestimmt.

Das Verhältnis der Dichte des flüssigen Sauerstoffs (1,24) zu der des gasförmigen (0,0014) beträgt etwa 900.

Unter der Annahme, dass die Drehung der Dichte proportional zunehme, ergibt sich für das Verhältnis der Drehung des flüssigen Sauerstoffs zu der des Wassers 0,318.

Nach den vorliegenden Messungen bewegt sich das Verhältnis zwischen 0,5 und 0,6, das heisst: Die Drehung nimmt beim Uebergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand stärker zu als die Dichte.

---

[1]) A. Kundt und W. C. Röntgen, Wied. Ann. 10, p. 257, 1880.

II.

Anomale Dispersion der negativ-drehenden Lösungen von Neodym-Praseodym- und Erbium-Nitrat.

Einleitung: Herr Professor du Bois hatte auf dem internationalen Physikerkongress in Paris 1900 in seinem Referate über die magnetischen Eigenschaften der Materie[1]) bei den Elementen der Erbiumgruppe auf die Notwendigkeit hingewiesen, ihr magnetooptisches Verhalten zu studiren. Da Herr Professor du Bois zunächst nicht Gelegenheit hatte,[2]) selbst die Messung der Drehung der Polarisationsebene in den Salzen der seltenen Elemente durchzuführen, wurde dies mit seiner gütigen Erlaubnis in das Programm der vorliegenden Arbeit aufgenommen.

Die Bestimmung der Drehung der Polarisationsebene in den Salzen der Gruppe, welche eine negative Drehung aufweisen, ist schon vom rein physikalischen Gesichtspunkt aus wegen der ausgezeichneten Absorptionsspektra interessant, die wir hier finden.

Wie dürfte sich nach allgemeinen Ueberlegungen die Drehung einer negativ drehenden selectiv absorbirenden Substanz gestalten?

Es stelle in Fig. 1 die Kurve 1 die Rotationsdispersion des Lösungsmittels etwa des Wassers dar. Dann ist die Drehungskurve einer nicht absorbirenden Substanz, die in 1 gelöst wird gegeben durch 2, wenn die gelöste Substanz positives, durch 3, wenn ihr ein negatives Drehungsvermögen $\left(\text{etwa prop. } \frac{1}{\lambda^2}\right)$ zukommt.

Besitzt die gelöste Substanz einen Absorptionsstreifen, dann wird nach den früheren Erfahrungen der Verlauf der Dispersion durch die Kurve 4 dargestellt, falls die Substanz selbst

---

1) H. du Bois: Propriétés Magnetiques de la Matière Pondérable, Rapport présenté au Congrès international de Physique, Paris 1900, 2, p. 460.

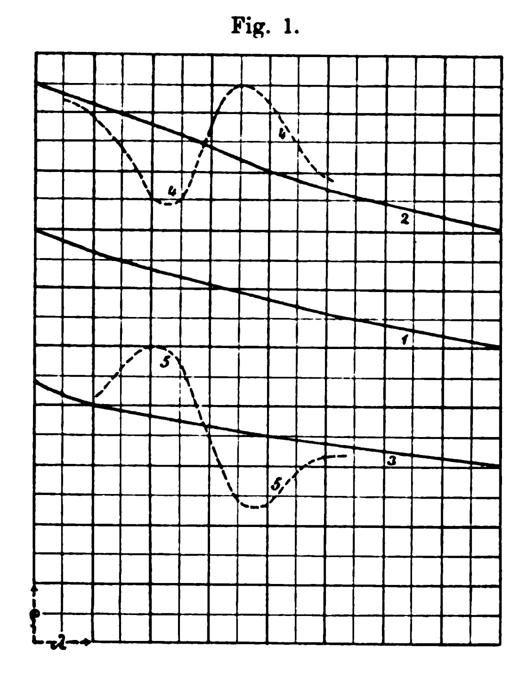
2) H. du Bois: Ann. d. Phys. 7, p. 944, 1902.

positives Drehungsvermögen besitzt. Dreht die gelöste Substanz negativ, dann wird man innerhalb eines Absorptionsstreifens einen durch die Kurve 5 dargestellten Gang der Rotationsdispersion erwarten dürfen, falls man in einfacher Ueberlegung die Konstante negativ nimmt, etwa in der Formel zur Berechnung der Grösse des Drehungswinkels nach Maxwell

$$\varrho = c \cdot \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{n^2}{\lambda^2}\left(n - \lambda \frac{d n}{d \lambda}\right) .$$

während in positiv drehenden Medien c positiv ist.

Fig. 1.



Mit der Annäherung von der roten Seite an den Absorptionsstreifen wird also die Drehung abnehmen, von der blauen Seite her zunehmen.

Diese Folgerung soll an Neodym-Praseodym- und Erbiumnitratlösungen geprüft werden.

Die Messungen.

Der Güte des Herrn Prof. Muthmann verdanke ich die Ueberlassung von Neodym- und Praseodymnitratlösungen, von Herrn Prof. Hoffmann erhielt ich Erbiumnitrat. Es sei mir gestattet, den beiden Herren auch an dieser Stelle für die Abgabe des seltenen Materiales zu danken.

Die Messungen wurden für drei verschiedene Feldstärken — ca. 5500, 11000 und 16000 C. G. S E — und zwei verschiedenen Konzentrationen (Schichtdicke 0,25 cm) ausgeführt. Die erste Lösung (1) ist dreimal so konzentrirt als die zweite (2).

Um eine etwaige Konzentrationsänderung im Magnetfelde zu vermeiden, wurde die Glaskuvette, welche die Lösungen aufnahm, nur so gross gewählt, dass sie eben dem Lichtbündel den Durchgang gestattete. Uebrigens hat man noch keine Konzentrationsänderung von Lösungen magnetischer Stoffe im Magnetfelde beobachten können.[1])

---

[1]) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, II. Band, § 1205. (3. Aufl. 1895.)

Tabelle 2a (hierzu Tafel IV).

Dispersion in Neodymnitratlösung 1.

λ =	658	641	627	612	599	586
I. ϱ =	$0,05^0$	0,06	0,08	0,07	0,09	0,09
II. ϱ =	$0,15^0$	0,16	0,17	0,18	0,19	0,21
III. ϱ =	$0,28^0$	0,28	0,32	0,32	0,34	0,36

573	. . . .	566	561	551	541
0,16		**0,15**	0,17	0,18	0,20
0,27		**0,27**	0,30	0,31	0,32
0,40		**0,40**	0,43	0,45	0,46

532	528	. . . . . .	517	512	. . . . . .	499
0,20	**0,24**		**0,14**	**0,31**		**0,21**
0,33	**0,37**		**0,28**	**0,43**		**0,38**
0,50	**0,52**		**0,45**	**0,60**		**0,57**

491	483	474	468	462
0,27	0,27	0,28	0,30	0,35
0.41	0,41	0,45	0,47	0,50
0,62	0,62	0,63	0,66	0,70

Tabelle 2 b.

Dispersion in Neodymnitratlösung 2.

$\lambda =$	658	641	627	612	599	586
I. $\varrho =$	0,19°	0,19	0,20	0,21	0,21	0,24
II. $\varrho =$	0,32°	0,35	0,37	0,38	0,38	0,40
III. $\varrho =$	0,42°	0,46	0,51	0,52	0,55	0,57

$\lambda =$	573	. . . .	566	561	551	541
I. $\varrho =$	**0,27**		**0,25**	0,26	0,27	0,27
II. $\varrho =$	**0,43**		**0,42**	0,45	0,46	0,49
III. $\varrho =$	**0,62**		**0,64**	0,67	0,67	0,68

$\lambda =$	532	528	524	. . . .	519	515	512
I. $\varrho =$	0,30	0,31	**0,35**		**0,25**	0,33	**0,38**
II. $\varrho =$	0,51	0,54	**0,58**		**0,53**	0,60	**0,64**
III. $\varrho =$	0,71	0,74	**0,76**		**0,70**	0,81	**0,85**

$\lambda =$	. . . .	507	499	491	483	474	468	462
I. $\varrho =$		**0,27**	0,29	0,32	0,32	0,34	0,36	0,40
II. $\varrho =$		**0,55**	0,59	0,59	0,60	0,61	0,63	0,69
III. $\varrho =$		**0,79**	0,81	0,83	0,86	0,87	0,91	0,97

Tabelle 8a (hierzu Tafel V).

Dispersion in Praseodymnitratlösung 1.

$\lambda =$	642	627	612	599	597	593	......	578
I. $\varrho =$	0,11°	0,13	0,14	0,15	0,16	**0,23**		**0,14**
II. $\varrho =$	0,22°	0,23	0,24	0,27	0,29	**0,37**		**0,31**
III. $\varrho =$	0,31°	0,32	0,36	0,41	0,45	**0,51**		**0,50**

573	561	551	541	532	525	......	515	511
0,19	0,22	0,21	0,22	0,24	**0,29**		**0,11**	0,19
0,32	0,37	0,36	0,38	0,41	**0,46**		**0,31**	0,40
0,53	0,56	0,56	0,57	0,62	**0,68**		**0,60**	0,66

507	499	491	487	483	......	474	472
0,24	0,26	0,26	0,27	**0,31**		**0,16**	0,19
0,44	0,46	0,49	0,50	**0,52**		**0,39**	0,41
0,70	0,72	0,74	0,76	**0,81**		**0,71**	0,73

469	......	458	455	450	444
0,25		**0,12**	0,24	0,30	0,37
0,47		**0,38**	0,50	0,56	0,64
0,78		**0,74**	0,83	0,90	0,96

Tabelle 8b.

Dispersion in Praseodymnitratlösung 2.

$\lambda =$	627	612	599	593	. . . . . .	578	573
I. $\varrho =$	0,16°	0,17	0,18	**0,26**		**0,15**	0,17
II. $\varrho =$	0,34°	0,36	0,40	**0,46**		**0,40**	0,43
III. $\varrho =$	0,53°	0,57	0,62	**0,67**		**0,66**	0,69

$\lambda =$	551	532	524	. . . .	515	499	487
I. $\varrho =$	0,20	0,23	**0,26**		**0,20**	0,30	0,33
II. $\varrho =$	0,48	0,54	**0,58**		**0,51**	0,60	0,67
III. $\varrho =$	0,74	0,83	**0,88**		**0,84**	0,90	0,96

$\lambda =$	485	. . . . . .	474	470	468	. . . . . .	458
I. $\varrho =$	**0,35**		**0,28**	0,34	**0,39**		**0,32**
II. $\varrho =$	**0,70**		**0,63**	0,70	**0,74**		**0,71**
III. $\varrho =$	**0,98**		**0,90**	0,95	**0,99**		**0,99**

$\lambda =$	455	450	444
I. $\varrho =$	0,37	0,41	0,48
II. $\varrho =$	0,75	0,79	0,85
III. $\varrho =$	1,06	1,12	1,19

Tabelle 4a (hierzu Tafel VI).

Dispersion in Erbiumnitratlösung 1.

$\lambda =$	668	658	651	647	. . . . . .	630	627
I. $\varrho =$	0,03°	0,08	0,07	**0,10**		**0,01**	0,03
II. $\varrho =$	0,13°	0,18	0,16	**0,18**		**0,14**	0,16
III. $\varrho =$	0,21°	0,27	0,25	**0,27**		**0,26**	0,28

612	599	573	551	547	541	. . . . . .	528
0,06	0,06	0,08	0,07	0,09	**0,20**		**0,07**
0,19	0,22	0,21	0,27	0,32	**0,40**		**0,32**
0,32	0,34	0,37	0,43	0,47	**0,57**		**0,48**

523	521	. . . . . .	507	504	499	491	489
0,15	**0,20**		**– 0,10**	0,00	0,07	0,12	**0,13**
0,40	**0,44**		**0,21**	0,29	0,32	0,36	**0,41**
0,60	**0,66**		**0,48**	0,50	0,57	0,64	**0,66**

. . . . . .	470	468	455	446	. . . . . .	428	423
	– 0,05	0,02	0,13	**0,21**		**0,00**	0,18
	0,25	0,28	0,37	**0,48**		**0,35**	0,50
	0,51	0,52	0,63	**0,75**		**0,65**	0,79

Tabelle 4 b.

Dispersion in Erbiumnitratlösung 2.

$\lambda =$	668	658	651	647	. . . . . .	630	627	599
I. $\varrho =$	$0{,}11^{0}$	0,15	0,13	0,15		0,09	0,10	0,11
II. $\varrho =$	$0{,}27^{0}$	0,32	0,31	0,32		0,28	0,28	0,31
III. $\varrho =$	$0{,}42^{0}$	0,46	0,46	0,48		0,48	0,48	0,53

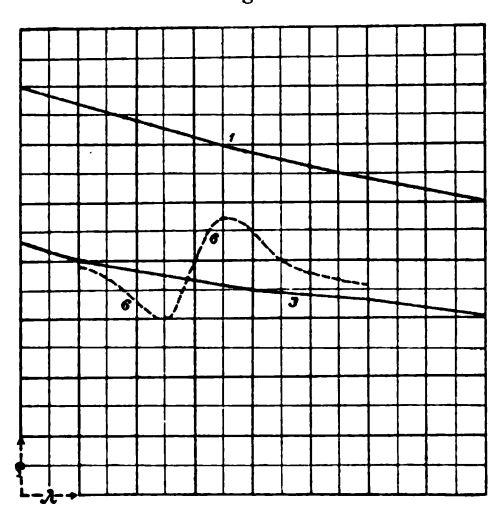
$\lambda =$	573	551	541	. . . . . .	532	523	. . . . . .	511
I. $\varrho =$	0,11	0,13	0,19		0,09	0,20		0,10
II. $\varrho =$	0,34	0,36	0,44		0,39	0,50		0,44
III. $\varrho =$	0,58	0,65	0,71		0,68	0,80		0,77

$\lambda =$	507	491	489	. . . .	474	468	461
I. $\varrho =$	0,17	0,30	0,34		0,16	0,20	0,23
II. $\varrho =$	0,48	0,60	0,66		0,51	0,54	0,56
III. $\varrho =$	0,80	0,89	0,94		0,82	0,86	0,91

$\lambda =$	449	446	444
I. $\varrho =$	0,28	0,34	0,41
II. $\varrho =$	0,63	0,67	0,73
III. $\varrho =$	0,95	0,99	1,03

Betrachten wir die Tabellen oder die zu je einer Konzentration beigegebenen Tafeln IV bis VI, dann sehen wir, dass der Gang der anomalen Dispersion in diesen negativ drehenden Lösungen nicht die erwartete, in Fig. 1 durch Kurve 5 dargestellte Form annimmt, sondern den in Fig. 2 durch Kurve 6 gegebenen Verlauf nimmt.

Fig. 2.



Zur Fixirung der Vorstellung, ohne damit über den in unseren Lösungen wirklich stattfindenden Vorgang eine Behauptung aufzustellen, denken wir uns ein negativ drehendes Salz (Kurve 3) in Wasser gelöst, dieser Lösung einen positiv drehenden Farbstoff beigegeben, dann stellt Kurve 6 den Verlauf der Drehung in einem Absorptionsstreifen des Farbstoffes dar.

Resultat:

Die vorliegenden Messungen haben folgendes Ergebnis:

In den negativ drehenden Lösungen von Neodym-Praseodym- und Erbiumnitrat sind die Anomalien in der

Drehung infolge selectiver Absorption „positiv", wenn mit dem Prädikat „positiv" der anomale Gang der Drehung in positiv drehenden absorbirenden Substanzen festgelegt ist.

Im Sinne der Elektronentheorie bedeutet dieses Resultat: Das absorbirende Jon, das die Polarisationsebene des Lichtes im Sinne der Molekularströme dreht, besitzt eine negative elektrische Ladung.

Bericht über eine von den Privatdozenten Dr. Max Blanckenhorn und Dr. Ernst Stromer von Reichenbach ausgeführte Reise nach Aegypten.

Einleitung

von **Ernst Stromer von Reichenbach.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

Angeregt durch hochinteressante Fossilfunde, welche bei der staatlichen Untersuchung der Geologie Aegyptens in dem dortigen Tertiär gemacht wurden, stellten wir im November vorigen Jahres an die k. bayerische Akademie der Wissenschaften das Ersuchen uns Mittel zu einer Reise nach Aegypten zu gewähren um dort vor allem nach Fossilien speziell Wirbeltier-Resten zu suchen und wichtige geologische Fragen einer Lösung entgegenzuführen.

Schon Anfang Dezember wurde unserem Antrage entsprochen und noch am Ende desselben Monats begaben wir uns nach Triest, um uns nach Alexandria einzuschiffen. Am 6. Januar trafen wir in Kairo ein. Unsere dortigen Reisevorbereitungen wurden durch verschiedene Freunde meines Reisegefährten besonders einen geborenen Münchner, Herrn Stadler, Beamten der Survey, und Herrn Dr. Schmidt, Professor an der medizinischen Schule, unterstützt und dadurch vereinfacht, dass ein Zelt nebst wichtigen Einrichtungsgegenständen von dessen früheren Reisen in Aegypten her in Kairo aufbewahrt wurden und nun uns gleich zu Gebote standen;

sie erlitten aber durch das Beiramfest einige Verzögerung. Wir benutzten diese freie Zeit zu kleinen geologisch-paläontologischen Erkundungsausflügen in das Mokáttam-Gebirge und über die Gizeh-Pyramiden nach Abusîr.

Am 14. Januar endlich reisten wir mit der Bahn nach Medînet el Fajûm ab, um von da aus das Mitteleocän nördlich der Fajûm-Oase zu untersuchen, das nach den Berichten von Professor Schweinfurth und anderen besonders reich an Wirbeltier-Resten sein sollte. Wir mieteten in der Stadt und in einem in der Nähe gelegenen Dorfe, Tobhár, mit der gütigen Hülfe zweier Ungarn, der Brüder Fahn, sechs Kameele mit fünf Treibern, einen Wächter und einen arabischen Diener. Dann zogen wir am 17. mit dieser Karawane über Názleh Gebâli nach Westen zum Wüstenrand und von da aus nach der im Westen der Birket el Qerûn gelegenen prächtigen Tempelruine Qasr Qerûn und von hier zunächst etwas nach Nordwesten.

Hierauf streiften wir die Gegend nördlich des genannten Sees in der Nähe der Ruinen von Dîmeh und Qasr-es-Saga ab und kamen zuletzt am 27. Januar im Nordosten des Fajûm wieder in das Kulturland nach Tamîeh, von wo aus wir mit der Bahn nach Kairo zurückkehrten.

Unsere Ausrüstung mit in Kairo gekauften Konserven sowie mit Wasser, das wir teils in Petroleumblechkisten, teils in Leinwandsäcken, die bei der Firma Reichelt in Berlin gekauft waren, mit uns führten, bewährte sich bei dieser Tour sehr gut, Schwierigkeiten hatten wir aber, weil unsere Leute vertragswidriger Weise nicht genug Kameelfutter mitgenommen hatten. Eine Beschaffung desselben durch Vermittlung von Fischern, die wir am See öfters antrafen, scheiterte an den zu hohen Forderungen derselben, unsere Kameele mussten sich deshalb mehrere Tage lang mit den am See wachsenden Tamarisken und Schilf begnügen und wir unsere Route darnach abändern.

Da wir auf dieser Tour in dem untersuchten Mitteleocän (Obermokáttam) nicht genügende Funde gemacht hatten, beschlossen wir auf unser Risiko nochmals dorthin zu ziehen

und noch andere Touren zu unternehmen, um möglichst viel Material zu sammeln und um zugleich auch verschiedene besonders interessante stratigraphische Probleme in Angriff zu nehmen.

Nach neuen Vorbereitungen und Erkundigungen bei dem Chef der geologischen Landesuntersuchung, Captain Lyons, gelang es uns durch Vermittlung eines deutschen Baumeisters, Brugger, bei den Gizeh-Pyramiden fünf Kameele nebst Treibern zu erhalten, auch mieteten wir einen französisch sprechenden Diener, der den bekannten Paläontologen Prof. Mayer Eymar und meinen Kollegen schon öfters begleitet hatte. Mit diesen Leuten brachen wir am 6. Februar auf und zogen durch die Kieswüste direkt nach Südwesten, bis wir nach drei Tagen den nördlichsten Punkt von Professor Schweinfurths Fajûmreise von 1886 (Verh. Ges. f. Erdk. Berlin 1886 S. 21) erreichten.

Dieses Mal gelang es uns durch die Fischer frisches Futter und Wasser über die Birket-el-Qerûn holen zu lassen, auch bewährten sich unsere Beduinen viel besser als die Fajûm-Fellachen der ersten Tour und so konnten wir unserer Absicht entsprechend mehrere Tage lang die Plateauhöhen und Ränder nördlich des Sees absuchen und vor allem auch die auf der ersten Tour nicht erreichten knochenführenden Schichten des Obereocäns untersuchen.

Am 18. Februar verliess ich in Tamîeh die Karawane um im Fajûm zoologische Objekte zu erwerben, meine Absicht aber in der Birket-el-Qerûn Plankton zu fischen, konnte ich leider nicht durchführen, da es zu viel Zeit und Kosten beansprucht hätte und so kehrte ich nach Kairo zurück, wo auch mein Kollege, der mit der Karawane auf dem direkten Wüstenwege zu den Gizeh-Pyramiden gezogen war, am 20. Februar anlangte.

Um auch das Jungtertiär zu durchforschen, beschlossen wir nun das Natronthal zu besuchen, wobei uns die Direktion der dortigen Salt and Soda Co. ihre Unterstützung zusagte. Wir trafen schon am 24. Februar abends bei der Fabrik dortselbst mit Hilfe der von Katátbeh in das Thal führenden Kleinbahn

der Gesellschaft ein und erfreuten uns dort der bereitwilligsten Unterstützung der Angestellten der Compagnie, so dass wir in mehreren Tagen unsere geologisch-paläontologischen Studien durchzuführen im Stande waren und ich auch einige Plankton-Fangzüge in den Salzseen machen konnte.

Nach Kairo zurückgekehrt fuhren wir dann am 4. März von einem Diener begleitet mit der Bahn nach Wasta. Dort mieteten wir drei Esel mit Treibern und einen Wasserträger und machten einen zweitägigen Ausflug in die östliche Wüste, wo wir südlich des Uadi Ramlîeh im unteren Mokáttam nach Fossilien suchten und zahlreiche schöne Fischzähne erbeuteten. Direkt von Wasta aus fuhren wir endlich mit der Bahn nach Luxor, wohin zu kommen uns Professor Schweinfurth aufgefordert hatte. Mit ihm unternahmen wir dort einen Ausflug nach Qurna zur Untersuchung der dortigen Fundorte prähistorischer Artefakte. Ich musste leider schon am 9. März nach Kairo zurückkehren, um meine zoologischen Sammlungen zu vervollständigen und am 15. nach Europa heimreisen. Mein Reisegefährte machte jedoch bei Luxor mit Professor Schweinfurth noch mehrere geologische Exkursionen und dann auch einige bei Kairo und fuhr erst am 21. März nach Triest ab.

Unsere Fossilfunde, die wir an die paläontologische Staatssammlung in München ablieferten, umfassen hauptsächlich der Absicht unserer Reise entsprechend Wirbeltier-Reste und zwar solche von Hai- und Knochenfischen aus dem Unter-Mokáttam des Uadi Ramlîeh, dem Ober-Mokáttam nördlich der Birket-el-Qerûn und dem Pliocän des Natronthales, von Schildkröten und Krokodilen aus den letzteren beiden Stufen sowie aus obereocänen Schichten nördlich von Qasr-es-Saga und endlich von Schlangen, Waltieren und Seekühen aus dem Ober-Mokáttam nördlich der Birket-el-Qerûn und von Landsäugetieren von ebenda sowie aus dem dortigen Obereocän und dem Pliocän am Fusse des Gart Muluk im Natronthale. Leider wurde unsere paläontologische Ausbeute dadurch beeinträchtigt, dass die Hauptfundplätze am Qerûn See und am Gart Muluk schon abgesucht

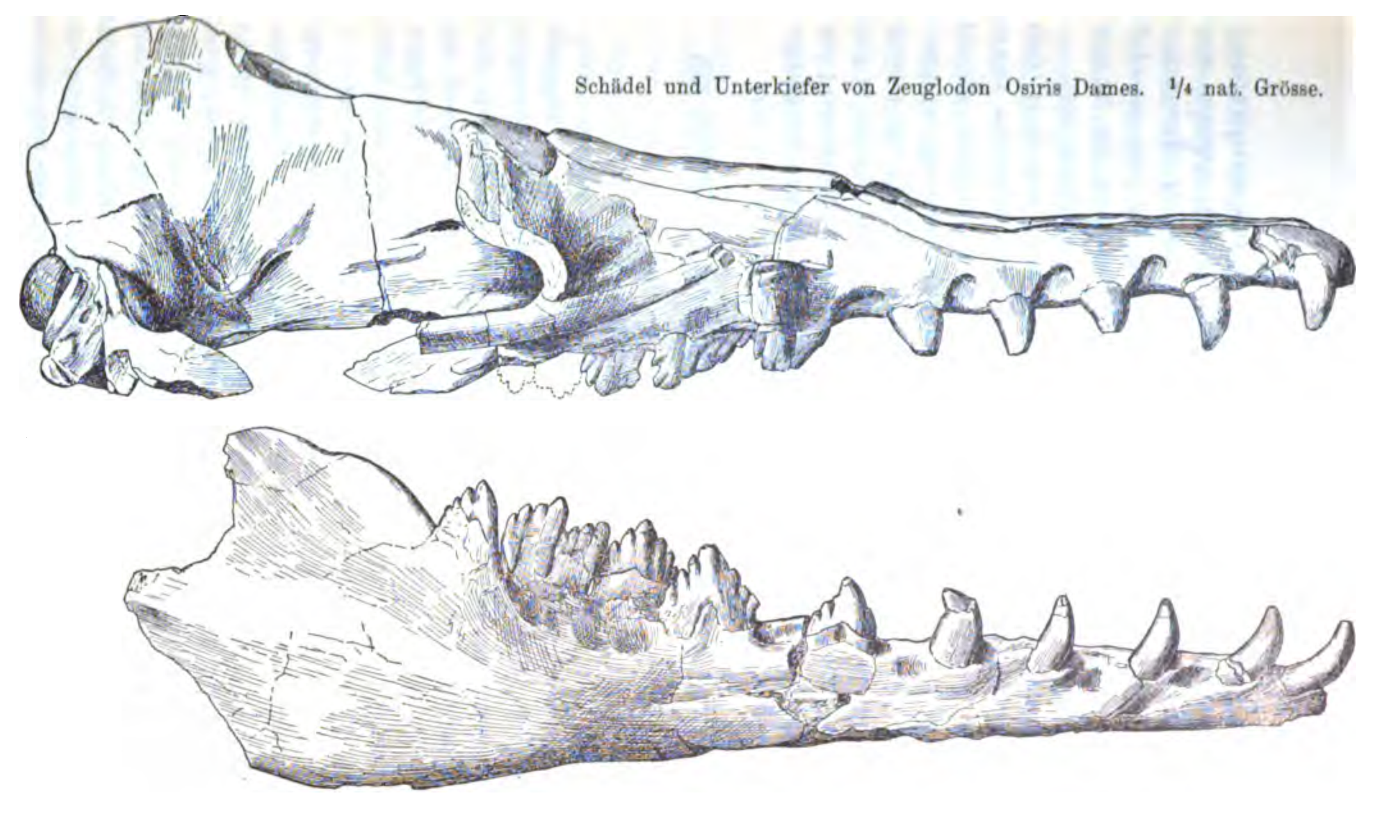
waren und dass die Stücke teils sehr verwittert teils recht zerbrechlich waren, doch gelang es immerhin viele recht wertvolle Reste zu bergen. Diese sind noch in Bearbeitung, im Folgenden will ich nur eine kurze Beschreibung eines der besten Stücke, eines Zeuglodon-Schädels, geben. Ausserdem wurden noch Conchilien und Gesteinsproben gesammelt und zahlreiche Profile aufgenommen, die meinem Reisegefährten zur Vervollständigung seiner geologischen Beobachtungen dienen, deren Resultate er im Folgenden bringen wird.

Es erübrigt mir nur noch auch im Namen meines Kollegen der hohen Akademie der Wissenschaften für die Bewilligung von Mitteln, der Direktion des österreichischen Lloyd für gewährte Fahrpreisermässigung, sowie all den Behörden und Herren, die uns direkt oder indirekt unterstützt haben, insbesondere Herrn Geheimrat v. Zittel, unseren Dank auszusprechen.

Ein Schädel und Unterkiefer von Zeuglodon Osiris Dames.

Der Schädel, von welchem ich hier eine vorläufige Beschreibung und Abbildung gebe, wurde von mir am Westrande der Plateaubucht nördlich von Dimeh gefunden. Er lag isoliert und in mehrere Stücke zerbrochen auf einer Terrasse im unteren Drittel des Plateauabfalles in grauem, z. Z. rotgelbem Mergel (nach Dr. Blanckenhorn unterer Knochenhorizont der Stufe II 5 a). Infolge starken Gipsgehaltes desselben ist das Fossil leider etwas verdrückt und die Oberfläche sowie der Zahnschmelz speziell an den kegelförmigen Zähnen grossenteils zerstört.

Der Schädel ist von rechts oben her etwas schief verdrückt, die hinteren Backzähne sind beiderseits nach innen gepresst und die Jochbogen sowie die Ohrregionen sind unvollständig. Ein sehr grosses linkes Paukenbein lag dicht bei dem Schädel. Der rechte bis auf das Gelenkende vollständige Unterkieferast war in seiner natürlichen Lage an den Schädel



Schädel und Unterkiefer von Zeuglodon Osiris Dames. 1/4 nat. Grösse.

angepresst, er ist aber wie der linke hinter dem ersten Zackenzahn zerbrochen und etwas auseinander gezerrt. Von dem anderen Ast, der etwas verschoben am Schädel lag, fand ich auch das Gelenkende, während sein Symphysenteil offenbar zerstört war, denn ich konnte davon nur drei isolierte Kegelzähne am Schädel liegend entdecken.

Wie die am Schlusse angegebenen Maasse zeigen, ist der Unterkiefer nur wenig grösser als der von Dames (Paläont. Abh. Bd. V, Jena 1894, pag. 189 ff., Taf. 30) beschriebene von Zeuglodon Osiris, der im gleichen Horizont einige Stunden weiter westlich von Schweinfurth gefunden wurde. Ich habe in Betreff des Unterkiefers die Angaben von Dames nur in wenigem zu ergänzen und zu berichtigen.

Das nur schlecht erkennbare Hinterende der sehr langen Symphyse ist wohl unten durch ein kleines Eck unter der Mitte des rechten ersten Zackenzahnes angedeutet. Die Abstände der Kegelzähne sind nicht ganz gleich, diese sind alle ein wenig nach hinten innen gekrümmt. An dem zweiten Kegelzahn kann ich keine Kante hinten erkennen, der letzte ist stärker als die anderen, etwas mehr oval im Querschnitt und eine Teilung seiner Wurzel innen durch eine Furche nur eben angedeutet. Die Grube hinter dem ersten Zackenzahn ist deutlich länger als Dames fand, vielleicht vor allem, weil Brüche hier durchgehen. An dem 2. linken Zackenzahn und am 3. beiderseits fand ich hinten unten noch eine ganz kleine 4. Zacke, die oberste hintere am 4. Zackenzahn ist deutlich und am 5. hinten unten eine kleine 3. Zacke ausgebildet.

Die Vorderseite des 1. Zackenzahnes ist kaum sehr scharf, die des vierten aber scharf statt gerundet. Am sechsten ist die Rinne für den vorletzten Zahn buccal nur schlecht begrenzt, da hier eine Kante kaum ausgebildet ist, auch ein Basalhöcker ist nicht vorhanden. Ein Cingulum endlich sehe ich nur am dritten rechten Zackenzahn buccal hinten angedeutet und der Schmelz ist ganz fein senkrecht gestreift.

Der Processus coronoideus steigt direkt hinter dem letzten Zahn jedoch nicht steil an und ist im Gegensatz zu dem der typischen Zahnwale wohl entwickelt. Der Condylus ist nur wenig höher als breit und nur etwas von oben nach unten konvex, sein inneres oberes Eck springt deutlich vor.

Die oberen Kegelzähne entsprechen in Zahl und Form den unteren, sie nehmen nach hinten an Stärke zu und am fünften ist lingual auch eine Teilung der Wurzel eben angedeutet, die Wurzel aber thatsächlich einfach. Die ersten sind nicht ganz vorn und nicht wie die unteren dicht aneinander gerückt. Die Abstände der Zähne sind übrigens auch hier nicht ganz gleich.

Die Kronen der meisten Zackenzähne sind leider etwas lädiert oder abgebrochen, durch gegenseitige Ergänzung der beiderseitigen Zähne lässt sich aber die Form fast stets feststellen.

Der erste zweiwurzelige Zackenzahn bildet auch hier ein ziemlich gleichschenkeliges Dreieck, an seiner scharfen Vorderkante sind wahrscheinlich 3 kleine, an seiner Rückkante 3 grössere und nach unten klein werdende Zacken ausgebildet. Die Lücke zwischen ihm und dem nächsten Zahn ist links sehr gering, rechts wohl infolge von Verdrückung überhaupt nicht vorhanden, die weiteren Zähne stehen wie unten dicht aneinander gedrängt. Der zweite nur links vorhandene Zackenzahn ist wohl nur durch Verdrückung ganz ungleichschenkelig, er besitzt vorn mindestens 3, hinten 2 deutliche und unten eine ganz kleine Zacke und buccal vorn anscheinend ein ganz schwaches Cingulum.

Der dritte Zackenzahn ist wieder ziemlich gleichschenkelig und besitzt vorn 2, hinten 3 deutliche Zacken, welch letztere nach unten zu kleiner werden. Die 2 letzten Zähne, nur links erhalten, sind deutlich kleiner als die vorderen, fallen nach vorn etwas steiler als nach hinten zu ab und besitzen vorn eine, hinten 2 deutliche Zacken.

Was nun die Zahnformel anlangt, so lässt die deutliche Naht zwischen Ober- und Zwischenkiefer erkennen, dass hier

wie bei den bisher beschriebenen Zeuglodon-Arten oben und unten 3 Eckzahn-ähnliche Incisivi vorhanden sind, und dass im Gegensatz zu fast allen Angaben der 1. Prämolar kegelförmig mit ungeteilter Wurzel ausgebildet ist. Ob man die 3 weiteren oben und unten ziemlich gleichschenkelig ausgebildeten Zackenzähne als Prämolaren und die letzten 3 Zähne unten, resp. 2 oben, als Molaren betrachten darf, lässt sich mit Sicherheit nicht angeben.

Wie vorn am Unterkiefer, so finden sich auch oben Gruben für die Spitzen der opponierten Zähne, die vorderste liegt vor dem 1. Zahn, die weiteren bis zum 1. Zackenzahn befinden sich buccal, die letzten aber lingual. Die Grenze von Ober- und Zwischenkiefer am harten Gaumen lässt sich leider nicht erkennen, dieser bildet zwischen den drittletzten Backzähnen wie beim Delphin einen stumpfen Winkel, er ist hier verdrückt, so dass sich nicht feststellen lässt, ob nicht Lücken vorhanden waren. Da das Gaumendach noch mindestens 0,05 m hinter die letzten Zähne reichte und die seitliche Begrenzung der Choanen als allerdings schwache Kanten an der Schädelbasis fortgesetzt sind und auch der Seitenrand des Basioccipitale ähnlich wie beim Delphin vorspringt, ist die Schädelunterseite, soweit erkennbar, ziemlich Denticetenähnlich ausgebildet.

Das isoliert bei dem Schädel gefundene Paukenbein ist im Verhältnis zu diesem sehr gross, so dass nicht sicher ist, ob es zu ihm gehört, es gleicht so ziemlich dem von Joh. Müller in seiner Monographie über Zeuglodon Tafel II abgebildeten, lässt aber die beim Delphin deutliche Einkerbung am Hinterende erkennen, während der zapfenförmige Vorsprung am freien Rande wohl abgebrochen ist.

Der Hirnschädel und die Schläfengruben haben gar nichts Walfisch-ähnliches, sie gleichen vielmehr, speziell von oben gesehen, im allgemeinen Habitus auffällig denjenigen von Otaria. Die Condyli occipitales sind viel deutlicher abgesetzt als beim Delphin, stark konvex und laufen ventral gegen die Mediane spitz zu. Die Crista occipitalis und sagittalis springt ähnlich wie

bei Otaria stark vor, das Hinterhaupt ist etwas konkav und median kaum mit einer Kante versehen, rechts ist deutlich die Naht des stark seitlich ausgedehnten Occipitale laterale mit dem Squamosum zu sehen, oben wie an den Schläfengruben sind aber leider keine Nähte erkennbar.

Letztere sind sehr weit und nicht von den Augenhöhlen abgegrenzt, diese aber sind vorn wie beim Delphin von seitlich stark vorspringenden Fortsätzen der breiten Stirn überdacht und hier ziemlich klein, ihr Vorderrand liegt ober dem des letzten Backzahnes. Der die untere Begrenzung bildende Jochbogen war wohl wie beim Delphin ziemlich gerade, ist vorn stabförmig, hinten aber am Squamosum stark und seitlich platt. Das nur zum kleinen Teil erhaltene Gelenk für den Unterkiefer sah wahrscheinlich in der Hauptsache nach vorn.

Die sehr gut sichtbare Umgrenzung der Nasenbeine zeigt, dass deren Hinterende ungefähr ober dem Rostralrande der Augenhöhle und das Vorderende ober dem des 1. Zackenzahnes liegt. Die Prämaxillen reichen als schmale Streifen bis neben die Mitte dieser Knochen, während die Naht zwischen den Stirn- und Oberkieferbeinen wohl von deren Hinterende ausgehend zur Seite herabläuft. Die Prämaxillen begrenzen die nach vorn in eine schmale Furche auslaufende Nasenöffnung seitlich und besitzen an dieser Furche eine vorn und hinten verlaufende Längskante. Die Naht endlich zwischen ihnen und den Oberkiefern lässt sich sehr deutlich bis zu der Grube für die Spitze des unteren Eckzahns hinter dem 3. Kegelzahn verfolgen, wie sie auch bei Squalodon und manchmal auch bei recenten Delphinen verläuft. Die scharfe lange Schnauze ist also wieder etwas Zahnwal-ähnlich.

Maasse in Metern.

Unterkiefer.

Abstand der Spitze von dem Vorderrand des 1. Zackenzahnes	0,25
„ von da bis zum Hinterrand des 6. „	0,235
Länge der Zahnreihe vom 2.—6. Zackenzahn . . .	0,178 (0,174)
Dicke des Kiefers vor dem 2. Kegelzahn	0,024
„ „ „ „ „ 1. Zackenzahn . . .	0,031 (0,03)

Höhe des Kiefers unter dem 2. Kegelzahn . . .	0,038
„ „ „ „ „ 1. Zackenzahn . . .	0,058
„ „ „ „ „ 6. „ . . .	0,115 (0,116)
„ „ „ am Proc. coronoideus	0,185 (0,18)
Abstand der 1. und 2. Zahnalveole	0,012
„ „ Alveolen bis zum 1. Zackenzahn . . .	0,029—0,025
Grube hinter dem 1. Zackenzahn	0,024 (0,022)
Längsdurchmesser der Alveolen der Kegelzähne . .	0,02—0,025
Querdurchmesser „ „ „ „ . . .	0,016—0,017
Länge der Basis des 1. Zackenzahnes	0,036 (0,038)
„ „ „ „ 2. „	0,05 (0,049)
„ „ „ „ 3. „	0,051
„ „ „ „ 4. „	0,028 (0,027)
„ „ „ „ 5. „	0,026
„ „ „ „ 6. „	0,028
Condylus sinister grösste Höhe	(0,033)
„ „ „ Breite	(0,032)

Schädel.

Länge von der Schnauze bis zum For. magnum . .	0,68
„ des harten Gaumens, mindestens	0,52
Breite des Gaumens am 5. Kegelzahn, ungefähr . .	0,038
„ grösste am Proc. zyg. Squamosi „ . .	0,28
„ „ der Stirn, ungefähr . .	0,24
Entfernung der Schnauze vom hinteren Nasenlochende .	0,28
„ von da bis zur Mitte der Crista occip. . .	0,36
Länge der Nasenbeine	0,16
„ des linken Zwischenkiefers, ungefähr . . .	0,345
Höhe des Hinterhauptes vom Oberrand des For. magnum zur Mitte der Crista occip., ungefähr . . .	0,13
Längsdurchmesser der Basis des 2. Kegelzahnes . .	0,02
„ „ „ „ 5. „ . . .	0,025 (0,022)
Querdurchmesser „ „ „ 5. „ . . .	0,016
Länge der Basis des 1. Zackenzahnes	0,043 (0,042)
„ „ „ „ 2. „	0,051 (0,042)
„ „ „ „ 3. „	0,039
„ „ „ „ 4. „	(0,024)
„ „ „ „ 5. „	(0,02)
Abstand des Vorderrandes des 1. und 6. Zahnes . .	0,265 (0,257)
„ von da bis hinter den letzten Zahn . . .	(0,183)
Zahnreihe-Länge vom 2. bis letzten Zackenzahn . .	(0,127)

Linkes Paukenbein.

Grösste Länge	(0,072)
„ Breite	(0,05)

(Die links abgenommenen Maasse sind in Klammern angegeben, wo sie von den anderen abweichen oder wo diese nicht abnehmbar sind.)

Neue geologisch-stratigraphische Beobachtungen in Aegypten.

Von **Max Blanckenhorn.**

(Eingelaufen 8. November.)

Die bisherige geologische Erforschung Aegyptens hat, trotzdem sie gerade im letzten Jahrzehnt durch die Studienreisen und Aufsammlungen Schweinfurths, Mayer-Eymars, Sickenbergers, Fourtaus, Hulls, E. Fraas und anderer Forscher und die Aufnahmsarbeiten der 1896 neu gegründeten Geological Survey of Egypt unter Captain Lyons Direktion, an denen ich selbst mich auch 2 Jahre beteiligte, ganz ungeahnte Fortschritte gemacht hat, doch noch viele offene Fragen und Lücken in der Erkenntnis der geologischen Vergangenheit Aegyptens gelassen. Auf meiner diesjährigen, mit wohlwollender Unterstützung der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften gemeinsam mit Herrn Privatdozent Dr. Stromer v. Reichenbach unternommenen Reise nach Aegypten bemühte ich mich, einer Lösung wenigstens eines Teils dieser Fragen nachzugehen und den Besuch solcher Punkte in das Reiseprogramm aufzunehmen, die neue geologisch-stratigraphische Ergebnisse versprachen.

Schon die am besten bekannte, weil leicht erreichbare Umgegend von Kairo, die einen der geologisch interessantesten, paläontologisch reichsten Teile Aegyptens darstellt, bietet für den Geologen eine Fülle von anregenden Fragen und Rätseln, die noch nicht in vollkommen befriedigender Weise gelöst sind. Von der östlichen Nilseite nenne ich hier nur folgende Themata: das Schichtenprofil des Eocäns am Gebel el-Ahmar,

an den Mosesquellen, am Bir el-Fahme und am Gebel Turra und Hof; die Veränderungen im Profil der Eocänschichten in nordsüdlicher und westöstlicher Richtung; die nördliche Verbreitungsgrenze der eocänen Mokattamstufe; das genaue Alter des Gebel Ahmar-Sandsteins und der Versteinerten Wälder; das eventuelle Vorkommen fossiler Knochen zwischen den Versteinerten Wäldern; das genaue Alter des Basalts von Abu Zabel und der übrigen Basalteruptionen im N. der Arabischen Wüste, die gangförmigen Sandsteinbildungen daselbst, das westlichste Vorkommen des echt marinen Miocäns; das Alter der Dünen von Khanka; die tektonischen Verhältnisse im südlichen Mokattamgebirge.

Auf dem linken Nilufer tauchen wieder andere Fragen auf: Gehören die tiefsten Kreideablagerungen unter der Gaʿa-Pyramide dem Cenoman oder Turon an? Wie ist das Eocän und Oligocän im NW. von Abu Roasch beschaffen? Welche Schichten des Eocäns enthalten die von Fourtau, Cossmann und Prien beschriebenen Seeigel, Konchylien und Fischreste am Gebel Kibli el-Ahram? Gibt es marines Miocän im S. der grossen Pyramiden? Bilden die Clypeastersandsteine am Gebel Schellul eine besondere Pliocänstufe unter den Sanden mit Ostrea cucullata?

In weiterer Entfernung von Kairo verdienten zunächst die stratigraphischen und tektonischen Verhältnisse im Pliocän des Wadi Natrūn weitere Aufmerksamkeit. Seit Russeggers Besuch im Jahre 1836 war dieses Thal nur höchst selten und dann immer ganz flüchtig von Geologen besucht worden, so von Sickenberger 1892, von Lyons 1894, von Beadnell 1897, von mir 1898 (auf nur 2 Nächte), von Barron und Andrews 1901.

Auch die übrigen nördlichen Teile der Libyschen Wüste bedürfen noch sehr der geologischen Erforschung. Ganz besonders gilt das für das Dreieck zwischen dem Wadi Natrūn, den Pyramiden von Gizeh, dem Nilthal und dem nördlichen Fajūmrand, das auch von der Geological Survey of Egypt noch nicht ernstlich in Angriff genommen worden ist, obwohl es vor den Thoren Kairos gelegen ist. Im NW. der Birket el-Qerūn interessieren die dort durch ihren Fossilreichtum

geradezu berühmten Oberen Mokattamschichten, ebenso wie die höheren fluviomarinen obereocänen und oligocänen Ablagerungen mit ihren Basalten und die tektonischen Verhältnisse.

Im südlichen Oberägypten bedarf die Konchylienfauna der Grenzschichten zwischen Kreide und Eocän, der Kurkurstufe und der Esnehschiefer bei Theben, aus denen sich bisher so gut wie nichts in Deutschen Sammlungen befand, noch gründlicher Studien. Das Vorkommen und die Entstehung der roten Breccien ist noch aufzuklären, weiterhin die Herkunft des Natrons im südlichen Natronthal bei el-Qab und bei Bir Malha im S. der Selima-Oase in Oberägypten, ebenso wie im Wadi Natrūn und Wadi Tumilāt. Die Diluvialterrassen des Nilthals mit ihren eingeschlossenen Artefakten spielen für die wichtige Frage nach dem relativen Alter und der Kultur des paläolithischen Menschen in Aegypten eine ausschlaggebende Rolle.

Es könnten noch viel mehr derartige lösenswerte Fragen der Geologie Aegyptens aufgezählt werden. Die angeführten genügen, um zu zeigen, dass Aegypten, speziell die Umgebung des Nilthals ausser rein paläontologischen auch zahlreiche geologische Forschungsziele bot, die eine wissenschaftliche Studienreise lohnend und interessant machen konnten. Es versteht sich von selbst, dass wir während eines 2½ monatlichen Aufenthaltes in Aegypten nur für einen Teil dieser mannigfachen Themata die nötige Zeit zu Studien und Beobachtungen fanden.

Die geologischen Ergebnisse unserer Reise verteilen sich sachlich geordnet in 7 Kapitel. Sie bringen Neues zur Kenntnis:

1. der Grenzschichten zwischen Kreide und Eocän im Nilthal,
2. der Mokattamstufe oder des Mitteleocäns,
3. des Obereocäns und Oligocäns,
4. der Basalte der Libyschen Wüste,
5. des Neogens und Quartärs im Nilthal,
6. des Pliocäns im Wadi Natrūn,
7. der tektonischen Verhältnisse.

1. Ueber die Grenzschichten zwischen Kreide und Eocän in Aegypten.

Im Jahre 1868 machten Delanoüe und d'Archiac[1]) in einer Beschreibung eines geologischen Profils der Gegend von Theben auf eine paläontologisch besonders ausgezeichnete Schicht von Blättermergeln aufmerksam, welche an der Basis der dortigen Plateauabfälle in einer Mächtigkeit von 31 m erscheint und eine Schicht weissen, fossilleeren Kreidekalks zur Unterlage hat. Es sind aschgraue Mergel oder Papierschiefer, biegsam wie Papiermaschee mit vielen Konkretionen und Muschelsteinkernen von Brauneisenstein. Die Fauna dieser Schicht 5 des Delanoüe'schen Profils ist lokal, speziell bei Theben ungewöhnlich reichhaltig. D'Archiac[2]) identifizirte nach Delanoües Aufsammlungen mehr als 40 Formen von kleinen Mollusken, Seeigeln, Crinoiden und Einzelkorallen mit bekannten Arten des Londonthons der Themse, der sandigen Thone von Bracklesham und der ältesten Nummulitenschichten Europas. Diese Liste bedarf heute sicher einer Revision.

v. Zittel,[3]) der die in Paris aufbewahrten Originale Delanoües und d'Archiacs einer flüchtigen Prüfung unterzog, hielt jene Schichten für Aequivalente seiner obersenonen Blättermergel der grossen Oasen, die ja ebenso wie die Fauna der dortigen obersten weissen Kreide einen halbeocänen[4]) Charakter besitzt. Doch machte er selbst keine Aufsammlungen darin. Auch sonst ist seitdem von weiteren Funden oder paläontologischen Studien in diesen Schichten nichts besonderes bekannt geworden. Wunderbarerweise scheint Mayer-

---

[1]) Note sur la constitution géol. des environs de Thèbes, presentée par d'Archiac.

Compt. rend. hebd. des séances de l'acad. des sc. 1868. Paris.

[2]) Remarques à propos de la communication de Delanoüe sur les foss. des environs de Thèbes. Ibidem p. 707.

[3]) Beiträge zur Geologie der Lib. Wüste. Palaeontogr. XXX, Vorwort, p. 78 und 103.

[4]) Wanner. Die Fauna d. oberst. weiss. Kreide d. libyschen Wüste. Palaeont. XXX. 1902. S. 92.

Eymar, soweit mir bekannt, hier nicht zum Sammeln gekommen zu sein. In seinem System des Tertiärs würde es wohl, vermute ich, unter sein Suessonianum II fallen.

Fourtau[1]) sprach 1900 die Meinung aus, dass die Blättermergel von Theben eine pelagische Facies der untersten Suessonienstufe repräsentiren, welche weiter südlich in der Oase Kurkur in litoraler Facies als Thon mit Bothriolampas abundans, May.-Eym. sp., und anderen Fossilien entwickelt seien.

Diese charakteristische 5 m starke Schicht von gelbem Mergelthon war zuerst von Willcocks und Sickenberger zwischen der Oase Kurkur und dem Gebel Garra westlich Assuan sowie auch an den Dungulquellen entdeckt und später von Mayer-Eymar untersucht worden. Sie führt Seeigel, Austern und andere Mollusken in Form von ockergelben, kalkigen Steinkernen oder schlecht erhaltenen Schalen, sowie das im Eocänkalk oder Mergel Aegyptens die Regel ist. Dabei gehören die Formen mit Ausnahme des Bothriolampas alle den im Eocän herrschenden Gattungen, zum Teil auch denselben Arten an. Dass es sich bei Theben und Kurkur um 2 ganz verschiedene Facies handelte, war klar.

In Ermangelung von prüfbarem paläontologischem Material von Theben schloss ich mich 1900 mit Vorbehalt vorläufig Fourtaus Meinung an und betrachtete die Blättermergel des Nilthals als heteropisches Aequivalent meiner „Kurkurstufe".[2]) Mit letzterer eröffnete ich im Anschluss an Mayer-Eymar, der die Kurkurstufe als Suessonianum I bezeichnet hatte, die Reihe der Untereocänstufen, die so auf die Zahl drei (Kurkurstufe, Untere und Obere Libysche Stufe) erhöht war.

Die englisch-ägyptischen Geologen Beadnell, Barron und Ball kamen bezüglich des Alters der Blättermergel im Nilthal, die sie von Esneh bis Qeneh verfolgten, zu der nämlichen Auffassung und einigten sich für dieselben nach einem typi-

---

[1]) Observations sur les terr. eocènes et oligocènes d'Egypte. Bull. soc. géol. France. (3) XXVII, 1900, S. 481.

[2]) Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. 1900, p. 405.

schen Vorkommen über den Namen „Esnehschiefer", den sie auf dem Pariser Internationalen Geologen-Congress 1900 in Vorschlag brachten. Die eigentlichen Kurkurschichten blieben ihnen hingegen unbekannt.[1])

Ihre Esnehschiefer haben nun die genannten Geologen auch in der Oase Chargeh (hier 80 m stark) und Farafra (hier in der ungewöhnlichen Mächtigkeit von 150 m) wieder zu erkennen geglaubt. Diese Identificirung muss vor näherer paläontologischer Begründung auf einige Zweifel stossen. Was die dem Nil zunächst gelegene Oase Chargeh betrifft, so war auch Mayer-Eymar auf Sickenbergers Beobachtungen hin geneigt dortselbst ein Suessonianum II d. h. tiefes Untereocän speziell im NNW der Oase am Gebel Ramlieh anzunehmen. Ball, der die Oase am genauesten untersuchte, erklärt seine Esneh-Schiefer, die nur am Ostrand der Oase Chargeh deutlich ausgebildet sein sollen, für versteinerungsleer, hat also jedenfalls nichts darin gesammelt, so dass sich vorderhand nichts weiter darüber sagen lässt.

In der Oase Farafra hatte v. Zittel den ganzen Abhang des Plateaus von el-Guss Abu Said zum Typus seiner Libyschen Stufe erhoben, deren grösster Theil von dunkelgrünen Mergeln eingenommen war. Die von v. Zittel gegebene Faunenliste dieser Schichten (darunter Operculinen, Nummuliten) schliesst sich in vieler Beziehung aufs engste an die höheren Teile der Libyschen Stufe und unterscheidet sich durchaus von der Liste der Blätterthone von Theben bei d'Archiac, so dass diese beiden jedenfalls gar nicht verwechselt werden können. Beadnell[2]) hat trotzdem diese 100—150 m Schieferthone unter den eigent-

---

[1]) In einer soeben erschienenen Publikation des Survey Department: On the topographical and geological results of a reconnaissance-survey of Jebel Garra and the Oasis of Kurkur. Cairo 1902 von J. Ball wird auf die gelben Suessonienthone mit „Rhynopygus (!) abundans" von Kurkur nur mit wenigen Worten negativen Inhalts eingegangen, indem der Verf. diese geologisch zweifellos interessanteste Schicht der Kurkur-Gegend gar nicht gesehen hat.

[2]) Farafra Oasis: Its topography and geology. Geolog. Survey Report 1899. III. Cairo 1901, p. 20.

lichen Alveolinenkalken oder dem Plateau Limestone von der Libyschen Stufe Zittels abgetrennt und ihr als (eocäne) Esneh-Schiefer gegenübergestellt. Das widerspricht allen Regeln der Nomenklatur und ist eine sträfliche Vernachlässigung des paläontologischen Moments.

Nur an einigen Stellen, so 8 Kilometer westlich Farafra, beobachtete Beadnell an der Basis des Thonkomplexes Blätterthone mit Brauneisenstein-Fossilien, die angeblich [1]) kretaceischen Gattungen angehören. Es sind nach meinen eigenen früheren Bestimmungen und Notizen dazu: Einzelkorallen neuer Gattung der Familie der Eupsammiden (jetzt Palaeopsammia Wanner), Trochocyathus sp., Macropneustes sp., Nucula (wohl chargensis Quaas), Leda (leia Wann.), Axinus (cretaceus Wann.), Natica (farafrensis Wann.?), Alaria (wohl Schweinfurthi Quaas?), Cinulia (Ptahis Wann. sp.), Cassidaria sp., Trochus sp., Voluta sp., Pleurotoma (?) sp.: Das sind lauter Formen, wie sie die tieferen obersenonen Blättermergel unter der weissen Kreide charakterisiren.

Diese 3—5 Meter Blätterthon [2]) allein, welche Beadnell der Kreide zurechnet, wäre er berechtigt gewesen als Esneh-Schiefer zu bezeichnen, nicht aber die höheren 150 Meter. Denn sowohl d'Archiacs Liste als Beadnells [3]) eigne kurze Angabe über die Fauna der Esnehschiefer („Nucula, Leda, Aturia, Nautili") passt auf diese kretaceischen Schichten, nicht auf die höheren, sicher eocänen.

Legt man die bisherigen Kenntnisse, die wir von dem stratigraphischen und paläontologischen Charakter der Blättermergel der Gegend von Theben und Esneh haben, zu Grunde, so kann man unter Esneh-Schiefer nur eine Stufe oder Schicht in der Facies der Blättermergel verstehen, welche über dem weissen Kreidekalk mit Ananchytes ovata, Schizorhabdus liby-

---

[1]) l. c. p. 21.

[2]) „green shaly clays with numerous fossils in ironstone."

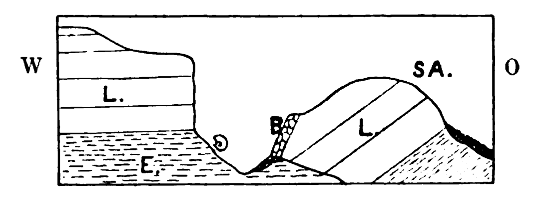
[3]) Recent Geolog. Discoveries on the Nile Valley and Libyan Desert 1900, p. 5 und Compte Rendu du VIII Congrès Géolog. International 1900. Paris. 2 fasc. p. 842.

cus etc. und unter der Libyschen Stufe Zittels mit Operculina libyca, Alveolinen und Nummuliten liegt. Die Fauna wäre nicht eocän, wie die der Libyschen Stufe, sondern vorwiegend kretaceisch und schlösse sich aufs engste an diejenige der Blättermergel des Oberdanien der Oasen an.

Nachdem letztere jetzt von Quaas genau untersucht und beschrieben ist, erscheint nun ein Vergleich der Fauna der wirklichen Esnehschiefer höchst wünschenswert.

Es gelang mir, während meines diesjährigen Aufenthaltes in Luxor einen Fossilienfundort ausfindig zu machen. Er liegt über dem Fuss des Gebirgs-Steilabfalls hinter dem Hügel von Scheich Abd el-Qūrna zwischen Dēr el-Bahri und Dēr el-Medīne etwa an der dortigen Wasserscheide. Dann machte ich noch Herrn Professor Schweinfurth auf diesen Abhang aufmerksam, der nachher noch mit viel Erfolg hier gesammelt hat.

Fig. 1.



⊙ Petrefakten.
B. = Breccie.
L. = Knollenkalk der Libyschen Stufe.
E. = Esneh-Schiefer.
SA. = Hügel Scheich Abd el-Qūrna.

Diese zusammengebrachte Ausbeute übergab ich Herrn Dr. Paul Oppenheim in Charlottenburg, der sie unter Benützung der Monographieen von Wanner und Quaas einer genauen Prüfung unterzog. Das Ergebnis derselben waren die folgenden Bestimmungen: [1])

---

[1]) Die Beschreibung dieser Fauna folgt unten in besonderem Anhang.

Palaeopsammia Zitteli Wann.
Pattalophyllia aegyptiaca Wann. sp.
Pentacrinus sp.
Terebratulina chrysalis Schloth.
Limea Delanoüei Opp. n. sp.
Leda leia Wann.
Leda cf. Zitteli J. Böhm.
Nucula sp. cf. chargensis Quaas.
Axinus cretaceus Wann.
Neaera aegyptiaca Opp. n. sp.
Trochus sp. aff. margaritifer J. Böhm.
Natica farafrensis Wann.
Eulima Wanneri Opp. n. sp.
Cerithium abietiforme Wann.
Alaria sp. Quaas.
Voluta (Scaphella) aegyptiaca Wann.
Cinulia Ptahis Wann. sp.
Aturia praeziczac Opp. n. sp.
Nautilus desertorum Zitt.
Lamma? sp. aff. Vincenti Winkl.

Die Uebereinstimmung dieser Fauna mit derjenigen der Danien-Blättermergel unter der weissen Kreide ist danach überraschend. 13 Arten sind identisch mit kretaceischen der Oasen, darunter befinden sich ganz charakteristische Kreidetypen wie besonders die Cinulien. Zwei Formen schliessen sich an Arten der Siegsdorfer Kreide im südlichen Bayern an. Nur 4 Arten sind neu. Darunter würde allerdings Aturia auf die Eocänformation verweisen. Aber eine genaue Prüfung ergab, dass die vorliegende Art jedenfalls nicht unbedingt identisch ist mit bekannten Eocänarten, im besonderen A. ziczac, wie d'Archiac glaubte, sondern eine Art Vorläufer davon darstellt.

Auch südlich Qeneh hat Schweinfurth ebenso wie Beadnell die Blätterschiefer beobachtet und ersterer daraus schon früher am Nordabfall der Berge von Taramsah die nämlichen Früchte von Diospyros gesammelt, welche so bezeichnend waren für die Danienmergel der Chargehoase.

Auf der Ostseite des Nil in der Arabischen Wüste, so z. B. am Südende des Gebel Abu Had nordöstlich Qeneh, entwickeln sich die Esnehschiefer nach Barron und Hume[1]) in ganz bedeutender Mächtigkeit bis insgesammt 122 Meter. Eine Bank von gelbem Kalk schaltet sich hier ein und ein ähnlicher stärkerer gelber Kalk mit Mergeln erscheint an ihrer Basis. Die Mergel dieser Basiskalke, welche Barron-Hume gleichfalls noch zum eocänen Esnehschiefer rechnen, führen als charakteristischste Leitform Pecten Mayer-Eymari Newton,[2]) welcher nach meinen Untersuchungen mit der Hauptleitform der weissen Kreide von Farafra und Baharije, dem variablen Pecten farafrensis Zitt. zusammenfällt. Von meinen früheren kritischen Bemerkungen[3]) zu P. Mayer-Eymari habe ich nichts zurückzunehmen, nachdem jetzt auch Wanner nach Bearbeitung der Zittelschen Sammlung meine Auffassung vollkommen bestätigt hat. So gewinnt es den Anschein, als ob die Esnehschiefer und Kalke des Nilthals und besonders der Arabischen Wüste das Danien, das bisher von dort nicht recht bekannt war, überhaupt vertreten. Diese Vermutung wird verstärkt durch das zuerst meines Wissens von Mayer-Eymar beobachtete Vorkommen von Baculiten in den betreffenden Ablagerungen am Nil und in der Oase Chargeh. Wenn Barron und Hume die von ihnen gesammelten Proben von Esneh-Mergeln und Kalken der östlichen Wüste selbst paläontologisch etwas genauer geprüft hätten, so würden ihnen auch die darin vorkommenden Baculiten und Protocardien (neben ihrem Pecten Mayer-Eymari) nicht entgangen sein, denen sich vielleicht noch mehr unbezweifelbare Kreidetypen anreihen lassen. Und bei einer genauen Verfolgung der vertikalen Verbreitung des Pecten farafrensis würden sie diesen auch schon im Campanien, ihren Phosphat-haltigen Bonebeds etc. wahr-

---

[1]) Compte rendu du VIII Congrès Géol. Internat. 1900, p. 882.

[2]) B. Newton. Notes on some Lower Tertiary Shells from Egypt. Geol. Mag. Dec. IV, Vol. V, N 414. 1898, p. 535, pl. XIX, f. 9—11.

[3]) Geologie Aegyptens 1901. II, p. 411 und III, p. 66.

genommen haben, dagegen wohl kaum irgendwo in der Libyschen Stufe oder dem typischen Untereocän.

Nach Barron, Beadnell und Hume ist nun an vielen Orten eine deutliche Diskordanz zwischen ihren Kreideschichten und dem (eocänen?) Esnehschiefer vorhanden und diese Beobachtung grade mag wohl den Gedanken nahegelegt haben, die Grenze zwischen Kreide und Eocän unter den Esnehschiefern zu suchen. Eine glückliche Beobachtung im Felde muss aber von Geologen auch in der richtigen Weise gedeutet werden. Jede stratigraphische Einteilung ist auch paläontologisch zu begründen, sonst steht sie nur auf einem Bein. Mit dem Beobachten allein ist die Aufgabe des Feldgeologen nicht erschöpft. Ist die gesehene interessante Diskordanz der Esnehschiefer richtig, woran ich selbst durchaus keinen Anlass habe zu zweifeln, so fällt, nachdem die alte Zittel'sche Auffassung von der Zugehörigkeit der Schichten 5 und 6 in Delanoües Profil, d. h. der Esnehschiefer zur Kreide nunmehr bestätigt und erwiesen ist, die grosse Diskordanz noch innerhalb der obersten Kreide mitten ins Danien oder stellenweise d. h. im Osten gar an die Basis desselben, nicht aber an seine obere Grenze.

Als älteste Eocänschicht kann man dann immer noch jene Ablagerung mit Bothriolampas der Oasen Kurkur und Dungul, den Typus der Kurkurstufe, zwischen die kretaceischen Esnehschiefer oder deren Vertreter, die Kreidekalke mit Pecten farafrensis, Schizorhabdus libycus einerseits und die Libysche Stufe andererseits einschalten. Doch bedarf auch diese Kurkur-Fauna erst einer eingehenden paläontologischen Untersuchung. ehe man sich nach der einen oder anderen Richtung definitiv entscheidet.

2. Die Mokattamstufe.

Nach dem Vorgange von Orlebar teilt man bekanntlich diese von Zittel so benannte Eocänstufe nach ihrer Ausbildung am Mokattamgebirge bei Kairo in zwei Hauptteile, die Untere und die Obere Mokattamstufe. Nach dem herrschenden Farbengegensatz könnte man auch von einem Weissen und einem Braungelben Mokattam sprechen. Von grösster Wichtigkeit für die Trennung der beiden Abteilungen ist die auffällige Plateaustufe an ihrer Grenze, welche sowohl am Mokattam, wie auch sonst in Aegypten am schärfsten unter allen Plateaustufen innerhalb des Mitteleocäns ausgeprägt ist. Nur Schweinfurth zieht in seiner Gliederung des Mokattam den über dieser Hauptplateaustufe folgenden Tafle (= Thon) mit Cölestin noch zur Unteren Mokattamstufe.

Da die Facies in der Mokattamstufe horizontal ausserordentlich wechselt und mit ihr der Fossiliengehalt, ist es ausserordentlich schwer, eine weitere Gliederung auf grössere Entfernungen mit Erfolg durchzuführen. Das gelingt nur der systematischen Arbeit des kartirenden Geologen, der vor allem auch orographisch die einzelnen Schichten verfolgen kann.

Im Winter 1897/98 hatte ich das Glück, im Auftrage der Geological Survey of Egypt die Mokattamstufe auf dem rechten Nilufer wenigstens von der Gegend von Heluan bis Maghagha begehen und kartiren zu können. Bei dieser Gelegenheit kam ich zu dem Resultat, dass für die Untere grössere Abteilung der Mokattamstufe (I) der klassische Ausgangspunkt einer weiteren Gliederung am besten im Wadi esch-Scheich-Gebiet zu nehmen sei. Dort baut sich die Untere Mokattamstufe schon orographisch in 4 deutlichen Terrassen auf, während das Mokattamgebirge bei Kairo hier mehr einen einzigen Abfall darstellt. Dort herrscht auch eine bedeutendere Mächtigkeit und ein grösserer Fossilreichtum als am Mokattam. Das Hauptleitfossil Nummulites Gizehensis geht von den untersten bis in die obersten Schichten hinauf. Deshalb nannte ich die ganze Stufe I auch die Gizehensis-

stufe, innerhalb welcher das eigentliche Hauptlager dieses Nummuliten freilich die zweite Schichtenabteilung ist.

Die 5 hier wohl unterscheidbaren Glieder bezeichnete ich kurz als

1. Erste Mitteleocänterrasse A,
2. Eigentliches Gizehensislager, Terrasse B,
3. Haupt- oder Feuersteinterrasse C mit Milioliden, Dictyoconos Blanck. g. n. und Lobocarcinus,
4. Vorterrassen. Vorherrschend Mergel mit der „ersten Mauer",
5. „Zweite Mauer" mit Bryozoen, Terrasse D.

Ein übersichtliches Durchschnittsprofil der Unteren Mokattamstufe am unteren Wadi esch-Scheich zwischen Gebel Qarara gegenüber Maghagha und dem Dorfe Dēr el-Hadīd gegenüber Feschn gab ich bereits in Zeitschrift der Deutsch. geol. Ges. 1900, S. 423—425. Weitere genauere Profile beabsichtige ich meinem offiziellen Bericht[1]) über meine damaligen Aufnahmen des östlichen Nilgebiets beizugeben. Hier kann ich daher nicht weiter darauf eingehen.

Im allgemeinen sucht sich diese Fünfteilung möglichst an diejenige des Unteren Mokattam bei Mayer-Eymar anzuschliessen. Nur meine mächtige, meist aus fossilarmen Thonen und Mergeln gebildete Abteilung 4 entspricht nicht ganz der vierten Schicht I d bei Mayer-Eymar, einer 1—2 m starken kieselreichen Kalkschicht mit viel Konchyliensteinkernen, welche in dieser Ausbildung nur eine ganz beschränkte Verbreitung am nördlichen Mokattam hat, daher für weitere Zwecke nicht zu verwerten ist. Uebrigens begegnet überhaupt eine Begrenzung von Schichtengruppen innerhalb der oberen grösseren Hälfte des Unteren Mokattam d. h. oberhalb der Nummulites Gizehensisbank (2) ganz ausserordentlichen Schwierigkeiten, wie das schon Schweinfurth[2]) betonte. Man kann da in jedem Profil schwanken, wo zwischen Abteilung 3, 4 und 5 die Grenzen zu legen sind.

---

[1]) Geological Survey Report. Cairo 1903.

[2]) Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. 1883. S. 723.

Die Obere Mokattamstufe lässt sich im Gegensatz zur Unteren am Mokattam sehr gut gliedern, da sie petrographisch aus mehrfach wechselndem, verschieden hartem Material aufgebaut ist und infolgedessen schon in den Böschungsverhältnissen deutliche und glücklicherweise konstante Unterschiede erkennen lässt. Schweinfurth teilte den Oberen Mokattam wesentlich nach orographischen Gesichtspunkten in 5, Mayer-Eymar ebenfalls nach paläontologischen in 5 Schichtenstufen. Meine Gliederung in 8 Unterstufen berücksichtigt beide Gesichtspunkte, schliesst sich aber mehr an die Schweinfurth'sche an. Eine vergleichende Tabelle dieser verschiedenen Gliederungen findet sich in meiner „Geologie Aegyptens" II Seite 440.

Eigentlich sollte das Mokattamgebirge ebenso wenig als Typus für die Obere Mokattamstufe gelten wie für die Untere. Denn nirgends ist die Obere Stufe so wenig mächtig entwickelt als am Gebel Mokattam. Im Fajūm in der Libyschen Wüste ist sie mindestens dreimal so stark und viel reicher an Fossilien, die auch eine ungleich bessere Erhaltung mit der Schale zeigen, während sie am Mokattam fast nur in Steinkernen erscheinen. Aber abgesehen davon, dass die Wüste jenseits der Birket el-Qerūn schwerer zu erreichen ist als der Mokattam, ist dort auch das Profil der Oberen Mokattamstufe infolge ihrer Mächtigkeit über grosse Entfernungen ausgezogen und schwerer im ganzen zu übersehen. So bietet das Mokattamgebirge doch noch die bequemste Gelegenheit zur Gliederung der Oberen Mokattamstufe.

Die 8 Unterabteilungen des Oberen Mokattam (II) habe ich s. Z. folgendermassen charakterisirt:

1. Gypsthon und Tafle mit Cölestin,

2. Region der kleinen Nummulitenbänke und Gastropodenbänke,

3. Unterer Caroliahorizont mit Carolien und Ostrea Cloti, schwache Stufe bildend,

4. Plicatulaschichten mit Ostrea Cloti und häufigen Plicatulen,

5. Austern-, Turritellen- und Schieferkohlenhorizont,

6. Sandkalk mit Vulsella, Carolia, Turritellen; oberer Caroliahorizont, ausgesprochene Stufe bildend,

7. Bunte Thone und Sande,

8. Deckkalk mit Echinolampas Crameri, Steinkernen von Cardien, Turritellen, selten: Plicatula, Carolia, Vulsella.

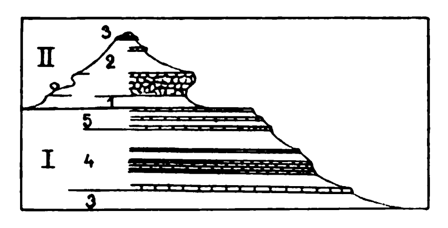
Auf unserer letzten Reise nahm ich an folgenden Orten Gelegenheit, stratigraphische Studien über die Mokattamstufe zu machen:

Auf dem rechten Nilufer in beiden Stufen am Wadi Ramlieh schräg gegenüber Wasta, am Mokattam und am Gebel el-Ahmar bei Kairo; auf dem linken Ufer nur in der Oberen Mokattamstufe im Umkreis des Fajūm und am Chēt el-Ghorāb oder Gebel Kibli el-Ahram gegenüber Kairo. Im Folgenden sei es mir gestattet, diese neu aufgenommenen Profile zusammenzustellen. Die vorn stehenden Zahlen beziehen sich auf die 13 Glieder meines Systems.

A. Rechtes Nilufer. Isolirter Zwillingshügel auf dem linken Ufer des Wadi Ramlieh. Station XXVIII meines Sheet 12. 11,2 Kilometer ostsüdöstlich Dēr el-Meimūn und 13 km südöstlich Burumbul. Höchster Gipfel dieser Gegend.

Fig. 2.

Massstab der Höhe 1:2000.

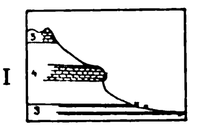


Obere Mokattamstufe (II).	3	0,50 m bröckliger Kalk, 0,80 m fester Grobkalk, gelbbräunlich, erfüllt von Nummulites discorbina, *Carolia*, *Vulsella*, Ostrea, Pecten, Cardium, Lucina, Natica, Tudicla (?), Scaphander Fortisi.

Obere Mokattamstufe (II).	2	9 m gelbliche Mergel mit kleinen Wülsten, kleine *Nummuliten*, 6 m gelber *Nummuliten*-Kalk mit groben Wülsten, Nummulites Beaumonti, sub-Beaumonti und discorbina. „Dritte Mauer".	
	1	3 m gelbe Mergel. Hier Plateaustufe.	
Untere Mokattamstufe (I).	5	1,2 m gelber Nummulitenkalk, 3,9 m gelbe mürbe Mergel im Wechsel mit Bänken von gelbem Kalk ohne Nummuliten, Lucina pharaonis,	„Zweite Mauer".
	4	6 m gelbe und weisse Mergel, 0,50—1 m weisser Kalk, 2,50 m bröckliger Mergelkalk, 2,50 m 4 knollige Bänke Kalk, 4 m verschüttet, Mergel, 3 m gelbweisse, schiefrige Mergelkalke.	„Erste Mauer".
	3	3 m verschüttet bis zum Fusse des Berges.	

B. Doppelgipfel, Station XX meines Sheet 12 auf dem linken Ufer des Hauptarms des Wadi Ramlieh, 10 km östlich von Dēr el-Meimūn und 10,8 km südöstlich Burumbul.

Fig. 3 (1:2000).



× = Fischzähne und Turritellen.

Untere Mokattamstufe (II).	5	4 m gelblicher, knotig wulstiger Kalk ohne Nummuliten; „Zweite Mauer".
	4	6 m gelbe und weisse Mergel. Hier Plateaustufe, 4 m Steilabfall aus mehreren knotig wulstigen Kalkbänken; „Erste Mauer", 7 m lockere Mergel mit Gips.

Untere Mokattamstufe (I).	3	0,05—0,10 m rotes Band aus Roteisenstein und Gips. Fischzähne (Myliobates).
		1,50—2,50 m Mergel mit Fasergips, Leda, Turritella Boghosi Cossm. (häufig), Zähne von Ginglymostoma Blanckenhorni Stromer n. sp., Oxyrhina Desori Ag., Odontaspis verticalis Ag. und cf. elegans Ag., Lamna macrota Ag. sp., Carcharodon, Galeocerdo latidens Ag., Aprionodon frequens Dam., Amblypristis cheops Dam., Myliobates, Ganoidschuppen, Coelorhynchusstacheln, Teleostierknochen, Wirbel von Seesäugetieren.
		0,10—20 m braunrote harte Kalkbank, senkrecht prismatisch zerklüftet, deren Oberfläche prächtige Winderosionserscheinungen, Windkanten und Sandrieselflächen zeigt.

Die tieferen Mitteleocänschichten zeigen sich auf dem Wege von obigen Hügeln zum Nil bei Karimat und Burumbul in folgender Weise entwickelt: Die Abteilung I 3, etwa 20 m stark, nimmt vom Fusse jener Hügel an weithin eine ausgedehnte Ebene oder Terrassenlandschaft ein, in der sich 2—3 niedrige Terrassen über einander markiren, gebildet aus je 0,25—50 m dicken, hellrötlichen oder schmutziggelben härteren Bänken zwischen stärkeren, bröcklig schiefrigen Mergellagen. Die härteren Bänke führen häufig Fischschuppen.

Tiefer erscheint die Abteilung I 2 (20—25 m) in Gestalt von weisslich grauen oder gelbweissen Kalkschiefern, welche Steinsalzadern in ihren Fugen führen. Südwärts gehen sie in gelbe, harte, grobwulstige Kalke über, die eine scharf ausgeprägte Plateauterrasse bilden, wobei die obersten Bänke am Rande grottenförmig überhängen. Fossilien wurden ausser den gewöhnlichen Lucinen in diesen Schichten hier nicht gesammelt. Erst viel weiter südwärts und ostwärts in der Arabischen Wüste zeigt sich, wie frühere Untersuchungen gelehrt haben, gerade dieser Horizont ganz erfüllt von Schalen des grossen Nummulites Gizehensis zusammen mit Numm. curvispira, Gryphaea cf. Gümbeli und Schizasterarten, so dass an der Vertretung der Gizehensisbänke (2) durch die fossilfreien gelben Kalke bezw. weisslichen Kalkschiefer hier nicht zu zweifeln ist. Als Ursache des lokalen Fehlens dieser Fossilien

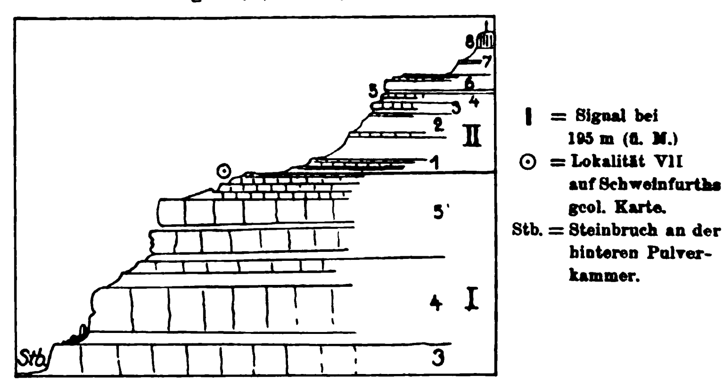
darf der Umstand aufgefasst werden, dass dieselben echte Küstenbewohner waren, hier aber die ganze Untere Mokattamstufe in pelagischer Facies, z. B. auch ohne eine einzige Auster, entwickelt ist. An der Grenze der Unterstufe I 2 gegen die tiefere, d. h. am Fusse der steilen Böschung, ist eine Bank mit grossen Nautili und Lucina pharaonis beständig.

Die tiefste Stufe, I 1 (ca. 25—30 m mächtig), setzt sich bei Burumbul ähnlich wie das ägyptische Danien (vergl. oben) aus einem echt pelagischen Wechsel von blendendweissen Schreibkreidebänken von 18—90 cm Dicke und weissen, gelblichen, dunkelgrauen oder schwärzlichen gips- und salzreichen Blättermergeln zusammen. Von Fossilien nenne ich: cylindrische Spongien, Schizaster Mokattamensis, Lucina pharaonis und bialata, Spondylus sp., Cardita Viquesneli, Leda, Nucula, Neaera, Turritella Boghosi, Natica, Aporrhais, Nassa, Styliola. Die winzigen Gastropoden und Nuculiden sitzen oft in Massen zusammen auf der Schichtfläche.

Aus der Gegend von Kairo dienen folgende typische Profile zum Vergleich:

C. Steiler Aufstieg aus den Steinbrüchen hinter der Citadelle an den Pulverkammern vorbei über den Basishügel Schweinfurths zur Station des Venusdurchgangs.

Fig. 4[1]) (1 : 2000).



[1]) Die Schichten sind hier richtiger nicht horizontal, sondern etwas nach O. einfallend zu denken, wie es in Schweinfurths Profil (Zeitschr. d. D. geol. Ges. 1883, Taf. XX) in freilich verstärktem Masse zum Ausdruck kommt.

II 8	4 1/2—5 m gelblicher, feinkörniger Kalksandstein, kavernös mit Calcitdrüsen. Echinolampas Crameri, Anisaster gibberulus, Abdrücke von grossen Vulsellen, Spondylus, Cardium 2 sp., Cardita Mokattamensis Opp. sp. n.,[1]) Lucina, Macrosolen uniradiatus Bell. sp., Mesalia Hofana M.-E., Turritella pharaonica Cossm.
7 (c. 7 m)	0,20 m gelber Sand, 2 m bunte Thone mit Gips, gemischt mit Sand, 0,40 m gelber knolliger Kalksandstein mit Calcit- und Gipskrystallen, 4—5 m gelbe und grüne Thone. Hier Plateaustufe.
6 (3 m)	0.50 m 2 Kalkbänke, 2,50 m gelbe, harte, sandige Bank mit Pseudobohrmuschellöchern.
5 (1,30 m)	0,50 m Blätterthon, 0,80 m Bank mit ungemein dickschaligen (5 cm) Austern, Pecten, Plicatula polymorpha, Arca, Cardium obliquum Corbula cf. gallicula, Natica, Xenophora, Cassidaria nilotica, Terebellum.
4 (2,50 m)	1 m überhängende Bank mit viel Steinkernen: Vulsella, Ostrea, Plicatula polymorpha (gemein), Pecten, Spondylus, Arca, Cardium, Natica, Xenophora, Cassidaria, Terebellum. 1—1,50 m braungelber und grüngrauer mürber weicher Sandstein mit grossen Löchern.
3 (2,80 m)	2 m 2 Bänke gelben dichten Sandsteins, 0,80 m Lage mit zahlreichen Schalen von *Carolia*, Cardium obliquum, Corbula cf. gallicula Desh., Teredo, Mesalia Locardi, Knochen.
2 (7 m)	0,70—1 m sandige Bank mit Nummulites Beaumonti, 0,90 m braune und blaugrüne Sand- und Thonlage, 1,30—2 m mürber Sandstein, 2 m blauer Thon und braungelbe Mergel mit Gips,

[1]) Diese neue Art wird neben zahlreichen andern neuen Molluskenformen von Herrn Dr. P. Oppenheim, der augenblicklich die ganze Fauna des ägyptischen Eocäns nach Zittels, Schweinfurths und meinen Aufsammlungen monographisch bearbeitet, im nächsten Jahre in der Palaeontographica veröffentlicht werden.

2 (7 m)	1,50 m gelbweisser Kalk mit *Nummulites* Beaumonti, sub-Beaumonti, Anomia tenuistriata, Cardium obliquum, Tellina, Lucina gibbosula, Cytherea, Cardita, Turritella, Solarium, Rostellaria u. and. Gastropoden.
1 (9,30 m) II	7 m gelbliche und grauweisse Gipsmergel, 0,50 m orangebrauner harter Thonkalk, 0,80 m bunter ockrig- und grüngebänderter Thon (Tafle) mit Cölestin, 0,50 m weisser Mergelkalk mit senkrechten Gipsadern, 0,50 m Mergel. Hier Plateaustufe.
I 5 (c. 25 m)	c. 8 m 4 Bänke blendendweissen, weichen Kalksteins mit kleinen Röhrchen, Num. Beaumonti, sub-Beaumonti, discorbina und subdiscorbina, Amblypygus dilatatus, Serpula, Eschara aff. Duvali, Vulsella, Spondylus radula, Ostrea Reili, Lucina pharaonis und metableta, Teredo, Cardium obliquum, Turbinella frequens, Terebellum, 8—9 m Steilabsturz, Kalk mit Echinolampas Fraasi, Conoclypeus conoideus, Vulsella. „Zweite Mauer“, 0,40 m gelbe Mergel, 8 m Nummulitenkalk mit „Hörner“-Wülsten, kleinen Nummuliten, Schizaster.
4 (20,20 m)	4,70 m zerfressener, knolliger Kalk mit Schizaster, 2 m mergelige Zwischenlage, 11 ½ m Steilwand aus Kalk mit Schizaster foveatus, Africanus und Mokattamensis, Echinolampas Fraasi, Toxobrissus Lorioli, Echinopsis lybicus, Clavagella, Vulsella, Natica. „Erste Mauer“, 2 m verschüttet.
3 I	c. 17—20 m (?) weicher Baustein der Steinbrüche (im hintersten Steinbruch am Fusse des Bergabfalls nur 8 m), Natica hybrida (= N. Ammonis Blanck)[1]), Turbinella frequens, Lobocarcinus Paulino-Württembergicus, Carcharodon auriculatus u. and. Haifischzähne.

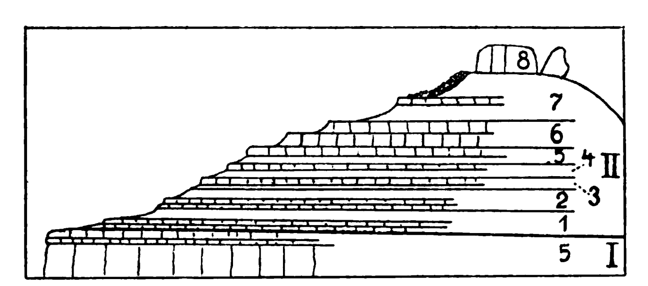
Summe 98,4 m.

[1]) Die echten Ammonshörner sensu stricto der Alten (vergl. Blanckenhorn: Das Urbild der Ammonshörner in Naturwiss. Wochenschr. XVI. 6. 1901. S. 57).

Die Gesammtmächtigkeit der Oberen Mokattamstufe (II) beträgt in diesem Profil in der Mitte des Mokattam 37,40 m; von der Unteren Mokattamstufe (I) sind hier nur ca. 35 m aufgeschlossen, seine Gesammtmächtigkeit (unter Hinzufügung der Schichtengruppen 3, 2 und 1) dürfte sicher 100 m übersteigen.

D. Südwestseite des Gebel el-Ahmar links vom Reitwege nach Ajun Musa. (16. 3. 1902.)

Fig. 5 (1:1000).



II 8	3—4 m Sandstein mit Vulsella, Carolia (?), Cardita Mokattamensis, Cytherea.
7 (c. 6,20 m)	3—3,50 m Schutt, 0,90 m gelber Kalksandstein mit Vulsella, Lucina pulchella, Cardium, Teredo longissima, 3 m weisser und graugelber Sand, Thon und Gipsmergel.
6	2—5 m Kalksandstein mit Steinkernen: Spondylus, Cardita, Cardium, Corbula.
5 (?) (c. 2 m)	1—1,60 m gelbbrauner Sandkalk mit Steinkernen, 0,75 m bröckelige Zwischenlage.
4 (c. 1,40 m)	0,70—1,10 m gelbgrauer, harter, rauher Sandkalk, 0,50 m ockergelbe, bröckelige Zwischenlage.
3 (1,40 m)	1,0—1,20 m gelber, fester Kalk mit Kalkspatdrusen und Bivalvenkernen, 0,30 m gelbe, bröckelige Lagen.

2 (2,10 m)	1 m Tafle mit Cölestin, 1,10 m ockergelber Kalk mit strahligem Cölestin, Abdrücke von Nummulites sub-Beaumonti, Spondylus, Cardium obliquum, Cytherea parisiensis, Corbula gallica, Macrosolen uniradiatus, Lucina pharaonis, Discohelix cf. Dixoni, Mesalia Hofana, Turritella pharaonica Cassis niloticus, Cypraea.
1 (3 m) II	1,50 m gelber Tafle mit Cölestin, 0,80 m hellockerfarbener thoniger Kalk, 0,70 m schmutziger bröckeliger Kalk mit Steinkernen.
I 5	0,60 m grauweisse Kalkbank, 0,05 m Zwischenlage, 0,35 m weisser Kalk mit Vulsella, Teredo, Turritella, 0,10 m gelbe Mergel, 5 m weissgelber Kalk mit kleinen Nummuliten und Bryozoen, „zweite Mauer".

In diesem Profil D hat die Obere Mokattamstufe nur eine Stärke von etwa 24,35 m, ist also um 13 m schwächer als in dem 2,7 km südlich davon gemessenen Profil C derselben Schichten. Der bedeutende Unterschied kann nur auf die grössere Festlandnähe im S. zurückgeführt werden, nach welcher Richtung hin alle Schichtengruppen anwachsen.

Eine ähnliche Ausbildung der Oberen Mokattamstufe wie in C finden wir auf dem gegenüberliegenden Nilufer am Chēt el-Ghōrab (= Krähennest) oder Gebel Kibli el-Ahram im S. der Sphinx. Von diesem guten Aufschluss verdanken wir bereits Fourtau[1]) ein Profil, das mit der folgenden Aufnahme zu vergleichen ist.

---

[1]) Sur un nouveau gisement de poissons fossiles aux environs des Pyramides de Ghizeh. Bull. Soc. Géol. France (3) XXVII 1899. p. 238. — Notes sur les Echinides fossiles de l'Egyte. Bull. Inst. Eg. Le Caire 1900, p. 28, Fig. 6.

E. Querprofil von O. nach W. durch den Gebel Kibli el-Ahram am Chēt el-Ghorāb.

Fig. 6 a (1:2000).

O. ← → W.

Gipfel des Hügels c. 64 m über dem Meeresspiegel.
P = oberflächlich auf II 2 ansitzende Pliocänbreccie mit Ostrea cucullata (Meereshöhe 55 m).
S = Schutt.

Fig. 6 b. Blick auf den Gebel Kibli el-Ahram von N. von der Pyramide des Tetf Rē aus.



II 4	3 m harte helle Kalksandsteinfelsen des Gipfels mit Echinolampas Crameri und globulus, Steinkernen von Plicatula polymorpha, Gryphaea, Ostrea Clot Beyi, Calianassa, 4 m weiche Mergel mit viel Schalen von Plicatula polymorpha, Pecten, Cytherea, Lucina pharaonis, Turritella Locardi und dialyptospira.
3	1 m Caroliabank, grau. Ostrea Clot Beyi, Carolia, Plicatula, Anisaster.
2	5 m brückelige Mergel mit Gips, lokal eine Kalkbank dazwischen, Echinolampas globulus, Natica, Turritella und andere Gastropoden. Auf diesen Schichten sitzt am Ostabhange des Hügels die pliocäne Austernbreccie mit Ostrea cucullata auf.
1 II	8 m weissliche und blaugraue Thonmergel mit Fischresten im Wechsel mit gelben Thonkalkbänken. Lucina pharaonis Bell. (= libyca Cossm.).

I 5	? Die verschüttete Basis des Hügels mögen weissliche Kalke mit Nummulites Beaumonti und sub-Beaumonti, Echinolampas Fraasi und africanus und anderen Seeigeln einnehmen, welche man etwas nördlicher an der Pyramide des Tetf Rē zu Tage treten sieht.

Die von Fourtau gesammelten Seeigel stammen ebenso wie seine von Cossmann beschriebenen Mollusken im wesentlichen aus den Schichten I 2 und 4. Zum Unterschied gegen die Vorstellung in Fourtaus Profilen sei ausdrücklich betont, dass das marine Pliocän keineswegs den Gipfel des Hügels einnimmt, sondern in der halben Höhe des Gehänges auf der Eocänschicht I 2 als Saumriff erscheint und zwar nur auf der Nilseite. Es sieht fast so aus, als ob die Pliocänfluten die Gipfelhöhe des Hügels nicht mehr erreicht hätten.

Im Fajūm erreicht die Mächtigkeit der Schichtengruppen des Mitteleocäns die grössten Zahlen. Namentlich gilt das für die Obere Mokattamstufe.

Die Untere Mokattamstufe ist nur auf der SSO.-Seite der Birket el-Qerūn unter dem Kulturland und an den Rändern desselben sichtbar, so nordöstlich Tamieh auf dem halbinselartigen Vorsprung der nördlichen Wüste, im Einschnitt des Batsthales, unweit Ebschwai, im tiefen Einschnitt Bahr el-Wadi bei Nazleh Schoketa und bei Harit zwischen Gebali und Qasr Qerūn. Es sind graue oder gelbliche Mergel oder Kalke mit Nummulites Beaumonti und sub-Beaumonti, Abdrücken von Leda, Cardita, Tellina und Fischschuppen. Sie vertreten die Abteilungen 3—5 oder die obere Hälfte des Unteren Mokattam über dem eigentlichen Gizehensislager.

Auf der N.-Seite der Birket el-Qerūn müssen wir zwei grössere Schichtenkomplexe im Oberen Mokattam unterscheiden, welche Beadnell[1]) neuerdings auch mit besonderen Namen belegt hat, die „Birket el-Qurun-Reihe“ und die „Qasr es-Saga-Reihe“. Die erstere nimmt die Ufer des Sees und die

[1]) The Fajûm Depression. Geol. Mag. 1901, p. 542.

unterste der von Schweinfurth unterschiedenen Plateaustufen („Fajumstufen") im N. des Sees (ca. 38—72 m über dem Seespiegel), auf der sich auch die Ruinen von Dîmeh befinden, ein; die höhere, ungleich mächtigere den Abhang bei Qasr es-Saga, d. h. die „zweite und dritte Fajūmstufe" im Sinne Schweinfurths. Freilich besteht zwischen diesen beiden nur topographisch geschiedenen Gruppen leider keine irgendwie scharfe Grenze. Denn die tiefsten Lagen des Abhangs von Qasr es-Saga erscheinen lokal auch auf der Terrasse von Dîmeh.

Bei der unteren Birket- oder Dîmeh-Reihe ist die genaue Feststellung der Schichtenfolge, welche für alle Punkte gültig wäre, mit einigen Schwierigkeiten verbunden, weil die Schichten nicht ganz horizontal lagern, sondern mehr der etwas welligen Oberfläche sich anschmiegen und namentlich am Ufer gewöhnlich mit der Böschung schwach gegen den See zu einfallen, weil ferner grössere Steilwände fehlen, auch der Zusammenhang teilweise durch kleine Verwerfungen unterbrochen ist, endlich horizontal Wechsel und vertikal mehrfache Wiederholungen stattfinden. Namentlich der letztere Umstand ist bisher von Schweinfurth, Mayer-Eymar, A. Kaiser[1]) und mir zu wenig erkannt worden, wodurch irrige Auffassungen des relativen Alters an einigen Lokalitäten entstanden, was nur durch Aufnahme möglichst zahlreicher genauer Profile, die miteinander verglichen werden können, sich vermeiden lässt. So treten z. B. Mergel mit „Hörnern" nach meinen neuesten Beobachtungen in mindestens drei Horizonten (I 5, II 1 und II 3), rotbraune Thonbänke mit weissen Konchylienschalen ebenfalls in dreien (II 2, 3 und 5 c), Bänke mit Stockkorallen in vier Horizonten (II 1, 2, 3 und 5 c) auf.

Als älteste Schicht erscheinen an 5 Stellen des Ufers (im NW. der Batsmündung, im O. von Dîmeh auf der Halbinsel Qorn, auf der Insel Qorn und am Landungsplatz Mirsa im NW. dieser Insel) graue thonige Mergel oder Mergelkalk ohne

---

[1]) Eine Reise um den Kurûn-See und durch das Fajûm. Gera 1889.

Petrefakten mit hufeisenförmigen Wülsten à la Rhizocorallium, den „Hörnern" Schweinfurths. Analog den Bildungen am Mokattamberge könnte man sie als Decke der Unteren Mokattamstufe (I 5) auffassen, doch bin ich eher geneigt, sie hier als Aequivalent der thonig mergeligen Abteilung II 1 anzusehen.

Es folgen dann graue, gelbe oder rötlichgelbe, sandig mergelige Schichten, in welchen Schweinfurth auf der Insel Geziret el-Qorn die früher von Mayer-Eymar und Dames beschriebenen Korallen, Ostrea gigantea, Turritella cf. turris, transitoria und carinifera, zahlreiche Fischzähne und Reste von Zeuglodon aufsammelte. Das ist der tiefere Zeuglodonhorizont des Fajūm, den ich noch zu meiner Abteilung II 1 ziehen möchte.

Höher (II 2) gelangt man alsbald in einen äusserst petrefaktenreichen, innigen Wechsel von dunkelrotbraunen, eisenschüssigen Thonmergeln, welche kleine, kugelige Eisenstein-Konkretionen und weisse, wohlerhaltene Molluskenschalen enthalten, mit gelben und grauen sandigen Mergeln und Muschelkalken oder Lumachelle. In der Fauna fallen besonders die Hydractinia (Qerunia) cornuta May.-Eym. sp.[1]) und die Menge herrlicher Gastropoden auf. Ich habe diese Schichten, die mit der gleichen reichen Fauna in vortrefflicher Schalenerhaltung auch auf dem rechten Nilufer, so am Gebel Abu Rische[2]) und Wadi Sanūr beobachtet werden, als „Gastropodenbänke" bezeichnet. Die roten eisenschüssigen Muschellagen gehen auch horizontal in die graugelben, erdfarbenen Mergel über, beziehungsweise sind ihnen nesterartig eingelagert.

Unmittelbar auf oder auch mitten zwischen diesen Schalenschichten liegt die auffallendste aller Bänke des Fajūmer Eocäns, welche die Eigenschaft hat, an der Oberfläche bis auf riesige kugelige Blöcke, ursprüngliche Konkretionen von

---

[1]) Vergl. Oppenheim: Ueber Kerunia cornuta Mayer-Eymar aus dem Eocän Aegyptens, Centralbl. f. Mineral., Geol. u. Pal. 1902. 2. S. 44.

[2]) Blanckenhorn, Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. 1900. S. 443.

1—1½ m Durchmesser, ganz zu zerfallen. Auch kleinere Konkretionen und Wülste sind dieser Schicht eigen, sowie Schalen von Ostrea Reili, Carolia und Cardita Viquesneli, Steinkerne von Mactra Fourtaui, Cardium sp., die als Reste der zerstörten weicheren Schichtteile zwischen den meist versteinerungsleeren grossen Blöcken liegen bleiben. Letztere sind im Horizontalschnitt durchweg kreisrund, ihre Gestalt ist aber nicht immer kugelig, sondern auch ellipsoidisch vasenartig oder schön cylindrisch säulenförmig. Sie zieren die meisten Abhänge oder Kanten der „ersten Fajūmstufe" oder nehmen auch letztere selbst ein, wobei sie von weitem wie eine Heerde Schafe aussehen. Deshalb nennt sie auch der Beduine Ghanam el-maskhuta (zur Versteinerung bestimmte Schafe).

Ausser den genannten Schichten beteiligen sich noch 2 Gesteinsarten wesentlich am Aufbau der ersten Plateaustufe von Dīmeh. Das erste ist grauer harter Kieselkalk, welcher in senkrechten Klüften zu grossen Quadern zerspringt und arm an Versteinerungen ist. Auf einem Hügel nahe dem Berge Σ Schweinfurths sah ich eine solche Bank unmittelbar im Liegenden der „Schafheerde", auf dem trigonometrischen Signalhügel hinter der Halbinsel Qorn (ca. 35 m über dem Seespiegel) als deren Hangendes. Eine zweite höhere Lage von ½ m Dicke mit Schalen von Ostrea elegans, Plicatula und Cardita krönt den tafelförmigen Hügel im S. von Dīmeh, den höchsten dieser Plateaustufe (ca. 74 m über dem See). Diese obere Schicht leitet hier wohl schon die Abteilung II 3 ein.

Das letzte bemerkenswerte Gestein der Birketreihe ist ein harter echter Kalksandstein oder Sandstein mit Kalkbindemittel, der meist mit stark welliger Oberfläche herausragt, so dass man liegende Baumstämme oder Walfischrücken zu sehen glaubt. Oft neigt dieser Sandstein zu Knotenbildung; dann ist seine verwitterte Oberfläche mit zahlreichen, vom Winde herausgeblasenen Höckern besetzt, die sich zuweilen regelmässig in Quincunxreihen gruppiren. Die betreffenden aufgewölbten elliptischen Platten sehen dann wie dornige Schildkrötenpanzer aus. Dieser „Walfischsandstein" wurde ausnahms-

los oberhalb der Schafheerde beobachtet (südlich Dîmeh in ca. 48 m Höhe über dem Seespiegel).

Alle die 3 zuletzt beschriebenen harten Gesteinsarten sind oberflächlich von den fingerdicken Bohrlöchern aus einer Zeit späterer Meerestransgression (im Pliocän) bedeckt.

Die Fauna der Abteilung II 2 der oberen zwei Drittel der Birket el-Qerun-Reihe setzt sich wesentlich folgendermassen zusammen:

Graphularia,
Goniaraea elegans,
Astrohelia similis,
Hydractinia cornuta,
Ostrea Reili und elegans,
Cardita Viquesneli,
Cardium Schweinfurthi,
Lucina pharaonis,
Cytherea Newboldi,
Tellina, 3 sp.,
Lovellia Schweinfurthi,
Mactra Fourtaui,
Turritella pharaonica, Locardi,
carinifera u. Hofana M.-E.,
Natica Cleopatrae,
Melongena indigena,
Clavellites aegyptiacus u. Noae,
Turbinella arabica,
Pleurotoma ingens,
Nautilus.

Dagegen sind Ostrea Clot Beyi, Carolia placunoides und Plicatula polymorpha noch verhältnissmässig selten.

Diese 3 wichtigen Leitformen erscheinen häufiger erst in den Abteilungen II 3 und 4, welche stellenweise schon nördlich Dîmeh auf gleicher Höhe mit dessen Ruinen auftreten, sonst aber erst am Fusse des zweiten Plateauabfalls.

Dieser Haupt-Plateauabfall wird in vertikalem Sinne durch eine besonders scharf ausgeprägte, oft breit angelegte Terrasse innerhalb seines oberen Drittels in zwei Teile zerlegt, die sogenannte „zweite und dritte Fajūmstufe“ Schweinfurths, welche nur im östlichen Gebiet bei Qasr es-Saga sich nahe aneinander halten. Von dem Gebirgspass (Boghas) im W. des „Korallenhügels“ an findet eine gänzliche Trennung statt; die zweite Fajūmstufe rückt im Bogen über den Zeuglodonberg zum Ufer der Birket, welche sie am Σ Berge erreicht und von da an begleitet, während die dritte höhere sich beständig etwa 10 km nördlich vom See ihm parallel hält. Die zweite

Fajūmstufe wird aus den Abteilungen II 3—6, die dritte aus 7—8 gebildet (vergl. Fig. 7 und 11).

Der östliche Teil des Plateauabfalls, an dessen Aufbau sich beide Fajūmstufen in geringem Abstand von einander beteiligen, zerfällt horizontal in 2 Abschnitte, die bei Qasr es-Saga in stumpfem Winkel aufeinander stossen. Der erste derselben, welcher von hier parallel dem Birketufer bis zum Passaufstieg in WSW.-Richtung verläuft, heisst Gebel el-Hameier; der andere nach NNO. gerichtete Gebel el-Achdar. Letzterer biegt ½ Tagereise von Qasr es-Saga, wo eine wichtige Querverwerfung in den Schichtenzusammenhang störend eingreift, plötzlich nach Osten um und verliert sich dann nach und nach in seiner auffälligen Gestalt.

Den besten Einblick in die Schichtenfolge und den horizontalen Wechsel jenseits der Birket erlangen wir, indem wir diese Hauptabhänge in der Richtung von NO. nach SW. bis zum Westende des Sees verfolgen.

Das erste Profil entnehmen wir dem nordöstlichsten, namenlosen Abschnitt des Plateauabfalls, nämlich dem W.—O. gerichteten Theil nordöstlich Qasr es-Saga.

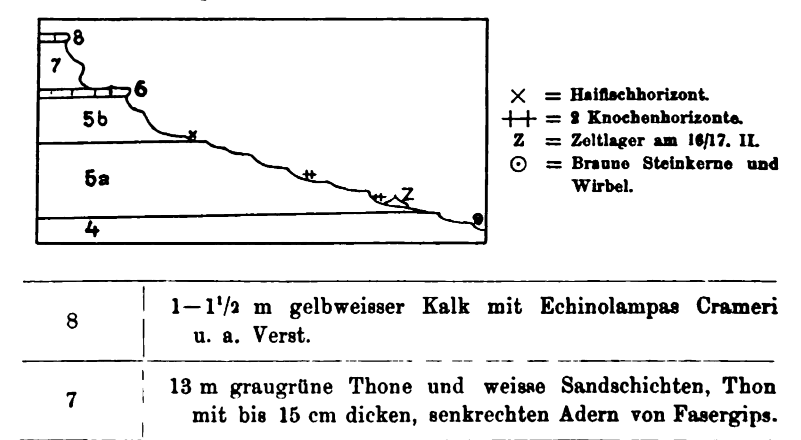
F. Profil, aufgenommen an einer durch Reichtum an Tamariskenholz ausgezeichneten Plateaubucht, ½ Tagereise ONO. vom Südosteck des Schweinfurth-Plateaus und ½ Tagereise NNO. Qasr es-Saga. (7.—8. 2. 1902.)

8	2¼—4 m gelber Mergelkalk.
7	2 m Thon, 1—1½ m gelber Mergelkalk mit Conchylienresten, 7 m graugrüner Thon mit Gips, 0,2 m rötlich ockergelber Kalk mit Austern, Molluskensteinkernen (Arca), 3—5 m Gipsthon und grünlicher Sand.
6	1½ m Austernkalkbänke mit Ostrea elegans, 1½ m gelbe Kalke mit Carolia, Vulsella.
5b	? 5—10 m graue und grüne Thone und Mergel.

5a	3—4 m	Bank mit Ostrea elegans, Terrasse. Mergel mit Kieselhölzern.
	4 m	Kalk mit Ostrea elegans und Cloti, Terrasse. Mergel.
	2—3 m	Kalk mit Ostrea Cloti und Carolia, Terrasse, Weisser Sandstein und Schieferthon mit Pflanzenresten. Oberer (?) Knochenhorizont: Schäde von Welsen, Schildkröten-Ausguss, Krokodilskelet, Wirbel von Zeuglodon und Sirenen,
	ca. 3 m	Terrasse mit Graphularia, Ostrea Cloti, Raeta (Lovellia) Schweinfurthi M.-E., Turritella, Lessepsi M.-E., Ampullaria (!) cf. ovata Ol., Myliobates-Zähnen. Mittlere Turritellen-Bank,
	ca. 5 m	bis zur Ebene.

G. Profil am Gebel Achdar, aufgenommen 1 1/2 Stunden nordnordöstlich von Qasr es-Saga im ONO. des basaltischen „Schweinfurth-Plateaus". (16.—17. 2. 1902.)

Fig. 7 (1 : 2000).

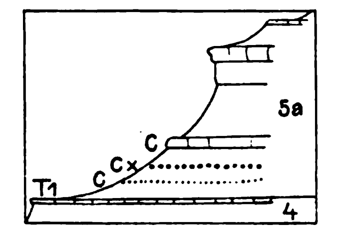


8	$1-1^1/_2$ m gelbweisser Kalk mit Echinolampas Crameri u. a. Verst.
7	13 m graugrüne Thone und weisse Sandschichten, Thon mit bis 15 cm dicken, senkrechten Adern von Fasergips.
6	Weisse Caroliakalke.
5 b	Dunkle Thone, ein Knochen, Weisser Sandstein, Fischhorizont, Sandstein mit Pristis, Myliobates, Otodus.

	3 Terrassenabsätze mit Bänken von Ostrea elegans und Turritellen,
	Mergel, höherer Knochenhorizont, mit Schlangenwirbeln (Moeriophis Schweinfurthi Andrews), Schildkrötenpanzer, Krokodil,
	Gelbrötliche bröckelige Mergelbank,
5a	2—4 cm eine schwarze und weisse Sandlage,
	5 cm gelbe Mergel mit Knochen,
	1 m weisser Sandstein oder grauer Thon, tieferer Knochenhorizont mit Knochen von Welsfischen, Schlangen (Moeriophis), Krokodil (Skelet), Walfisch (Gehörknochen), Zeuglodon cf. Osiris Dames (Kiefer) und Moeritherium Lyonsi Andr. (Unterkiefer).

H. Profil 1/2 Stunde nordnordöstlich von Qasr es-Saga an der Ecke oder Umbiegungsstelle der Klippen. (23. 1. 1902.)

Fig. 8.



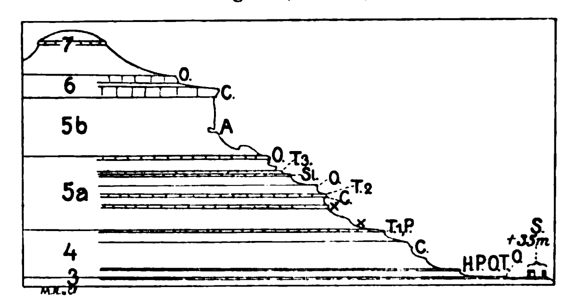
X = Steinkerne und Säugethierwirbel.
C = Caroliaschichten.
T_1 = I. Turritellenbank.

	0,10 m Bank mit Ostrea Cloti und O. sp.,
	1,50 m Zwischenlage,
	0,70 m gelbe Schicht,
	1,50 m hellgelbe und graue Mergel,
	3,50 m weisser Sand,
	0,60 m gelbe Schicht mit Carolia und Cassidaria,
	1 m grauer Schieferthon,
5a (11,05 m)	0,10 m violettbraune Knollen von Kalk mit viel braunen Kernen von Macrosolen uniradiatus, Teredo longissima, Solarium, Cassidaria, Gisortia gigantea, Lanistes (!) subcarinatus, Wirbeln von Sirenen und dürftigen Resten von Myliobatiden und Krokodil; zuweilen an Stelle dessen Caroliaschicht mit Carolia und Ostrea Cloti,
	1 m rötliche Mergel,
	0,05 m Carolialage,
	1 m gelbe Gipsmergel.

4	0,20 m Bank mit Turritella pseudoimbricata Opp. sp. n. und O. Cloti (untere Turritellenbank), 8 m Zwischenlage, 0,20 m Schicht mit Ostrea elegans.

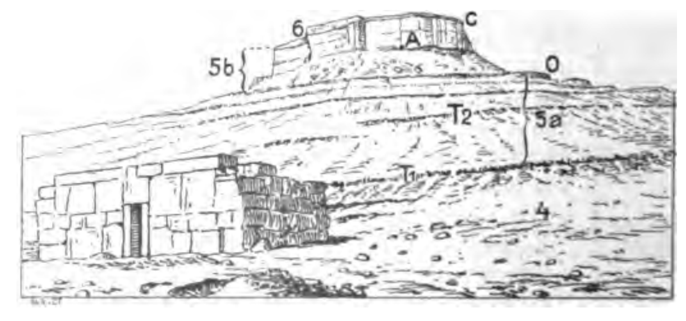
I. Profil des Sagaberges unmittelbar hinter Qasr es-Saga. (22.—23. 1. 1902.)

Fig. 9 (1 : 2000).



S = Qasr es-Saga im Querdurchschnitt, + 78 m über dem Birketspiegel, 35 m über dem Mittelmeer.
A = Anachoretenhöhle. St = Braune Steinkerne. C = Caroliabänke.
T 1—3 = 3 Turritellenbänke. O = Austernbänke.
P = Plicatula. H = Hydractinien.

Fig. 9 a.



7 (12 m)	3 m Gipsmergel, 1 m harte gelbe Mergelbank, 8 m Gipsmergel mit Fischresten.

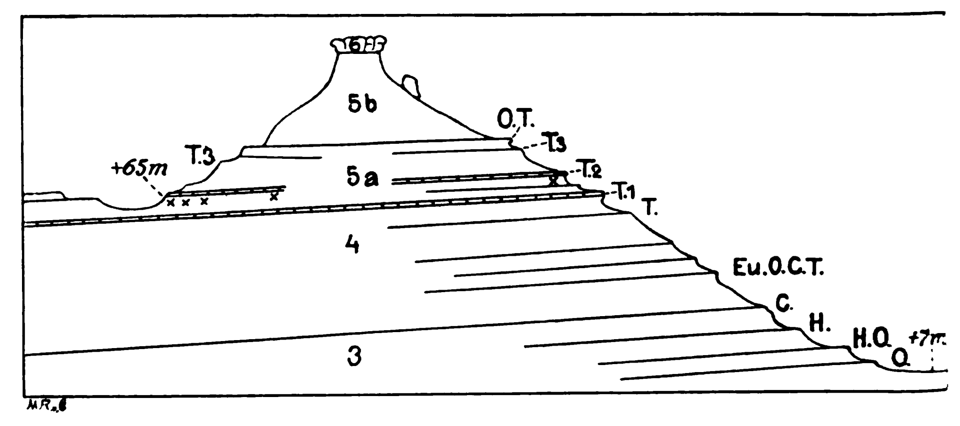
6 (6 m)	2 m Austernbank, 1 m Mergel. Zahn von Myliobates, 3 m Caroliabank, Turritella pharaonica.
5 b (10 – 20 m)	10 – 20 m Gelber Sand mit diskordanter Parallelstruktur, Mergelsandstein, schwarze und graubraune sandige Schieferthone mit Laubblattabdrücken und sonstigen kohligen Resten. Selten Korallen, Fischzähne, Schildkrötenreste.
5 a (19,25 m)	1 m Gelbe Austernbank mit roten Flecken, Ostrea Reili, Carolia, Turritella Lessepsi M. E. und fraudatrix Opp. n. sp., Panzer einer Schildkröte (Podocnemis), 2,70 m { Rote Lage mit Knochen (23. 1. II), Blätterthon mit gelben Wülsten, 0,30 m Bank mit Ostrea elegans, Turritella Lessepsi M. E., pharaonica Cossm. und vinculata Zitt., Oberste Turritellenbank, 1 m Mergel-Zwischenlage, 0,50 m Terrasse mit braunen Steinkernen und Austern, Cardium, Cytherea Newboldi, Lucina, Macrosolen, Solarium, Ficula, Turritella fraudatrix und pharaonica, 2—3 m Mergel, 0,30 m harte Austernbank, O. Cloti, 2 m Gipsmergel, 0,35 m Mittlere Turritellenbank, oben mit T. Lessepsi und pharaonica, unten mit Carolien, 2,50 m dunkle Mergel, 0,10 m rote Knollen, 0,05 - 0,15 m weisse Bank aus feinzerriebenen Muscheltrümmern, Fischotolithen und Zähnen, 6 m gelbe Mergel mit Seesäugethier-Wirbeln.
4 (12,55 m)	0,20 m Untere Turritellenbank mit: Einzelkorallen, Anisaster gibberulus, Schizaster, Plicatula polymorpha, Ostrea Cloti und elegans, Anomia, Spondylus, Lucina, Cardium, Carolia, Cardita, Arca, Turritella vinculata und pseudoimbricata Opp. n. sp., Calianassa, Myliobates, 3 m gelbe Mergel, 7 m Mergel, oben lokal mit Carolia, unten mit riesigem Gelenkknochen, 0,35 m Bank mit Hydractinia cornuta, Anisaster, Euspatangus, Serpula, Ostrea Cloti, Reili und elegans, Plicatula, Carolia, Macrosolen, Turritella pharaonica, Boghosi, Locardi, pseudoimbricata und Hofana,

4 (12,55 m)	2 m Mergel mit Graphularia, Hydractinia, Macrosolen, Gelenkknochen.
3	Bank mit Anisaster, Ostrea Cloti, Calianassa. Auf ihr steht das Qasr es-Saga.

Summa c. 65—70 m.

K. Halbinselförmiger Vorsprung des Plateauabfalls Gebel Hameier im NNW. von Dimeh, $1^1/_2$ Stunde westsüdwestlich von Qasr es-Saga. (26. 1. 1902.)

Fig. 10 (1 : 2000).



×× Haupt-Knochenlager, T I—III Haupt-Turritellenbänke,
O = Ostrea, C = Carolia, H = Hydractinia, Eu = Euspatangus.

6	3 m Caroliakalke.
5 b (23—24 m)	14 m aschgraue Schieferthone mit Pflanzenresten, 1—2 m brauner Sandstein, 5 m Schieferthon, 0,05 m Gipsplatte, 3 m glaukonitischer Mergelsand mit Roteisenstein.
5 a (13,65 m)	1,20 m Terrasse mit Ostrea Reili, Lucina, Turritella, 1 m gelbe Mergel, 0,15 m Obere Turritellenbank. Ostrea elegans, 1,50 m grauer Schieferthon, 3,70 m gelbe Mergel, unten stellenweise Knochen,

5a (13,65 m)	0,50 m gelbe harte Bank mit Ostrea Cloti, Macrosolen, Turritellen, Mittlere Turritellenbank, 2,50 m dunkle Schieferthone, oben zuweilen weisser Sandstein. Knochen von Welsen (Kopfpanzer und Wirbelsäule), Sägefisch (Säge), Schlangen (Wirbel von Moeriophis Schweinfurthi und Gigantophis Garstini Andr.), Krokodil (2 Skelette), Schildkröten (Platten), Walfisch (Gehörknochen), Sirenen (Wirbel).[1]) 1 m gelbe Mergel, 0,10 m Schicht mit viel Ostrea Cloti, 2 m gelbe Mergel.
4 (30—31 m)	0,40 m gelbe, harte Bank mit Turritellen. Untere Turritellenbank? 0,50 m weisser Sandstein, 4 m dunkelgrauer Schieferthon, 0,40 m harte Austernbank mit Ostrea Cloti, Macrosolen, Lucina und zahlreichen Turritella fraudatrix Opp. n. sp. 1 m graue Mergelsteilwand, 5,75 m verschüttet, in der Mitte eine Austernbank, 0,60 m gelbe, harte Bank, 0,40 m weisser Sand, 3 m schwärzlicher Schieferthon, 1 m gelber, harter Sandstein, 0,70 m gelber, fester Kalk mit Carolia, Macrosolen, Cytherea, Turbinella, 3 m schiefriger Mergel, 0,90 m eisenschüssiger Kalk mit Euspatangus, Ostrea Cloti, Turritella, unten Carolialage, 0,50—80 m weisser Sand, 0,10 m Roteisenstein, 1,55 m hellgrauer Mergel, 0,10 m weisse Schalenschicht, 7 m gelbgraue schiefrige Mergel mit kopfgrossen Kalkknollen.

[1]) 1/2 Stunde östlich von diesem Profil fand Dr. Stromer an einem Vorberg mit Hyänenhöhlen in diesem Horizont einen chokoladenbraunen Thon mit Blattabdrücken und Modiola cf. corrugata. Hier viele Welsschädel, Sägen von Pristis, Sirenenskelet, Scapula von Zeuglodon?, Plastron einer Schildkröte.

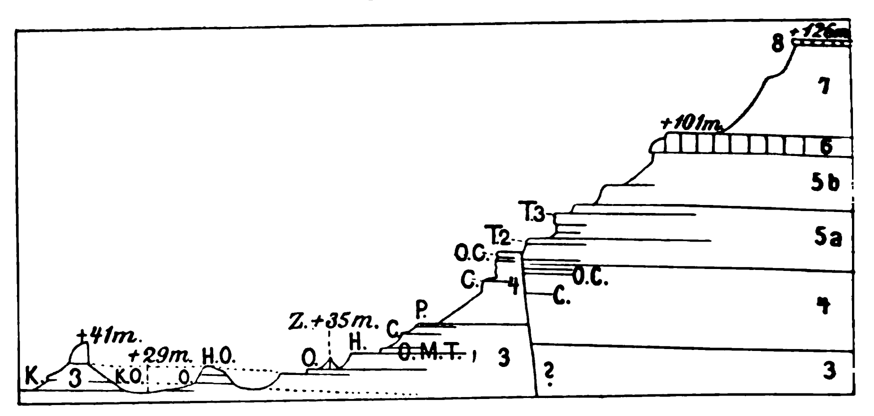
1/2 Stunde westlich von hier zwischen Profil K und L wurde der von Stromer beschriebene Schädel von Zeuglodon-Osiris Dames in einer Schicht von grauen und roten Mergeln ausgegraben.

3 (25,15 m)	0,15 m	Terrasse mit Ostrea, Carolia, Turritella, Calianassa,
	5 m	Graue und gelbe Mergel, Modiola,
	20 m	Austernbank mit Hydractinia, Macrosolen, Turritella, Grauer Schieferthon mit Wülsten, Schwarzer Schieferthon mit Roteisensteinknollen, Weisse Schalenschicht mit roten Flecken, Mergel, Austernschicht. Hydractinia, Grosse Ostrea Fraasi und elegans, Mergel, Austernschicht mit kleinen Austern am Bergesfusse.[1])

Summa c. 95—97 m.

L. Profil am „Korallenhügel", 2 Stunden nordwestlich Dimeh. (13. 2. 1902.)

Fig. 11 (1 : 2000).



Z = Unser Zeltlager am 13.—15. II. 1902.
T = Turritellenbänke.
O = Ostrea.
C = Carolia.
M = Macrosolen.
H = Hydractinia.
K = Korallen am „Korallenhügel".

[1]) Der Fuss des Bergabhangs liegt c. 50 m über dem Spiegel der Birket d. h. + 7 m über dem Meere.

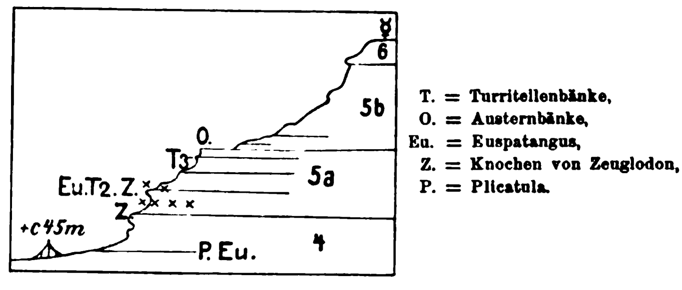
8	1 m gelbgrauer Kalkstein mit Echinolampas Crameri, Mikropsis (?), Turritella.
7 (23,50 m)	7,50 m graue und gelbe Letten mit Gips, 4 m Mergelsand mit Glaukonitkörnern, Cytherea, Lucina (?) Knochen, 12 m bunte Gipsletten mit einer Bank braunen Mergelsandsteins mit Vulsella,
6 (5,50 m)	1,50 m Kalkquadern mit Austern, 1 m bröckliger Kalk, 3 m weisser Kalk mit Carolia, Plicatula Bellardii.
5 b (16,50 m)	2,50 m hellgraue Sande und Thone, 9 m aschgraue Schieferthone, weisser Sand und brauner Sandstein. 0,50 m rotvioletter, sandiger Kalk mit Austern, eine Stufe bildend, 4 m Steilwand von bunten Mergel mit Gipsflecken.
5 a (11,65 m)	0,10 m Austernbank, 1 m Mergel, 0,70 m Obere Turritellenbank, Stufe bildend; Hydractinia, Solarium, 0,40 m Gelbe Gipsmergel, 0,20 m Austernbank, 0,35 m rötliche Schicht mit weissen Schalen, 0,50 m graue Mergel, 0,15 m Ostrea Cloti, Turritella pharaonica und Lessepsi, 0,30 m graugrüne Letten, 2,50 m gelbe Wand, 0,70 m gelbe Mergel mit Turritella, 0,70 m graue Gipsmergel, 0,50 m gelbe (mittlere) Turritellenschicht, 3 m Steilwand von graugrünem Schieferthon,
5	0,50 m weisser Sand, diskordant geschichtet, 0,05 m harter Kugelsandstein.
4 (18,10 m)	0,20 m Bröckelkalk mit Ostrea Cloti, Fischschädel, 0,60 m graugrüne Letten mit Fasergipsadern, 0,70 m gelber Sandstein, Stufe bildend, 0,50 m Steilwand mit Ostrea Cloti, Carolia, 0,80 m sandige Mergel und Sand mit Wülsten und roten Knollen, 6 m graugrüner Thon mit Gips, in der Mitte Carolialage mit grossen Caroliaschalen,

4 (18,10 m)	9 m Mergel, 0,30 m Mergel mit Plicatula polymorpha, Ostrea Cloti und Reili, Spondylus, Carolia, Arca und rundlichen Bivalven, Turritella pharaonica und pseudoimbricata Opp.
3 (16 – 17 m)	6 m Gelbe Mergel, in der obern Hälfte mit einer Caroliabank, 1 m Mergel, oben mit Ostrea Cloti, Arca, Natica, 4—5 m gelbe und blaue Mergel, gekrönt von einer Bank mit viel Hydractinia, Spondylus, Carolia, Cardium, Macrosolen, Turritella pseudoimbricata. 1 m gelbe Mergel, oben mit Hydractinia, Ostrea Cloti und kleinen Austern, 4 m Mergel mit Hörnerwülsten; am Korallenhügel mit Riff aus Goniaraea elegans, Astrohelia similis, Ostrea Fraasi.[1])

Summa 99—100 m.

M. Profil des „Zeuglodonberges" (☿ auf Schweinfurths Karte), 3 Stunden westsüdwestlich Qasr es-Saga. (24. 1. 1902.)

Fig. 12 (1 : 2000).



[1]) Diese untersten Schichten wurden, soweit sie an dem in der Ebene vorliegenden „Korallenhügel" auftreten, früher von Mayer-Eymar und mir (Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. 1900. S. 44) als zu Abteilung II 1 und einer durch Randverwerfung vom Gebirgsabfall getrennten Scholle gehörig angesehen, was ich jetzt nach genauerer Nachprüfung berichtigen möchte.

Fig. 12 a.



Zeuglodonberg vom Fusse aus gesehen.

6		Caroliabänke, weiss, Ostrea.
5 b (c. 22 m)	c. 22 m	Aschgraue Thone, brauner Sandstein mit Säugethierwirbel, schwache Austernbank, Gipsmergel mit violettbrauner eisenschüssiger Lage.
5 a (16,90 m)		1 m Austernbank, deutliche Terrasse bildend. Hydractinia (selten), Ostrea, Cardium, Macrosolen, unten Carolia, 1 m rotgefleckte, harte Mergel, 0,10 m Kalk mit viel Turritellen. Obere Turr.-Bank. 0,80 m grauer Schieferthon mit Wülsten, 3 m hellgraue und gelbe Mergel mit weissen Gipsflecken, 5 m dunkler Schieferthon mit Gips. Sägefisch und andere Fischreste, Schildkröten, 1 m mittlere Turritellenbank. Violetter, unten grauer Kalk mit Euspatangus formosus, Carolia, Ostrea Cloti, Lucina, Solarium, Turritella Lessepsi, Clavellites aegyptiacus, Nautilus, Skelet-Unterkiefer von Zeuglodon Osiris Dam.[1]) 1 m Wechsel von Sand, Thon und Eisenstein, $3^1/_2-4^1/_2$ m Mergel oder grauer Thon mit violettem Kalkstein. Fossiles Holz, Clavellites Noae, Turritella, Nautilus Nubari. Viele Knochen von Fischen, Krokodil, Schlangen (Moeriophis Schweinfurthi Andrews) Schildkröten.[2])

[1]) Original von Schweinfurth-Dames.

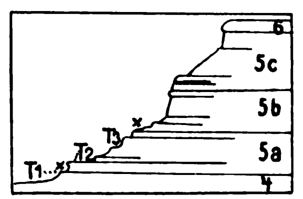
[2]) Etwas östlich von diesem Profil im gleichen Horizont Moeriophis

4 (8,80 m)	0,60—1 m gelber und rötlicher Mergelkalk mit Carolia, Ostrea, Myliobates, Schädel von Eosiren libyca Andrews, 0,25 m weisser Sand mit falscher Schichtung, 1,50 m grauer Thon und Mergel mit Knochen, 0,25 m violetter Eisenstein, 1 m grauer Thon, 5 m verschüttet, darin eine rötliche Lage mit Euspatangus, Plicatula und runden Bivalven.

Summa c. 53 m.

N. Profil ½ Stunde nordwestlich vom Zeuglodonberg mit einem Fischzahnlager. (14. 2. 1902.)

Fig. 13 (1 : 2000).



6	3 m Caroliakalk.
5c (15 m)	4 m Steilwand, schwarze Schieferletten, weisser Sandstein und Gipsthon, 7 m Thon, Kalk und gelbe Mergel, 1½ m gelbe Mergel, Stufe bildend, ½ m grauer Thon, 2 m gelbe, rotgefleckte Mergel.
5b (10,70 m)	1 m hellgelbe, sandige Mergel, 9 m Steilabsturz von grauem Thon im Wechsel mit weissem Sand, 0,06 m weisse, plattige Sandsteine, 0,05 m Bonebed, eisenschüssige, sandige Breccie mit Zähnen von Lamniden, Hemipristis curvatus Dames, Aprionodon frequens Dam. (häufig), Myliobates (häufig), Chrysophrys sp., Platten, Wirbel und Flossenstacheln von Fischen,

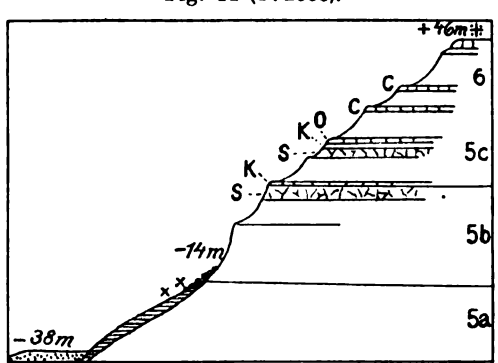
Schweinfurthi (Wirbel), Moeritherium Lyonsi Andr. (Oberkiefer), Moeritherium sp. (Unterkieferast).

5 b (10,70 m)	0,30 m plattiger Sandstein, 0,10 – 25 m Bonebed wie oben, 0,10 m Mergel.
5 a (15 m)	1,20 m gelbe Mergel, Stufe. 0,20 m braune Bank mit Muschelkernen, Macrosolen, Astarte, Ostrea, Turritella. Obere Turritellenbank. 2 – 3 1/2 m schwarzer Thon, 2 1/2 m gelbe, sandige Mergel, nach Osten dafür 5 m weisser und rostiger Sandstein, 1 m Gipsthon, 0,20—40 m rote Zeuglodonschicht oder mittlere Turritellenbank, Stufe bildend; viel Carolia, Turritella, 0,50 m gelbe Mergel mit grauen Thonzellen, Carolia, Schildkröte, 0,30 m weisser Sandstein, 1 m gelbe, graue, harte Mergel mit Skelet einer Sirene.
4 (2,10 m)	0,10 m rote Schicht mit Carolia und Turritella; untere Turritellenschicht, 1 m graue Mergel, 1 m Gipsthon.

Summe 45,80 m.

O. Berg (-|- auf Schweinfurths Karte) dicht nördlich vom Westende der Birket el-Qerūn, = Gebel d'Archiac Mayer-Eymars. (20. 1. 1902.)

Fig. 14 (1 : 2000).



C = Caroliabänke. O = Austernbank. K = Schalenschicht mit Korallen und weissen Konchylienschalen. S = Schwarzes Mergelband mit weissen Gipsadern. × Knochen von Fischen und Landsäugetieren.

6 (c. 19 m)	2—3 m Caroliabank mit Carolia, Ostrea Reili, Mactra Fourtaui, Cardita, Cardium, Arca, Turritella pharaonica, Mesalia Locardi, 0,50 m weisse Mergel mit Brauneisenstein, 0,50 m Caroliabank, 9 m grüne Thone, 1 m Bank voll Turritella carinifera, Myliobates, 0,15 m Caroliabank, 4 m grünlich sandige Mergel mit Gips, 0,20 m Bank mit Carolia und Ostrea, 1 m härterer Kalk.
5c (18,30 m)	7 m graugrüne und schwärzliche Thone, 1 m Kalk mit Austern und Lucinaschalen, 1 m gelbliche Mergel mit rötlichen Wülsten und weissen Schalen (ähnlich der roten Schalenschicht in II 2 bei Dimeh), Astrohelia similis, Lucina pharaonis, Cardita Viquesneli, Cytherea Newboldi, Nautilus, 9 m schwärzlicher, sandiger Thon mit weissen Gipsadern. 0,30 m gelbgraue Mergel mit rotbraunen Wülsten und weissen Konchylienschalen (Schalenschicht).
5b (23 m)	11 m graubraune oder schwarze Mergel mit weissen Gipsschnüren, 12 m steiler Absturz aus gelblichem Mergelsandstein.
5a und 4	c. 24 m Abhang verschüttet; stellenweise viele (eocäne) Fischknochen und subfossil Unterarmknochen von Camelopardalis, oberflächlich diluviale Seeablagerungen.

Summe 84,3 m. Am Fusse Dünen.

Aus den gegebenen, in ONO.—WSW.-Richtung aneinander gereihten Profilen der Qasr es-Saga-Reihe geht die ganze Art ihrer Ausbildung in ihren einzelnen Abteilungen und Schichten nebst ihrer Fauna, die Art des horizontalen Wechsels u. s. w. klarer hervor, als aus langen Auseinandersetzungen. Doch sei es mir noch gestattet, in wenigen Worten die allgemeinen stratigraphischen Ergebnisse dieser Aufnahmen zusammenzufassen.

Die Schichten fallen durchweg mit geringer Neigung, etwa 1—2°, ein und zwar im östlichen Teil der Plateauwüste bis etwa zum Profil K am Korallenhügel gegen NNW., von

da an schlägt das Einfallen anscheinend mehr in WNW.-Richtung um, so dass weiterhin in der Richtung nach WSW. zum Westende des Sees allmählich jüngere Schichten an den Fuss des Hauptabfalls und auch an das Ufer des Sees herantreten. An dem von Schweinfurth mit dem Buchstaben Σ bezeichneten Berge nimmt die Vorterrasse von Dimeh ihr Ende und die zweite oder Hauptplateaustufe tritt direkt an den See. Damit verschwindet auch die Abteilung 2 mit der roten Schalenschicht und der charakteristischen „Schafheerde", welche bis dahin in ziemlich gleicher Höhe über dem Seespiegel zu verfolgen war, von der Oberfläche und taucht unter denselben hinab.

Die Mächtigkeit der einzelnen Abteilungen nimmt namentlich durch Einschaltungen mächtiger Thon- und Mergellagen in der Richtung nach WSW. zu. Im Durchschnitt sind sie sechsmal so stark als am Mokattam z. B. in dessen Normalprofil C und siebenmal so stark als am Gebel el-Ahmar bei Profil D.

Die einzige Abteilung, welche am Mokattamgebirge (3—5 m) speziell bei Ajun Musa (hier 14 m) stärker ist als im Fajūm (hier 1½ m)[1]), ist die alleroberste 8, der Deckkalk mit Echinolampas Crameri. Die darunter liegenden Abteilungen 7 und 6 sind auch nur 2—3 mal stärker als am Mokattam, nur im westlichsten Profil N am Westende des Sees schwillt auch der obere Caroliakalk 6 durch Einschaltung von Thonen zu 19 m an.

Den allergrössten Gegensatz gegen die Ausbildung am Mokattam bekundet die mächtige Abteilung 5, welche bei Kairo eigentlich nur mit Mühe überhaupt nachzuweisen ist und allein im Fajūm ihre besondere Rolle spielt. Keine Abteilung der Oberen Mokattamstufe zeigt hier in lithologischer wie faunistischer Beziehung einen so ausgeprägten fluviomarinen Charakter, keine weist so sehr auf die Nähe eines einmünden-

---

[1]) In der Mitte zwischen Fajūm und dem Mokattam (vergl. Profil F und Figur 15 weiter unten) hält die Stärke dieser Abteilung (4—6½ m) die Mitte zwischen den im NO. und SW. zu beobachtenden Extremen.

den Flusses, des Urnil, hin, als diese. Auch ihre Mächtigkeit, ihr Verschwinden am Mokattam hängt mit letzterem Umstand zusammen. In allen Profilen des Fajūmgebiets schon von F an macht sich deutlich eine Zweiteilung der Etage 5 geltend.

Der höhere Komplex 5 b besteht aus den als mächtige Steilwand auffallenden aschgrauen, manchmal kohligen Schieferthonen mit Pflanzenresten und Sanden oder Sandsteinen, von denen letztere in Profil G und N einen wichtigen marinen Fischhorizont oder Bonebed reich an schönen Haifischzähnen enthält.

Die tiefere Gruppe 5 a, welche oben mit einer wohlausgebildeten Terrasse voller Austern abschliesst, setzt sich aus Austernbänken, Turritellenbänken und Carolialagen in wiederholtem Wechsel mit Mergeln, Thon und weissem Sand zusammen. Häufig sind rotbraune bis violette Knollen oder ganze Bänke von schwach eisenschüssigem Kalk mit Steinkernen von Bivalven und Gastropoden, unter denen solche der fluviatilen Süsswassergattungen Lanistes und Ampullaria (cf. ovata) neben echt marinen Formen (Gisortia, Cassidaria etc.) nicht selten sind. Diese Knollenkalke sind neben den Mergeln und Thonen das Hauptmuttergestein der Knochen und ganzer Skelette von marinen und fluviatilen Reptilien und Wassersäugethieren, denen sich leider nur sehr vereinzelt auch eingeschwemmte Reste von Landsäugethieren (Barytherium, Moeritherium) zugesellen. Der wichtigste derartige Horizont liegt ziemlich beständig dicht über der Basis von 5 a zwischen der „ersten" und „zweiten Haupt-Turritellenbank".

Nach Westen zu nimmt die fluviomarine Abteilung 5 derart an Mächtigkeit zu, dass man eine Dreiteilung vornehmen, nämlich über 5 b (23 m Sandstein und Mergeln) noch 5 c unterscheiden könnte, worin 2 rotbraun gefleckte Schalenschichten mit weissen Konchylienschalen (Cardita Viquesneli etc.) und Korallen ganz ähnlich denen von Dimeh in Abteilung 2 und eine Austernbank auffallen[1]) (siehe die Profile N, O).

---

[1]) Vergl. auch A. Kaiser, Reise um den Kurūn-See. S. 20.

Die Abteilung 4 hat als Decke eine „untere Turritellenbank“, die zuweilen auch als Ostrea Clotibank erscheint; in der Mitte liegt eine oft weithin auffallende Caroliabank mit riesigen, glänzenden Schalen dieser schönen Muschel und an der Basis folgt eine an Plicatula polymorpha sehr reiche, selten zu übersehende Lage.

3 ist am wenigsten in den Fajūm-Profilen charakterisirt und auch weniger wichtig. Wir lernten sie nur in Profil I, K und L am Fusse des Gebirgsabfalls kennen; am stärksten (16—17 m) erscheint sie am „Korallenhügel“. Hier herrschen Gipsmergel vor, denen sich Lagen mit grossen Austern (O. Fraasi und Hydractinien) einschalten.

Die Fauna der Abteilung 3—8 ist ziemlich einheitlich. Die meisten Arten gehen durch alle Abteilungen hindurch, soweit solche nicht überhaupt fossilarm oder leer sind, wie besonders 7. Daraus dürfte wohl hervorgehen, dass sämmtliche Abteilungen zusammen nur eine grosse Stufe bilden, nämlich das Obere Mitteleocän.

Die Korallen der Gattungen Astrohelia und Goniaraea wurden in 2, 3 und 5c beobachtet, Hydractinia cornuta in 2—6 excl. 5b (häufig nur in 2—3), die Seeigel Echinolampas Crameri und Anisaster gibberulus in 4 und 8, Euspatangus formosus in 4 und 5a.

Carolien und Plicatula finden wir von 2—6, doch beschränkt sich das massenhafte Auftreten von Plicatula polymorpha unbedingt nur auf 4, die sogenannten Plicatulabänke. Ostrea Cloti, Reili, Fraasi und elegans beobachteten wir in 2—5a.

Von der nach den Austern artenreichsten Gattung Turritella ist die allerhäufigste Spezies: T. angulata, welche Cossmann jetzt als pharaonica unterschied, schon im Untern Mokattam sehr verbreitet, dann im Obern in allen Turritellenlagen in 2, 4, 5a, 6 und 8, ja sie geht noch viel höher mitten ins Oligocän hinauf. Von den übrigen Arten aus der Untern Mokattamstufe fand ich Turritella Boghosi Cossm. nur in II 4,

T. Hofana M.-E. (= Zitteli M.-E.) in II 2, 4 und 6. Charakteristische Arten der Obern Mokattamstufe sind T. Locardi Cossm. in 2, 4 und 6, T. vinculata Zitt. in 2, 4 und 5a, pseudoimbricata Oppenh. n. sp. (= cf. Desmaresti bei Blanckenhorn, Geologie Aegyptens II) in 3 und 4 (d. h. der „Untern Turritellenbank"), T. frandatrix Opp. n. sp. in 4 und 5a. Als Leitformen für bestimmte Abteilungen sind beachtenswert T. carinifera[1]) in 2 und 6, noch mehr aber T. Lessepsi M.-E. für 5a, d. h. die beiden oberen „Turritellenbänke", welche sie oft allein erfüllt.

Fischreste fanden sich in allen Abteilungen der Untern und Obern Mokattamstufe, die Sägefische bis jetzt nur in I 3, II 1, 5a und 5b. Flussfische (Schädel von Welsen) beschränken sich auf die fluviomarinen Schichten 5a, wo andererseits Haifischzähne fehlen. Panzer von Schildkröten und unbestimmbaren Knochen gibt es vielfach in 4, 5a und 5b, Zeuglodon in 1 und 5a, näher bestimmbare Reste von Schlangen, Krokodilen, Sirenen und Landsäugethieren nur in der fluviomarinen Abteilung 5a.

3. Zur Kenntniss des fluviomarinen Obereocän-Oligocäns der Libyschen Wüste.

Die auf das marine Mitteleocän in der Libyschen Wüste zunächst folgende zusammenhängende Reihe von Sedimentärablagerungen (von 125—250 m Mächtigkeit) gehört einer andern Facies an, die wir vorher nur in der Abteilung 5a der Obern Mokattamstufe an der Birket el-Qerūn wenigstens angedeutet finden. Sie ist eine fluviomarine Aestuarienbildung des „Libyschen Urnil", in welcher fluviatile, brackische und marine Bildungen wechseln, wobei aber die erstgenannten überwiegen. Das vorherrschende Gestein sind Sande und Sandstein, denen sich Kiese und gipsführende Thone anschliessen, während

[1]) Am Mokattamgebirge bei Kairo auch in I 4.

Mergel und Kalke selten sind. Dieser Gegensatz spricht sich an der Basis des Komplexes auch orographisch durch das weite Zurücktreten der vierten, aus diesen Schichten aufgebauten „Fajūmstufe“ hinter dem scharfen Rand des mitteleocänen Plateauabfalls aus. Obwohl eine Diskordanz nicht direkt zu beobachten ist, könnte man doch speziell im NO. an eine Lücke oder Unterbrechung der Sedimentation zu Beginn des Obereocäns (Bartonien) denken und geneigt sein, den ganzen fluviomarinen Komplex ins Oligocän zu stellen. Mayer-Eymar fasst letzteren thatsächlich als Ligurien (Unteroligocän) und Tongrien (Mitteloligocän) auf, und glaubt das Bartonien hier nicht vertreten. Die ägyptischen Landesgeologen, Beadnell und ich, haben in ihren Schriften trotzdem sich für Obereocän und Unteroligocän ausgesprochen.

Die Frage des Alters, speziell der Grenze zwischen Eocän und Oligocän kann mit Sicherheit nur durch die paläontologischen Befunde gelöst werden. Aber grade da liegt die Hauptschwierigkeit und erheben sich schwer lösbare Rätsel.

Sieht man von den überall mehr oder weniger verbreiteten pflanzlichen Resten und vereinzelten Schildkrötenknochen ab, so lassen sich meines Wissens 5 wichtige fossilführende Horizonte (a—e) innerhalb des Komplexes unterscheiden:

Der tiefste, nahe der Basis gelegene, sandig-kiesige Horizont (a) liefert neben unglaublichen Massen von verkieselten Bäumen schwach verkieselte Knochen von Fluss und Land bewohnenden Reptilien und Säugethieren, die wenigstens, was die Säugethiere betrifft, wesentlich von der entsprechenden Fauna des ägyptischen Mitteleocäns abweichen, meist ganz neuen, noch unbekannten Gattungen angehören und, soweit überhaupt vergleichbar, mehr oligocänen Habitus aufweisen. Die Reptilien scheinen gleichen Gattungen, Tomistoma und Podocnemis, anzugehören, wie wir sie schon im Mitteleocän Aegyptens kennen lernten. Von Säugethieren hat man Wasserbewohner bis jetzt nicht wahrgenommen. Dagegen sind die Landbewohner durch ein merkwürdiges, nagethierartiges Raubthier (?) (Phiomia), das

nach Andrews[1]) zu den Creodontia oder Urfleischfressern gehört, die Hyracoideen oder Klippschliefer (? !) nach demselben Autor durch 2 Arten von Saghatherium Andr. gen. n., die Proboscidier durch Palaeomastodon g. n., die Anthracotheriden durch die sonst vorherrschend oligocäne Gattung Ancodus, endlich eine unbekannte Hufthierfamilie durch das wunderbare Arsinoitherium Zitteli Beadn. vertreten.[1])

Der zweite Fossilhorizont (b) wird gebildet aus rotem Sandstein mit Steinkernen fluviatiler Mollusken (Unio, Pseudodon, Mutela, Spatha, Lanistes), die den heutigen Formen des Nil und des tropischen Afrika nahe stehen, was übrigens ebenso für den oben erwähnten Lanistes subcarinatus und die Ampullaria cf. ovata der Abteilung 5a des Mitteleocäns gilt.

Dann folgt als Abschluss einer Plateaustufe ein in brackischem Wasser gebildeter Kalk (c) mit Abdrücken von Cerithium tiarella (bekannt aus Mittel- und Obereocän), Potamides tristriatus (des Mitteleocän), Potamides scalaroides (des Obereocän), Potamides conjunctus (des Mitteloligocän) und Melania Nysti (des Mitteloligocän). Diese Fauna ist sehr charakteristisch für die ganzen in Rede stehenden Ablagerungen. Man sieht eocäne und oligocäne Faunen Europas in der nämlichen Schicht gemischt und kann demnach schwanken, welchen von diesen zwei Gruppen man das entscheidende Gewicht beilegen soll. Ich selbst habe die unter dem Kalk liegende Gruppe von Sedimenten dem Obereocän zugerechnet und in diese brackische Bank die Grenze gegen das anbrechende mehr marine Oligocän gelegt.

Auf der Terrasse der Melania-Potamides-Kalke erhebt sich eine letzte fünfte Plateaustufe mit einem Basaltlager unterhalb des Gipfels. Ungefähr in der Mitte des Abhangs unter der Basaltdecke erscheint der vierte Fossilhorizont (d) in Gestalt von Sandstein mit sehr schlecht erhaltenen Abdrücken mariner

---

[1]) Phiomia ist nach meiner und Dr. Stromers Ansicht sicher kein Creodonte, Saghatherium kaum ein Hyracoide, Arsinoitherium aber ist im Zahnbau Coryphodon ähnlich, also wohl ein Amblypode.

Thiere, unter denen vom Schweinfurth-Plateau im NNW. der Birket nur Membranipora sp., Turritella pharaonica und nach Beadnell noch Pleurotoma ingens sicher bestimmt wurden. Die beiden genannten Arten sind uns aus der Mokattamstufe wohlbekannt, speziell T. pharaonica als eine der allergemeinsten Schnecken. Hierher gehört ferner die von Mayer-Eymar mühsam zusammengebrachte Suite von den Sandbergerhügeln im W. der Pyramiden von Gizeh und dem Gebel Fuchs, wovon ich nur folgende ziemlich sichere Arten erwähne: Lucina pharaonis (der Mokattamstufe), Natica cf. crassatina (des Oligocäns) und Turritella pharaonica. Also auch hier wieder eine Mischung von echt eocänen und oligocänen Arten, unter denen die ersteren diesmal überwiegen.

Aehnlich wie hier verhält es sich auch mit der fünften Fossilschicht (e), die über dem Basaltlager liegt und auf dem Gipfel des Kom el-Chaschab den obern Abschluss der ganzen fluviomarinen Reihe bildet. In meinen früheren Ausführungen über das Palaeogen in Aegypten[1]) hatte ich noch mit Mayer-Eymar geglaubt, dass die Fossilschicht an genanntem Punkte von genau gleichem relativem Alter sei wie diejenige der Sandbergerhügel und der Basis des Schweinfurth-Plateaus (d). Nachdem ich aber auf unserer diesjährigen Reise das durchgehende Basaltlager am Ostfusse der Whitehouse-Hügel und des Kom el-Chaschab sowie auch südwestlich davon in der Mitte der sandigen Schichtenreihe vorgefunden und am letzten Ort hoch über dem Basalt einen fossilführenden Kalksandstein, wie ihn Mayer-Eymar vom Kom el-Chaschab beschreibt, als oberste Lage entdeckt habe (vergl. die folgenden Profile), muss ich nunmehr auch in der obersten Sandsteinschicht des Kom el-Chaschab einen etwas höheren Fossilhorizont annehmen. Schweinfurth sammelte darin Tellina Bayani M.-E. (des Unteroligocäns), Turritella terebralis v. sulcifera Desh. (des Obereocäns, direkter Vorläufer der ähnlichen T. terebralis v. subgradata des Miocäns), Ficula Mayer-Eymari Blanck. (der Mokattamstufe, ver-

---

[1]) Geologie Aegyptens II, p. 462—64.

wandt mit F. condita des Miocäns). Ich selbst habe dieser Liste nur noch Lucina pharaonis (?) (der Mokattamstufe und des vierten Fossilhorizonts d) von meinem neuen Fundpunkt (in Profil Q) zuzufügen.

Nehmen wir nun für den ersten und zweiten (fluviatilen) Fossilhorizont a und b ein obereocänes, für die beiden letzten marinen ein unteroligocänes Alter an und legen die untere Grenze des Oligocän in die brackische Schicht, dann müssen wir die Folgerung ziehen, dass in Aegypten beziehungsweise Nordafrika und an seiner Nordküste zur Zeit des Obereocän oder Bartonien und gegen Ende desselben schon gewisse Thiertypen existirten, welche wir in Europa erst später kennen lernen (Ancodus, Melania Nysti, Cerithium conjunctum), also das Festland Afrika für Landbewohnende Säugethiere und das Aestuarium des Nil für Gastropoden ein sogenanntes „Schöpfungszentrum" bildeten, von dem diese Thiertypen ausgingen. Ferner, dass viele echt eocäne Typen sich hier in Aegypten (wohl infolge der Beständigkeit der Facies und äussern Lebensbedingungen) länger (noch bis mitten ins Oligocän) erhalten haben, als wir das für Europa gewohnt sind. Bei dieser Altershypothese gleichen sich aber jedenfalls die widersprechenden Momente der Mischfauna besser aus, als wenn wir einseitig auf die jungen Säugethiertypen Ancodus und Palaeomastodon und die oligocänen Gastropoden uns stützend, den ganzen fluviomarinen Komplex als Oligocän, die tieferen Lagen als Unteroligocän, die höheren marinen als Mitteloligocän oder Tongrien auffassen.

Auf unserer zweimaligen Reise ins Fajūm hatten wir viermal Gelegenheit, diese Schichten kennen zu lernen:

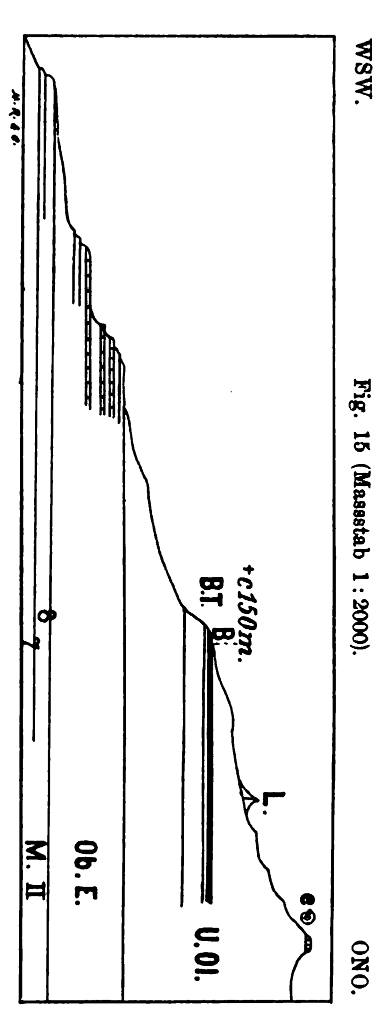
P. Ostabhang der Whitehousehügel[1]) Schweinfurths, von den Beduinen gewöhnlich auch Kom el-Chaschab genannt. (7. 2. 1902.)

[1]) Vergl. Geol. topogr. Karte der Kreide-Region bei den Pyramiden von Schweinfurth. Peterm. Mitth. 1889. Taf. I.

Oben Grobes Geröll von Feuerstein, Kieselkalk, schwarzem Porphyr etc.

c.25–30 m { e. Violettbrauner, löchrig zerfressener Sandstein (darin an dem isolirten Kegel im N. dieser Hügelgruppe, dem Kom el-Chaschab im engeren Sinne, von Schweinfurth Petrefakten mit Schale gesammelt),
Weisser Knotensandstein, Sande und Kies mit verkieselten Baumstämmen bis zu 14 m Länge.

In der Ebene, 25 Minuten vom Ostfuss entfernt, anstehend Basaltlager mit Kieselsinteradern (letztere auch von Schweinfurth beobachtet).



Q. Lagerplatz in der Wüste, 2 Tagereisen westsüdwestlich vom Menahaus. (7/8. 2. 1902.)

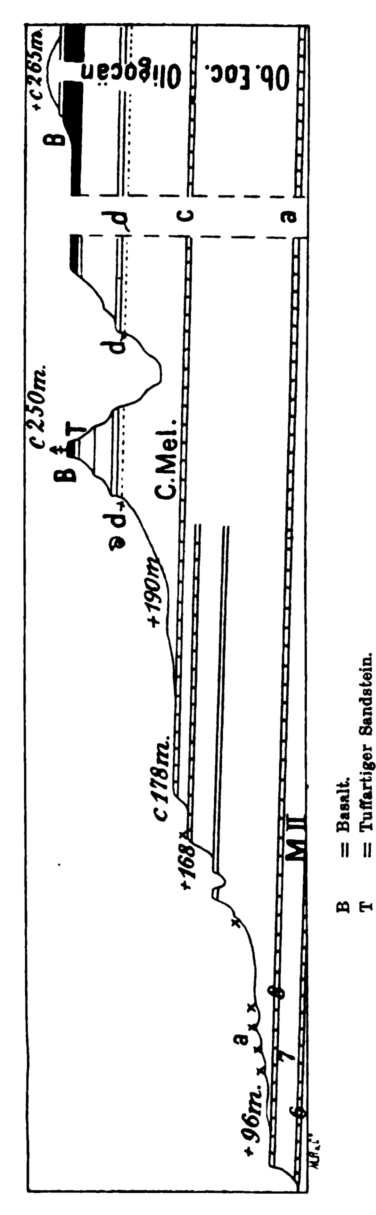
Fig. 15 (Masstab 1 : 2000).

Oligocän.	e)	c. 1 m Grauer, grober Sandstein mit Abdrücken von *Lucina cf. pharaonis* ?
		c. 30—35 m Knotensandstein, Sand und Kies mit vielen fossilen Baumstämmen,
		1 m Basalt, oben plattig abgesondert und in Scherben zerfallen, unten schlackig löchrig, aschgrau verwittert mit runden Knollen dichteren Basalts und mit Drusen von Prasem und Chalcedon, grünen Mandeln von Delessit, Adern von Kieselsinter,
		0,70 m grüner und violetter, geschichteter Tuff,
		0,45 m gelblicher, eisenschüssiger Mergelsandstein oder rötlicher Knotensandstein, oben durch Kontakt verändert,
		5 m Sand, violett oder weiss und Knotensandstein,
		c. 16 m aschgrauer Thon, Sand und Sandstein.
Obereocän.		Stufe aus:
		1 m Thoneisensteinlagen (3) mit Thon und Sand dazwischen,
		1 m grauem Thon mit Gips,
	c)	0,15—25 m ockergelber Mergelkalkbank, ähnlich dem Melanien-Potamideskalk (c),
		1,20 m grauem Thon,
		0,25 m ockergelber Mergelbank,
		3 m grauem Thon.
		Tiefere Terrainstufe aus:
		6 m oben hellrötlichem Kalk mit Kalkspathdrusen und Adern, darunter feuerrotem Sand,
	a)	3 m Sand, Sandstein und Kies mit versteinertem Holz (a).

(Die untere Fortsetzung dieses Profiles von dem unmittelbar folgenden Steilabsturz des Mitteleocäns bis zur Ebene siehe oben bei Profil F).

R. Südostecke des basaltischen „Schweinfurth-Plateaus“, der höchsten Aufragung zwischen Wadi Natrun und Birket el-Qerūn und von dort hinab in OSO.-Richtung. (9.—10. und 16. 2. 1902.)

Fig. 16 (Massstab 1 : 4000).



B = Basalt.
T = Tuffartiger Sandstein.
d = Sandstein mit marinen Konchylien.
c = Brackischer Melanien-Potamideskalk, Grenze von Eocän und Oligocän.
XX = Verkieselte Baumstämme und fossile Knochen.
M II 8, 7, 6 = Obere Mokattamstufe des Profils G.

Fig. 17. Blick auf die SO.-Ecke des Schweinfurthplateaus von SO. aus.



d)

c. 7 m Kies mit grünlichem Sand und Trümmern von verkieseltem Holz. Oberste Plateauschicht,
1—2 m graugelber Sandstein,
6 m grünlich aschgrauer, mürber schlackiger Basalt und Tuff,
3 m Decke aus feinkörnigem Feldspathbasalt,
1,20 m grüner und violetter, tuffartiger, kalkiger Sandstein mit braunen Thonpartikeln,
2 m gelber, roter und weisser Knotensandstein,
2 m rote Letten,
4,30 m grauer und rötlicher Sand,
1,30 m vorspringende Bank von grauem Knotensandstein,
9,30 m Sand und mürber Sandstein,
0,50 m Knotensandstein, vorspringende Kante,
0,40 m Mergelkalk,
0,10 m Knotensandstein,
1,50 m bunte Letten,
2 m Sandstein mit Abdrücken mariner Schalthiere,
5,80 m grüner und gelber Sand und Kies,
0,70—1 m Mergelkalk und Mergel,
12 m Sand und Thon,
c. 10—12 m verschüttet. Plateaustufe.

(Summa c. 70 m).

c)

8-10 m:
Gelber Kalk mit *Melania Nysti* und *Cerithium conjunctum*,
Weisser Kalk,
Weisser Sand,
Roter Sand, Sandstein und Kies, unten mit vereinzelten Knochen von Schildkröten.

c. 40 m:
Wiederholter Wechsel von kreidigem und ockergelbem Mergelkalk mit Kalkspathdrusen, weissem und rotem Sand, Knotensandstein, Kies und buntem Thon, in mehreren Terassenstufen aufgebaut.

a)	c. 25 m	Am Fuss dieser untersten Terrassen der „vierten Fajûmstufe" Schweinfurths [1]) dehnt sich eine Hochfläche aus, durchzogen von flachen Thälern mit niedrigen, sanft abgerundeten, welligen Erhöhungen aus Kies, grauem und rotem Sand, Knotensandstein, Eisensteinlagen und grünem Thon. Hier auffallend viel verkieselte Baumstämme bis zu 23 m Länge, teilweise sich gabelnd oder in 3 Aeste geteilt. In der Umgebung dieser Baumstämme sind schwach verkieselte Knochen von Krokodil (*Tomistoma*?), Schildkröten (*Podocnemis*), *Palaeomastodon, Ancodus Gorringei* Andr. u. Beadn., *Hyaenodon*? angehäuft.

Summa c. 75—80 m.

Die direkte Fortsetzung dieses Profils nach unten bildet das obige Profil G mit Figur 7.

S. Aufstieg vom Rande der dritten Fajûmstufe oberhalb des „Korallenhügels" (vergl. Profil L. Fig. 11) zu meinem früheren Lagerplatz im Jahre 1898 [2]) (bei + 132 m Meereshöhe).

Der Fuss des durch seine rote Farbe auffallenden Berges „Station IV" meiner ehemaligen Kartenaufnahme [2]) besteht aus

1 m gelbem Sand und Knotensandstein mit weissen Knochen,
3 m roter Sand,
2 m bunte Letten.

Unterhalb des Fusses folgt eine Fläche mit einzelnen flachen Hügeln mit Knotensandstein und Kies. Dort Knochen von Krokodil, Schildkröten und grossen Landsäugethieren wie *Arsinoitherium* (Wirbelkörper von 12 cm Durchmesser), eine glatte höckerlose Schädeldecke eines grossen Hufthiers u. s. w.

---

[1]) Reise in das Depressionsgebiet im Umkreise des Fajûm. S. 141.

[2]) Vergl. dazu das „Querprofil durch den Fajûmgraben" in meiner „Geologie Aegyptens" II, Taf. XIV, Fig. 2 und S. 454.

4. Zur Kenntnis der Basalte Aegyptens.

An mehreren Punkten der Libyschen Wüste hatte ich Gelegenheit, anstehende Basalte sowie auch Gerölle von Basalt und anderen krystallinischen Felsarten anzutreffen. Da bisher nur eine einzige petrographische Beschreibung eines Basaltgesteins aus der Libyschen Wüste, nämlich der aus der Oase Beharieh von Ascherson mitgebrachten Gesteinsstücke durch Zirkel[1]) existirt, so erschien es mir von Bedeutung, Proben weiterer Vorkommnisse behufs näherer Untersuchung zu sammeln. Dies fand an folgenden Orten statt:

1. am Wege Menahaus-Qasr es-Saga 2 Tagereisen westsüdwestlich von ersterem, wo am 8. Februar in dem Oligocänprofil Q (Fig. 15)

a) ein feinkörniger dichter Basalt,
b) Basaltschlacke, stark verwittert,
c) lose liegende Mandeln von Chalcedon, sekundärem Quarz und einem grünen delessitartigem Mineral

gesammelt wurden;

2. auf dem Gipfel des Schweinfurth-Plateaus (Profil R, Fig. 16), von wo am 9. Februar Proben

a) der ausgedehnten oligocänen Basaltdecke,
b) der lokal an den höchsten Punkten noch darüber liegenden schlackigen kavernösen, bröckelig verwitterten Basaltschicht von 6 m Stärke,
c) des unter a liegenden tuffartigen Sandsteins entnommen wurden; .

3. in der Ebene der Terrasse von Dîmeh, ³/₄ Stunden westlich Qasr es-Saga, wo sich einige schwarze, breite, niedrige Hügel aus lauter Basaltblöcken in gerader Richtung senkrecht zum Fusse des Hauptgebirgsabfalls aneinander reihen, augenscheinlich als Teile eines ehemaligen (pliocänen?) Lavastroms;

---

[1]) Bei Zittel: Beiträge z. Geologie und Paläontologie d. Libyschen Wüste. Paläont. XXX. S. 121.

4. in der näheren Umgebung unterhalb Qasr es-Saga zwischen den dortigen Schutthügeln

a) eckiges scharfkantiges Geröll eines dunkelgrüngrauen krystallinischen Gesteins mit schwarzer glatter Oberfläche,

b) Gerölle von Basalt, entweder zu 2a oder zu 3 gehörig;

5. neben der Cheopspyramide (IV. Dynastie), wo Trümmer ihrer ehemaligen äusseren Basaltbekleidung herumliegen;

6. im Todtentempel der IV. Dynastie bei den Pyramiden von Abusir, wo der Fussboden des Säulenhofs aus Basalt gebildet ist.[1])

Diese verschiedenen Proben wurden an das Mineralogisch-petrographische Institut im Königl. Museum für Naturkunde zu Berlin, bezw. dessen Direktor, Herrn Geheimrat Professor Dr. Klein zu näherer Prüfung übergeben. Die durch Herrn Dr. Wolf daselbst freundlichst vorgenommene mikroskopische Untersuchung führte zu folgenden Resultaten:

Das Gestein 4a ist ein Amphibolit von körniger Struktur, zusammengesetzt aus Plagioklas und Hornblende.

„Der Kalknatronfeldspath ist nach Art der Gabbrofeldspathe tafelig entwickelt. Es ist ein basischer Feldspath mit grösseren Schiefen der Albitlamellen. Auf $M = \infty P \breve{\infty}$ (010) zeigt er eine Schiefe von -20^{0}, entspricht also dem Labrador.

Die Hornblende füllt entweder die Zwischenräume zwischen dem Feldspath aus oder reichert sich nesterweis an. Man kann 2 Varietäten unterscheiden, eine grüne Hornblende und eine lichtere Varietät, die der strahlsteinartigen Hornblende näher steht und etwas stärkere Doppelbrechung aufweist. Die Hornblende dürfte aus Diallag durch Einwirkung des Gebirgsdrucks entstanden sein. Man kann vereinzelte, noch nicht völlig umgeänderte Diallage beobachten und die Stadien der Umwandlung zur Hornblende verfolgen. Ein geringer Erzgehalt ist dem Gestein eigen."

Das vorliegende Gestein ist anstehend aus der Libyschen

---

[1]) Diese Probe verdanke ich der Güte des Herrn Professor Schweinfurth.

Wüste nicht bekannt. Dagegen gibt es Hornblendegesteine und Gabbros ähnlicher Art zusammen mit Gneiss in der Gegend von Assuan[1]) und im krystallinischen Wasserscheidegebirge zwischen Nil und Rotem Meer.[2]) Es ist daher entweder als Gerölle des ehemaligen Libyschen Ur-Nil der Tertiärzeit in die Gegend von Qasr es-Saga transportirt oder, wie mir bei seiner Lage zwischen den Scherbenhügeln am Qasr es-Saga wahrscheinlicher wird, von Menschen verschleppt worden.

Das Gestein 2 a ist ein „grauer feinkörniger Feldspathbasalt von diabasisch körniger Struktur.

Der Plagioklas ist leistenförmig entwickelt; der Augit wird licht grünlich durchsichtig. Olivin ist nur spärlich vertreten, reichlicher dagegen leistenförmiges Titaneisen.“ Besonders charakteristisch für dieses Gestein sind die mit blossem Auge sichtbaren, grösseren, glänzenden Plagioklaseinsprenglinge bis zu 0,5 cm Durchmesser, neben denen seltener auch grosse Olivinkörner und Augitkrystalle wahrzunehmen sind.

An diesen Basalt schliessen sich die meisten anderen feinkörnigen Basaltproben in ihrer Beschaffenheit mehr oder weniger an. Besonders gilt das für Nr. 3, 5 und 6.

Auch das früher von Arzruni[3]) von Abu Zabel am Ismailia-Kanal nördlich Kairo beschriebene olivinarme Gestein gehört in dieselbe Gruppe, so dass man wohl berechtigt ist, für die Gesteine aus den Ruinen von Abusir und des Mantels der Cheopspyramide als Ursprungsort alte Steinbrüche der Gegend von Abu Zabel anzunehmen, wo ja auch heute noch der ganze Basaltbedarf von Kairo gedeckt wird. Beyrich[4]) bezeichnete den Durchbruch der Basalte von Abu Zabel als jungtertiär, ohne freilich Beweise dafür vorzubringen, während Beadnell

---

[1]) Bonney: Notes on the Microscopic Structure of some Rocks from the Neighbourhood of Assouan. Geol. Mag. 1886, p. 103.

[2]) E. Fraas: Geogn. Profil vom Nil zum Rothen Meer. 1900, p. 26 etc.

[3]) Sitzb. d. K. Akad. d. Wiss., Berlin 1882.

[4]) Ueber geognost. Beobachtungen Schweinfurths in der Wüste zwischen Cairo und Suës 1882. S. 17.

ihn für gleichalterig mit den angeblich oligocänen Basalten der Oase Beharieh und des Schweinfurth-Plateaus hielt. Der Basalt von Beharieh ist jedenfalls nach Zirkels Beschreibung von den hier vorliegenden Basaltvarietäten ziemlich verschieden durch das reichliche Auftreten des Olivins und Apatits und das Fehlen der grossen Plagioklase.

Etwas reicher an Olivin als Nr. 2a, 3, 5 und 6 sind 1a, anstehend im Oligocän der Wüste halbwegs zwischen Menahaus und Qasr es-Saga und das Geröll 4b von Qasr es-Saga, zwei Gesteine, die im übrigen, speziell in Bezug auf die grossen auffälligen Feldspatheinsprenglinge sich ganz zu den anderen halten. Trotzdem muss 1a als altersgleich (oligocän) mit 2a angesehen werden, während 3 entschieden viel jünger ist. Denn dieser Basaltstrom im W. von Qasr es-Saga kann sich erst dann über die austernführenden Schichten des Mitteleocäns, die er bedeckt, ergossen und ausgebreitet haben, nachdem der ganze, über 200 m mächtige Komplex von Eocän- und Oligocänschichten, welcher zur Zeit der Bildung der Basaltdecke des Schweinfurth-Plateaus (2a) diese ganze Gegend bedeckte, am heutigen Nordufer der Birket el-Qerun wieder denudirt und die Austernschichten der Mokattamabteilung II 3 blossgelegt waren. Das ist frühestens im Pliocän gewesen, in einer Zeit, in welcher auch die neuesten tektonischen Störungen im Nilgebiet und in der Libyschen Wüste vor sich gingen.

Das Gesagte bestätigt wieder die alte Erfahrung, dass benachbarte Vorkommnisse von Eruptivgesteinen von sicher gleichem Alter ebenso verschieden von einander sein können, wie solche von verschiedenem Alter einander gleichbeschaffen, so dass hier jedenfalls zwischen oligocänen und jungtertiären Basalten Aegyptens kein durchgreifender Unterschied in der mikroskopischen Beschaffenheit besteht, der berechtigte, aus letzterer allein Schlüsse auf das Alter zu ziehen.

Die schlackigen, stark verwitterten Gesteine 1b und 2b sind mehr glasig erstarrte, groblöcherige Basalte. „Die glasige Grundmasse ist mit Eisenhydroxyd durchtränkt. Die Plagio-

klase zeigen teilweise die für schnelle Erstarrung charakteristische sanduhrartige Skeletbildung. Der Augit ist schwach pleochroitisch. Das Titaneisen bildet lange Leisten.

Man könnte wenigstens bei der Gesteinsart 2 b, die das unmittelbare Hangende von 2 a einnimmt, meinen, es nur mit einer oberflächlichen Erstarrungskruste des tieferen Basaltlagers zu thun zu haben. Dem widerspricht aber der beobachtete Wechsel mit Tuffen und die Mächtigkeit, die derjenigen der tieferen, feinkörnigen, einförmigen Basaltmasse weit überlegen ist. Am Schweinfurth-Plateau beträgt sie 6 m, die des dichteren festen Basalts nur 3 m. Ausserdem ist die höhere Schlacken- und Tuffschicht beschränkt auf die allerhöchste tafelförmige Erhebung über dem ausgedehnten Basaltplateau, wie obige Fig. 16 zeigt, wo noch Sandsteine und Kies darüber folgend den Abschluss der oligocänen Sedimentreihe bilden. Hier glaube ich die höheren Basaltschichten auf einen besonderen zweiten, mit Tuffausbrüchen wechselnden Basalterguss zurückführen zu müssen.

In dem Oligocänprofil Q scheint der umgekehrte Fall vorzuliegen wie bei R, insofern die in lauter kleine Brocken zerfallende schlackige Varietät 1 b den unteren Teil des Basaltlagers einnimmt, wo sie aber auch einzelne rundliche echte Basaltknollen (1 a) umschliesst. Scherben von echtem, plattig abgesondertem Basalt nehmen hier das Hangende und geschichtete Tuffe das Liegende der schlackigen, mürben Lage ein.

Ein Delessit-artiges Zersetzungsprodukt (1 c), das oft alle Poren in 1 b erfüllt und auch in grösseren Stücken herumliegt, färbt das Gestein 1 b wie auch die dortige Erdoberfläche hellgrünlich.

Mehrfach liegen an beiden Orten, in Profil Q und R, zwischen den Brocken von 1 b und 2 b Mandeln aus Chalcedon und sekundärem Quarz (1 c), welche peripherisch oft durch Serpentinsubstanz grüngefärbt sind und dann wie Moosachat oder Prasem aussehen. Da derartige grüngestreifte Chalcedone und Quarze in den Kieswüsten des nördlichen Aegyptens eine häufige Erscheinung sind, ist es von Interesse, jetzt über ihre

Herkunft aus den oligocänen Basaltlagern der Libyschen Wüste Näheres zu erfahren. Bemerkenswert ist noch die oft schön gerunzelte wulstige Oberfläche dieser Mandeln, die den getreuen Abdruck der Wände früherer Hohlräume in der Lavaschlacke darstellt. Mandeln von milchweissem Chalcedon fanden sich übrigens auch in der Umgebung des jüngeren Lavastromes im W. von Qasr es-Saga vor.

Das früher als Tuff angesehene violette Gestein 2c im Liegenden der Basaltdecke am Schweinfurth-Plateau erwies sich bei näherer Prüfung als Sandstein mit kalkigem Bindemittel ohne basaltische Einschlüsse, aber mit braunvioletten eckigen Thonpartikeln, die jedesmal von einer Kalksinterkruste umhüllt sind.

Im Gegensatz dazu scheint unter dem Basaltlager 1 (Profil Q) wirklicher geschichteter Tuff von 0,70 m Mächtigkeit zu lagern, oben von grünlicher, unten von violetter Farbe.

5. Zur Kenntnis des Neogens und der Diluvialbildungen im Nilthal.

Schon in meiner Behandlung des Miocäns in Aegypten[1]) hatte ich in einem besonderen Abschnitt unter dem Titel „Angebliches Miocän des Nilthals“ den ausführlichen Nachweis zu liefern gesucht, dass sich im eigentlichen Nilthal nirgends marine Miocänablagerungen vorfinden. Nach Fourtaus Angaben[2]) konnten 2 Punkte im S. der Pyramiden in dieser Beziehung in Frage kommen, nämlich die Südseite des Gebel Kibli el-Ahram, d. h. Schweinfurths[3]) Lokalität C und der Gipfel des Kom esch-Schellul, Schweinfurths Lokalität D. Nach dem a. a. O. mehr kompilatorisch aus der Literatur und Schwein-

[1]) Geologie Aegyptens III. S. 88—96.

[2]) Sur les sables à Clypeastres des environs des Pyramides de Ghizeh. Bull. Soc. géol. France (3), XXVI, 1898, S. 39. — Notes sur les Echinides fossiles de l'Egypte, Le Caire 1900, S. 28, f. 6.

[3]) Geologisch-topographische Karte der Kreide-Region bei den Pyramiden. Petermanns Mitth. 1889. Taf. I.

furths mündlichen Angaben und Sammlungsproben erbrachten Nachweis, dass an jenen Stellen Miocän nicht existire, blieb es mir übrig, persönlich noch einmal diese Lokalitäten genauer zu prüfen.

An der Lokalität C am Südende des oben (Profil E, Fig. 6) erwähnten Gebel Kibli el-Ahram fand ich mehrere Kuppen von anstehendem Gestein aus dem allgemein verbreiteten Wüstenkies und Schutt aufragend. Zwei davon waren aus kalkigem Pliocänsandstein mit Ostrea cucullata und der flacheren Spielart von Pecten benedictus gebildet, während sich die übrigen aus Eocänkalk, insbesondere einer Bank mit Carolia aufgebaut zeigten.

An der Lokalität D, dem Clypeasterfundort Kom esch-Schellul, ist die höchste Spitze von Kies und Geröll bedeckt. Der NNO. und O.-Abhang, nicht der Ostfuss dieses Hügels, ist von zahlreichen $^1/_2$—2 m tiefen künstlichen Löchern durchwühlt, wo von den Beduinen nach Clypeasterschalen gegraben worden ist und so der Pliocänsandstein ganz gut aufgeschlossen vorliegt. Hier findet man in den gleichen Handstücken von grobem Sandstein neben dem Clypeaster aegyptiacus Schalen von Pecten benedictus, speziell hier deren gewölbte hochrippige Spielart, dann Ostrea cucullata, Balanus, Membranipora, Serpula und Abdrücke von Cytherea chione, Ranella marginata, Xenophora infundibulum, Strombus coronatus v. Mayeri, Fischzähne u. s. w. Diese Fauna entspricht in jeder Hinsicht derjenigen der echten Cucullatasande.

Der kurze, aber erfolgreiche Besuch der Clypeasterfundstätte hat uns die schon früher ausgesprochene Vermutung zur Gewissheit erhoben, dass der Clypeastersandstein nur eine lokal beschränkte Facies —, keine besondere Stufe des marinen Mittelpliocäns von Aegypten darstellt, dass Clypeastersandstein und Cucullatastufe zeitlich zusammenfallen.

Das Vorkommen fester Sandsteine mit Steinkernen im ägyptischen Pliocän ist übrigens keineswegs auf jene Lokalität beschränkt; solche finden sich noch an vielen Stellen, besonders auf dem rechten Nilufer. Einzig ist nur das Auftreten des

Clypeaster und mehrerer anderer Seeigel am Kom esch-Schellul, was sich nirgends wiederholt, d. h. soweit man bis jetzt weiss. Darauf allein aber lässt sich keine Zweiteilung des marinen Pliocäns des Nilthals aufbauen.

Im Fajūm wurden auch von unserer Expedition keine ganz unbestreitbaren Beweise der Existenz einer pliocänen Meeresbucht in Gestalt von Fossilien vorgefunden. Doch konnten wir das Vorhandensein der eigenartigen senkrechten fingerdicken Löcher, die man auf die bohrende Thätigkeit von Meeresthieren zurückführt, rings um den See von Qasr el-Qerūn über Dīmeh bis Kom Muschim feststellen. Ausser diesen gewöhnlicheren Löchern von 2 – 3 cm Durchmesser beobachtete ich auf dem Nordufer des Sees auf einer Felsplatte aus eocänem Kieselkalk etwa 40 m über dem heutigen Seespiegel auch schüsselförmige von bald rundlicher Gestalt, bald eiförmig oder elliptisch buchtig etwa von der Form einer Unio oder andern queroblongen Bivalve von 6—10 cm Länge und 5—6 cm Breite. Diese Pfannen sehen gerade so aus, als seien sie von kugeligen Bohrkörpern, wie Seeigeln, die ihren Platz nur wenig verschoben, langsam eingegraben. Von Seeigeln selbst ist freilich keine direkte Spur mehr da. Die Wogen der Brandung und die spätere Deflation des Windes haben hier an den Ufern der Birket alle organischen Reste aus jener pliocänen Zeit vernichtet und auch die Eocänschichten in eigenartiger Weise ausgewaschen, so dass von ihnen nur die härteren Partien zurückblieben.

Ueber die Frage der Ausdehnung des Pliocänmeeres nach S. wurden auf unserer Expedition weitere Daten negativer Art gesammelt, welche meine frühere Annahme einer Nichtexistenz von marinem Pliocän im Thalbecken von Theben bestätigen. Barrons und Beadnells angeblicher Foraminiferenkalk von Erment oberhalb Theben mit echt pliocänen Foraminiferen war von mir s. Z. als Süsswasserkalk des obersten Pliocäns oder Diluviums mit Trümmern von Eocänforaminiferen auf sekundärer Lagerstätte gedeutet worden. Ich hatte freilich dieses Mal nicht das Glück, gegenüber Erment auf dem rechten

Nilufer das besagte Gestein mit vielen Operculinen etc., wie es Chapman beschrieb, anstehend zu schlagen. Dagegen gelang es mir, auf dem linken Nilufer hinter Qūrna bei Theben mehrfach ganz entsprechende weisse Kalksteine zu beobachten, welche in innigem Wechsel mit Nagelflue und Konglomeratschichten sowohl die dortige altdiluviale Melanopsisstufe als auch die mitteldiluviale Nilterrasse zusammensetzen.

An dem „Gesellschaftsgrab", genannt Saft el-baqara, im NO. des Sethostempels, nimmt dieser Kalk die Basis der jungen diluvialen Flussterrasse hart am Rande der Kulturebene ein. Dieses Gestein enthält, wie Dünnschliffe lehren, zahlreiche, stark verletzte, d. h. gerollte oder transportirte Schalen von winzigen Foraminiferen: Globigerina cretacea d'Orb., sicher bestimmt, G. cf. bulloides d'Orb., Textularia sp., Bolivina? sp., Plecanium? sp., Discorbina sp., Pulvinulina? sp. Das ist eine Gesellschaft von vorwiegend pelagisch lebenden Gattungen und Arten, wie sie nach Schwager sich vor allem in den Schichten der Libyschen Stufe speziell am Guss Abu Said bei der Oase Farafra vorfindet. Leider sind nach den Dünnschliffen keine genaueren Artbestimmungen möglich, da die Schalen nicht isolirt, also ihre Oberflächenformen nicht erkannt werden können. Zudem liegen nur Bruchstücke vor. Kein einziges Individuum ist unversehrt, von den meisten ist höchstens zwei Drittel der Schale erhalten, deren innerste konsistentere Teile, das Gerippe. Von den besonders häufigen Globigerinen sieht man viele einzelne Kammern oder Paare derselben. Im übrigen besteht das Gestein aus klein geriebenen Schalentrümmern von Mollusken und sonstigem Grus, der durch Kalkschlamm verkittet ist. Makroskopisch wie mikroskopisch macht das Gestein durchaus den Eindruck eines klastischen Haufwerks von kleinen zusammengeschwemmten Teilen von Kreide- und Eocänkalk. Als Muttergestein kommen in Betracht: 1. der weisse Kreidekalk mit Ananchytes und Schizorhabdus, Schicht 6 in Delanoües Profil von Theben, 2. die noch kretaceischen Blättermergel oder Esnehschiefer, die wir anstehend vom benachbarten Dēr el-Bahri kennen lernten und die sich nach d'Archiac durch grossen

Reichtum an Foraminiferen, insbesondere Globigerinen und Rotaliden, auszeichnen, 3. die Kalke der Libyschen Stufe in der Umgebung der Wadijēn. Brecciöse Lagen von Feuerstein- oder Hornsteinstückchen, die dem Kalksteine eingelagert sind, leiten in das Konglomerat oder in grobe Breccie mit Bindemittel aus sandigem Kalk über.

Ganz dieselben Gesteinsarten begegnen uns 1,6 km oberhalb des Sethostempels im rechten Seitenthal des Wadijēn oberhalb der Einmündung des Thals der Königsgräber. Ein alter Steinbruch, an dessen Wänden noch die Kartusche des Pharao Hophrah der 26. Dynastie zu lesen ist, erschliesst eine 6 m mächtige Kalksteinschicht innerhalb der dortigen jungpliocän-altdiluvialen Schotterterrasse. Dieser Kalk umgibt von hier aus im Wechsel mit Konglomerat und Thonlagen die Gebirgsschluchten der unteren Wadijēn und am Aufstieg zum Wege nach Huh. Auch eine von letztgenanntem Punkt entnommene Probe lieferte mir Foraminiferen (auf sekundärer Lagerstätte), nämlich Nummulites sp., Virgulina aff. Schreibersi Cziz.??

An dem diluvialen Alter und dem fluvio-lacustren Charakter dieser Kalke ist wohl kaum zu zweifeln. Beadnell selbst hat sich neuerdings in einer Unterhaltung mit Herrn Professor Schweinfurth in diesem Sinne auch betreffs des Gesteins von Erment ausgesprochen und damit seine frühere Hypothese einer marinen Ueberflutung des oberen Nilthals bei Theben zur Pliocänzeit berichtigt.

Die Diluvialbildungen bei Theben verdienen auch noch in einer anderen Beziehung ein besonderes Interesse, nämlich in anthropologischer. Die Flussterrassenschotter der Diluvialterrasse von Qūrna an der Mündung der Wadijēn ins Nilthal zeichnen sich durch Führung von eingeschwemmten menschlichen Kieselartefakten aus, wie das zuerst General Pitt Rivers 1882 feststellte.

Der vertikale Aufbau dieser Terrasse wird uns in vortrefflichster Weise durch einige grosse Grabanlagen, sogenannte „Gesellschaftsgräber“, erschlossen. So bietet sich uns an dem schon oben erwähnten Saft el-baqara folgendes Profil:

T.

Oben 5—7 m Nagelflue mit festeingebackenen echten Artefakten zwischen den wohlgerundeten Kieselgeröllen;

darunter der oben beschriebene weisse Kalk mit Resten kleiner Foraminiferen 0,70 m.

Etwas anders gestaltet sich das Profil an der NO.-Wand eines zweiten, Saft el-Diaba genannten Gesellschaftsgrabes:

U.

Oben 0,50—75 m weisser, tuffig poröser Kalk, äusserlich schmutzig rötlich.

2 m grobes Konglomerat.

1,70 m kalkiger, schwach kiesiger Nilschlamm, in den hier die einzelnen Grabkammern eingeschnitten sind.

Unsere prähistorisch-anthropologischen Studien an diesen Lokalitäten hatten wir das seltene Glück, unter der sachkundigen Führung des Herrn Professor Dr. Schweinfurth anzustellen. Ueber die Ergebnisse derselben habe ich bereits an anderer Stelle[1]) ausführlicher berichtet, ebenso auch Schweinfurth.[2]) Indem ich auf diese Veröffentlichungen des Näheren verweise, führe ich hier nur die wichtigsten Punkte an.

Die Schottermasse von Qūrna scheint mir der älteren von zwei diluvialen, in Aegypten beobachteten Flussterrassen zu entsprechen, welche ich vorläufig geneigt bin der „Hochterrasse" der vorletzten oder Haupteiszeit (Europas) parallel zu stellen. In dem festen Konglomerat dieser Terrasse finden sich nun zweifellose Artefakte verschiedener Art, welche der ersten und zweiten paläolithischen Periode, dem Acheuléen und besonders dem Moustérien in Frankreich und Belgien eigentümlich sind. Die ursprüngliche Lagerstätte dieser Artefakte sind die an Feuersteinlagen reichen Hochplateaus der Libyschen Wüste

---

1) Die Geschichte des Nilstroms in der Tertiärzeit und das Alter des paläolithischen Menschen in Aegypten. Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde, Berlin 1902.

2) Kiesel-Artefacte in der diluvialen Schotter-Terrasse und auf den Plateau-Höhen von Theben. Verh. d. Berliner anthropol. Ges. Juli 1902.

im Umkreise des Circus der Königsgräber, wo die menschlichen Uranwohner vermutlich während der Interglacialzeit vor der Bildung obiger Terrasse die Moustier-Artefakte schlugen. Ist meine Hypothese des Alters der Terrasse von Qūrna richtig, dann ginge daraus hervor, dass die Kultur der Moustierepoche in Aegypten schon vor der vorletzten Eiszeit existirte, d. h. etwas früher als in Europa.

6. Das Pliocän des Wadi Natrūn.

Von grösstem Erfolge in geologisch-stratigraphischer Beziehung war unser Ausflug nach dem Wadi Natrūn. Die bisherige Auffassung des Alters der dortigen Pliocänschichten ist danach wesentlich zu verbessern.

In meiner „Geologie Aegyptens IV“ hatte ich seit Russegger (1841) zum ersten Male die geologisch-stratigraphischen Verhältnisse des Wadi Natrūn einer ausführlichen Erörterung unterzogen; aber das mir damals zur Verfügung stehende Material war bei einem nur kurzen, anderthalbtägigen Besuche von mir gewonnen und deshalb zu unvollständig.

In diesem Jahre verweilte ich (teilweise wider Willen, nämlich wegen Verkehrsunterbrechung infolge heftiger Gewitterregen) vom 24. Februar bis zum 2. März, d. h. 7 Tage daselbst und hatte das Glück, viele neue Fossilienfunde zu machen.

Bei diesen Studien fand ich die liebenswürdigste Unterstützung bei den Herren Generaldirektor Hooker in Kairo, Direktor Lübhy und v. Tschudi in Alexandria und sämmtlichen Beamten der Egyptian Salt and Soda Company in Bir Hooker, insbesondere Herrn Chemiker Dr. Werdenberg, denen ich nicht verfehlen möchte, hierdurch meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Früher hatte ich geglaubt, 2 verschiedene Pliocänhorizonte auseinanderhalten zu müssen: ich hatte die Hauptmasse der Schichten des Wadi dem Unterpliocän zugerechnet, dagegen einen mir nicht anstehend bekannten Sandstein mit vielen marinen Conchylienresten als mittelpliocän aufgefasst. Meine neuen Untersuchungen bewiesen mir, dass dieser fossilreiche

Sandstein der Hauptgruppe einzureihen ist und **das Ganze dem Mittelpliocän (Astien) des Nilthals zeitlich genau entspricht.** Allerdings ist die Facies durchaus verschieden, nämlich fluviomarin. Der Komplex ist ein Wechsel von fluviatilen, brackischen und marinen Schichten. Im ganzen herrscht der brackische Charakter wie an der Mündung eines grossen Flusses vor.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bildet das Normalprofil am Gart Muluk, von dem aus wir das ganze Thal entlang nach OSO. wandern wollen.



Fig. 18. Blick auf das Westende des Gart Muluk von SW. aus.



V.

Profil vom Gipfel des Hügels zur Basis:

e

0,60 m Gipsbreccie,

1 m grünlicher, gipsiger Sand mit Kiesgerölle, oberflächlich in Kiesbreccie übergehend,

2 m dunkler Schieferthon,

0,10 m Kalkbank, auf der Südseite ganz zusammengesetzt aus Schalen von Cytheridea Mulukensis Schack., auch Fischknochen,

10 m { grüner Sand,
grüner Thon. (Hier soll angeblich am Ostende des Hügels ein fossiler Krokodilschädel ausgegraben sein.)

d	0,30 m kalkiger Sandstein mit zahlreichen Abdrücken von kleinen Hydrobien, Cerithium conicum v. Caillaudi, Melania tuberculata? und Lucina sp. cf. leucoma, Schalen von Cytheridea. Vorspringende Stufe.
	0,20 m Thon mit einer Steinmergellage,
	0,08 m Kalkbank mit senkrechten Höhlungen.
c	c. 6 m { Grüner und schmutzig-grauer, thoniger Sand, weisser, grober Sand,
	0,03 m weisser Sandstein,
	0,20 m grüner Thon.
b	0,15 m Grüner, sandiger Thon mit Marienglas. Auf der SW.-Ecke des Hügels Schalen von Ostrea cucullata und seltene Fischknochen, 12 Schritt weit zu verfolgen, sonst ohne Fossilien.
	2,60 m graue, sandige Gipsletten mit Knochen,
	0,50 m grauer Schieferthon.
a	1 m Schwarzer, kohliger Schieferthon mit Pflanzenresten,
	0,20 m dunkler Schieferthon mit roten Flecken,
	0,65 m Sand.

Hier wurde also jetzt in der harten Schicht d, die, wie die Abbildung zeigt, am meisten stufenbildend am Abhang vorspringt, eine früher unbemerkt gebliebene brackische Fauna entdeckt, wodurch die Schicht erhöhte Bedeutung erlangt. Aber auch im übrigen ist diese Lage von grösster Wichtigkeit, insofern sie überall im Wadi Natrūn wiedergefunden wird und auch technisch ihren doppelten Wert als einziger Baustein und als Kohlensäure-Lieferant besitzt, daher abgebaut wird. Es ist der Horizont, den ich früher[1]) als mittelpliocänen Sandstein mit Lucinen und Cerithien, dessen Anstehendes nicht bekannt sei, dem unterpliocänen Komplex vom Gart Muluk gegenübergestellt hatte.

Der Gart Muluk bietet das einzige vollständige Profil mit Schichten jünger als d. Alle übrigen besseren Profile des Wadi Natrūn schliessen mit dieser widerstandsfähigsten Schicht e nach oben ab, welche mithin die Oberfläche einnimmt. Das gilt zunächst für die Vorhügel dicht östlich vom Gart Muluk, welche die Ruinen eines Hauses tragen. Hier beobachtet man an deren steilem Südabfall:

[1]) Geologie Aegyptens IV. S. 318.

W.

d	0,15 m schiefrige Sandsteinlagen mit Thon und Gips dazwischen, 0,10 m grünen Thon, 0,08 m weissen, kreidigen Kalk mit seltenen Schalen von Cytheridea Mulukensis, 0,12 m Sandstein, eine vorspringende Kante bildend,
	0,10 m grünen Thon, 1 m schmutzfarbenen, thonigen Sand, 1,50 m grünen Sand,
c	0,50 m Sand und Kies, 0,50 m feinen, bunten Sand mit Thonlagen, 0,50 m grünen Thon, 1 m grünen, geschichteten Sand, Sand, Kies und Gips.

Die unter c zusammengefassten, hier tiefsten Lagen von Sand, Kies und grünen Letten sind der Hauptknochenhorizont, welcher namentlich an der westlichen Umrandung des betreffenden Hügels und zwischen ihm und dem Gart Muluk in grosser Ausdehnung an die Oberfläche tritt und die meisten[1]) der im Wadi Natrūn gesammelten fossilen Fisch-, Reptilien- und Säugethierreste geliefert hat.[2]) Von wichtigeren Fundobjekten nenne ich hier den 1898 von mir gefundenen, von Andrews[3]) abgebildeten Molar von Hippotragus? Cordieri de Christol, desgleichen Hornzapfen und Extremitätenknochen von Antilopen, Skeletteile eines Hipparion, Rhinoceros, Elephas, eines Suiden, Cameliden, Wirbel von Struthio und Pythoniden, Knochen und Zähne von Krokodil, Trionyx, einer andern Schildkröte mit glattem Panzer, Flossenstacheln von Teleostiern etc. Auch verkieseltes Palmen- und Dicotyledonen-Holz kommt neben den Knochen vor.

---

[1]) Die von Lyons gesammelten Zähne von Hipparion sp. und Hippopotamus hipponensis Gaudr., welche Andrews soeben beschrieben hat, stammen, soweit ich gehört habe, vom Gart Muluk selbst aus einer etwas höheren Lage, desgleichen ein Krokodilschädel.

[2]) Diese Knochen befinden sich jetzt teils im British Museum, teils in der Münchner paläontologischen Sammlung, teils im Museum Senckenbergianum zu Frankfurt a. M.

[3]) Note on a Pliocene Vertebrate Fauna from the Wadi Natrun. Geol. Mag. 1902, pl. XXI, f. 7–8.

Im OSO. des Gart Muluk und seiner Vorhügel ist über der Schicht d als Boden das neue Arbeiterdorf der Sodafabrik erbaut, in dessen Umgebung zahlreiche Bausteinbrüche den Untergrund bloslegen. Dicht ostsüdöstlich des Dorfes im SSW. der Sodafabrik lässt sich diese Schichtenfolge beobachten:

X.

Kiesdecke.

d {
0,20 m weisser Sand mit Salzeffloeescenzen,
0,10 m weisser Sandstein,
0,30 m grüner, salzhaltiger Thon,
? plattiger, schiefriger Kalk, teilweise sandig, in Kalksandstein übergehend. Abdrücke von Cerithium conicum v. Caillaudi, Lucina leucoma, Mactra subtruncata, Cytherea subundata, lokal Platten mit viel Ostracoden, an andern Stellen Fischschuppen und Gräten.

Von speziellem Interesse ist hier in der Kalkbank das vereinzelte Auftreten von sogenannten „sechstheiligen" pyramidenförmigen[1]) Steinsalzpseudomorphosen,[2]) wie sie gewissen dolomitischen Kalken oder Steinmergeln (niemals Mergeln oder Quarzitbänken) des mittleren Muschelkalks, Trochitenkalks, Grenzdolomits und Steinmergelkeupers in Deutschland (z. B. Netra in Hessen, Eiksermühle-Schwerfen bei Zülpich) eigen sind.

200 Schritt südlich von diesen Steinbrüchen erschien die untere, bis hierher vorherrschend kalkige Lage des Horizonts d vollständig als Sandstein von 12 cm Dicke mit Gastrana fragilis, Lucina leucoma, Tapes cf. geographicus, Cerithium vulgatum, Potamides conicus v. Caillaudi und mamillatus, Nassa reticulata. Hier war die Herkunftsstelle des früher von mir a. a. O. S. 318 besprochenen, aber damals nicht anstehend beobachteten Gesteins mit Lucinen und Cerithien. Eine 30 cm dicke Lage eines grünen, gipsigen Thons mit einem Zahn von Carcharias (Prionodon) nimmt über ihm die Oberfläche ein und ebenso erscheint grüner, sandiger Thon als seine Unterlage.

---

[1]) Blanckenhorn, Die Trias am Nordrande der Eifel zwischen Commern, Zülpich und dem Roerthale. p. 69 und 127.

[2]) Nicht zu verwechseln mit den bekannten würfelförmigen Steinsalzpseudomorphosen auf der Unterfläche von Mergel- und Quarzitplatten.

Auch im NO. des Arbeiterdorfes und an der Sodafabrik treten die Kalksteine des d-Horizontes bei gleicher Höhenlage unter dem Meeresspiegel unter dem Sand, Kies, Schutt, der Gipsbreccie oder der Natronkruste der Oberfläche im Boden auf, sind aber hier, von vereinzelten Ostracoden abgesehen, versteinerungsleer. —

Im übrigen sollen nach Aussage des Werkführers der Fabrik Oesterle früher in 7 Meter Tiefe bei Drainagearbeiten rings um die Sodafabrik rundliche Austern von 12 cm Durchmesser zwischen hellem Sand gefunden sein. Vielleicht waren dieselben identisch mit den von Mayer-Eymar am Mokattam, von mir nördlich Moghara in der Cucullatastufe gefundenen Ostrea plicatula Gmel. oder mit der O. lamellosa Brocc.

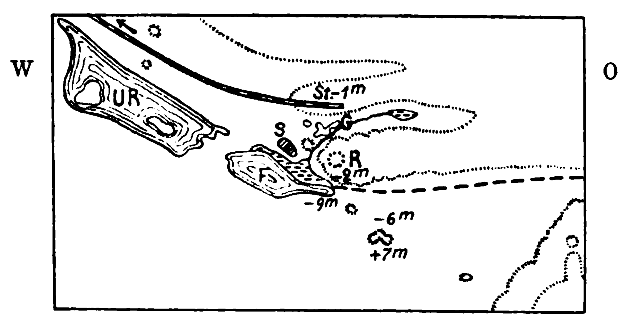
Die höheren Sand- und grünen Thonlagen, die wir von der Spitze des Gart Muluk kennen lernten, erscheinen erst wieder oberhalb nordöstlich von der Fabrik in schlechten Aufschlüssen.

In der Richtung nach OSO. von Bir Hooker schwillt nun die kalkige Abteilung d innerhalb des Pliocäns mächtig an. Am Ostende des Wadi Natrūn bei dem Dorf Beni Salameh hat die Egyptian Salt and Soda Company ausgedehnte Steinbrüche in diesem Kalk angelegt, welche durch eine schmalspurige Eisenbahn mit der Fabrik in Verbindung stehen. Der hier als Kreide mit Feuersteinlagen entwickelte Kalk wird nicht als Baustein, sondern zur Gewinnung von Kohlensäure (bei Verbrennung mit Coaks) zum Zwecke der Ueberführung der aufgelösten Natronsalze in schwerlösliches Bikarbonat gewonnen. Der Kreidekalkschiefer erscheint dort, unterbrochen von 6 dünnen Feuersteinlagen, in einer Mächtigkeit von 1 m über grünen Sanden. Die untersten Bänke enthalten viele Abdrücke von Potamides conicus v. mamillatus, v. typus und v. Salamehensis n.,[1]) Melania tuberculata, Hydrobia sp. und Cytheridea Mulukensis.

---

[1]) Cerithium (Potamides) conicum v. Salamehense n. hat nur eine breite obere Knotenreihe und darunter 2 gleiche **knotenlose** Spiralreifen.

Fig. 19. Ostende des Wadi Natrūn.



UR = See Umm Rischa.
F = See Fasda.
S = Dorf Beni Salameh.
St = Kreidesteinbrüche und alte Gräber.
G = Schlackenhalden einer alten Glasfabrik.
R = Ruinen eines alten Dorfs oder Stadt.
-:- Schmalspur. Eisenbahn von Bir Hooker.
- - - Hypoth. Verlauf einer Längsverwerfung.

Südlich von den Steinbrüchen und den Halden einer alten Glasfabrik setzt sich eine ebenso hohe Terrasse, auf der die Ruinen einer alten Stadt liegen, zusammen aus

Y.

d { oben 2 m Kalkplatten mit Bythinia sp.,[1] Hydrobia sp., Cytheridea Mulukensis,
1 m Sand,
0,35 m Kalkbank,
1,50—3 m grünem Sand.

Aus der Flugsand-bedeckten Ebene im S. dieser Terrasse erheben sich einzelne isolirte Plateauhügel bis zu 14 m relativer

---

[1]) Newton (Egyptian Lower Tertiary Shells. Geolog. Mag. 1898, p. 533) erwähnt numerous casts of Limnea, Melanopsis, Potamaclis, Bithynia, etc. observable in a highly saliferous white, chalky limestone of variable hardness aus dem Wadi Natrun, die er, obwohl sie nicht näher bestimmt werden konnten, mit Vorbehalt dem „Oligocene?“ zurechnet. Möglicherweise handelt es sich hier um die in Rede stehende Pliocänschicht aus Beni Salamehs Umgegend.

Höhe, d. h. c. 4—7 m über dem Meeresspiegel. Der charakteristischste wurde von mir bestiegen und zeigte folgendes Profil:

Z.

d | 1,20 m Kalk mit Flint von Gips überkrustet. Darin viele Ostracoden, Cerithium conicum v. Salamehense n. und Hydrobien,
| 11 m grüner Sand,
| 2 m bunter Thon bis zum Fusse.

7. Zur Tektonik des Sedimentärgebirges.

Die landläufige, noch in den neuesten Lehrbüchern[1]) ausgesprochene Meinung, dass die grösseren Oasen-Depressionen der Libyschen Wüste einfach auf Grabenbrüche oder Kesselbrüche zurückzuführen seien, hat schon lange ihre allgemeine Berechtigung eingebüsst. Viele bei flüchtigem Besuch zuerst angenommenen Verwerfungen erweisen sich bei fortschreitender genauerer Prüfung als zweifelhaft. Auch unsere Reise brachte derartige negative Resultate:

1. Im Wadi-Natrūn[2]) wurde der auffälligste, auch durch Fossiliengehalt ausgezeichnete, kalkig-sandige Schichtenhorizont „d" über grosse Strecken verfolgt und so zur Beurteilung der Lagerungsverhältnisse eine schwache Grundlage gewonnen. Dabei ergaben sich keine besonders grossen Gegensätze in ihrer Höhenlage. Längs der Hauptkette von Salzseen, welche

---

[1]) In Hahn, Afrika, 2. Aufl. Allg. Länderkunde von W. Sievers 1901, lesen wir S. 494 von der nordafrikanischen Wüstentafel: „Die Höhendifferenzen des Bodens entstehen meist durch Einbrüche, die sowohl in der Form der Grabenbrüche, als auch in der der Kesselbrüche vorkommen." — Ferner bei Ratzel, Die Erde und das Leben 1901, S. 574, „Die Oasen im N. der Libyschen Wüste sind durchaus vereinzelte Einbruchsgebiete."

[2]) Nach Ratzel a. a. O. S. 245 läge hier ein typischer „Graben" vor: „Eine ausgezeichnete Bildung dieser Art ist das Natronthal, ein von OSO. nach WNW. gerichteter, 100 km langer Grabenbruch westlich vom Nil, der von mehreren Parallelbrüchen begleitet wird." Worauf sich Ratzel bei dieser so bestimmt ausgesprochenen Auffassung stützt, ist mir unklar. Geologen drücken sich gewöhnlich bei tektonischen Fragen zurückhaltender aus.

in der Richtung WNW.-OSO. aneinandergereiht die tiefsten Teile der Depression einnehmen, liegt die Schicht d relativ am tiefsten. Von da steigt sie anscheinend gegen die Aussenränder d. h. gegen NNO. und SSW. an. Die gradlinige Hauptseenkette, d. h. exclusive des Muluk-Sees und seines Nachbarn im Osten, scheint einer Mulde zu entsprechen, an deren Axe stellenweise auch ein geringer Verwurf stattfand.

In der Umgegend von Bir Hooker rechnete ich für die Schicht d am Gart Muluk die Meereshöhe — 8 m, an den östlichen Vorhügeln des letzteren — 10 bis — 11 m, am neuen Arbeiterdorf — 18 bis — 19 m, dann auf der N.-Seite des Muldentiefsten am Skull Point im O. des Gebara-Sees — 18 m aus. Am O.-Ende des Wadi Natrūn liegt der höchste gemessene Punkt der Schicht d ebenfalls im SSW. des gedachten Längsbruchs, nämlich im SO. vom spitzen Ende des letzten Sees Fasda (vergl. die Skizze Fig. 19). Hier steigt die Schicht in den aus der Thalebene (in der Verlängerung der Seeenkette) aufragenden Temoins zu + 7 m Höhe empor. Nördlich wird diese — 6 bis — 8 m tiefe Ebene geradlinig in O.-W.-Richtung von einer Terrasse begrenzt, welche die Ruinen einer alten Stadt trägt und oben in — 2 bis — 3 m Höhe von der harten Kalkschicht d bedeckt wird. Weiter nordwärts steigt diese Terrasse gleichmässig an, so dass die Kreidesteinbrüche bei Beni Salameh die gleiche Schicht bereits in — 1 bis 0 m Meereshöhe aufweisen. Zwischen dem + 7 m hohen Hügel und der „Alten Stadt-Terrasse“ in — 2 m bis — 3 m Höhe ist also der grösste beobachtete Höhenunterschied. Hier dürfte eine streichende Verwerfung vorliegen, die bei Bir Hooker weniger zum Ausdruck kommt.

Ob das gegen NNO. gerichtete Einfallen des Südflügels sich auch noch über die südwestliche Paralleldepression des Muluk-Sees hinaus bis zum SSW.-Rand des Wadi Natrūn, den Klöstern Dēr Baramus und Suriani fortsetzt oder hier von einer Parallelverwerfung oder einem Bogenbruch abgeschnitten wird, bleibt noch festzustellen.

Das Vorhandensein einer gebrochenen Mulde längs des Wadi Natrūn, deren Mittellinie in spitzem Winkel gegen das Nilthal verläuft, würde auch in einfacher Weise den bedeutenden unterirdischen Wasserzufluss des Wadi erklären.

In der Zeit der Entstehung unterscheidet sich diese Dislokation von den meisten übrigen Aegyptens, besonders des Nilthals. Sie muss jünger, nämlich spätpliocän, wenn nicht gar diluvial sein, da sie noch Mittelpliocänablagerungen verworfen hat. Sie hat dann einem alten diluvialen Nilarm den Weg gewiesen, aber derart, dass er vorzugsweise wohl über den flachen und nur schwach ansteigenden NNO.-Flügel der Mulde hinströmte und hier seine mächtigen Schottermassen absetzte. Der steiler einfallende SW.-Muldenflügel bildete wohl eine Zeit lang die SW.-Grenze des Diluvialen Nildeltas und wurde dann später nach Eintritt des Wüstenklimas durch die NW.-Winde eingetieft, welche die wenig widerstandsfähigen Pliocänthone und Sande leichter zerstören konnten als die diluvialen Kiese und Geröllmassen.

II. Die Depression des Fajūm hat tektonisch eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Wadi Natrūn. Auch dort scheint nicht, wie ich früher annahm, eine Grabenversenkung oder ein Kesselbruch vorzuliegen, sondern im wesentlichen eine einfache Längsverwerfung, die schräg zum Nilthal gerichtet ist, aber kaum sich mit diesem schaart. Längs dieser Linie ist das Eocän- und Oligocängebirge auf der NNW.-Seite eingesunken. Auf dieser Libyschen Seite bei Dīmeh und Qasr es-Saga und auf den Inseln im See herrscht heute allein die Obere Mokattamstufe des Mitteleocäns, dann das Obereocän und Oligocän, während das Kulturland des Fajūm die Untere Mokattamstufe zum Untergrund hat, die in den tiefen Schluchten unter dem Alluvialboden zu Tage tritt.

Auf der Nordseite des Fajūm hatte ich mich früher,[1] beeinflusst von meinem damaligen hochverehrten Reisegenossen Prof. Mayer-Eymar, verleiten lassen, noch eine Anzahl von staffelförmigen Parallelbrüchen längs des Ufers und ausserdem

[1]) Geologie von Aegypten IV, S. 340 und Taf. XIV, Fig. 2.

zwischen Dîmeh und dem Hauptgebirgsabfall am sogenannten Korallenhügel (am Fusse meines obigen Profils L Fig. 11) das grabenförmige Einsinken einer Scholle anzunehmen. Unsere jetzige Begehung des Gebietes führte mich zu folgenden Schlüssen: In dem untersten Lager des Oberen Mokattam bei Dîmeh wiederholt sich die faunistische und lithologische Facies mehrfach. Dieser Umstand und die der jeweiligen Bodenoberfläche mehr oder weniger entsprechende Neigung der Schichten, besonders am Abfall zum See, erklären in den meisten Fällen das auffallende Wiedererscheinen gleicher Schichten und machen die Annahme mehrerer Staffelbrüche unnötig. Die früher der Basis des Oberen Mokattam, Abteilung I, zugerechneten Gypsmergel mit „Hörnerwülsten“ und die Korallenlagen mit Astrohelia und Goniaraea finden sich thatsächlich auch in der an Hydractinien reichen Schichtengruppe 3 unter der Plicatulabank (4) sowie in der Gruppe 5 c, so dass sie nicht als leitend angesehen werden können. Der sogenannte Korallenhügel (K in obiger Fig. 11) meines Profils a. a. O., Taf. XIV, Fig. 2, gehört meiner Abteilung 3, nicht 1, an. Die betreffende Scholle am Fusse des Hauptsteilabfalls besteht demnach aus jüngeren Schichten, als ich früher glaubte, und der Schichtenzusammenhang zwischen diesen Hügeln und dem Abfall ist im Profil L, Fig. 11 nicht durch eine streichende Verwerfung unterbrochen.[1]) Der Steilabfall ist jedenfalls nicht an dieser Stelle, sondern höchstens mehr östlich bei Qasr es-Saga von einem Bruch begleitet, der aber keinen auffallenden Sprung bezeichnet.

Diese letztere hypothetische Spalte dürfte auch dem Basalterguss den Austritt vermittelt haben, dessen Spuren wir jetzt ca. $^3/_4$ Stunden westlich Qasr es-Saga in der Ebene nahe an deren Innenrand in Form eines 60 Schritt breiten Rückens aus wirr gehäuften Basaltblöcken erkennen. Die nordnordwestliche Längserstreckung des Rückens senkrecht gegen den Steilabfall könnte

[1]) Die in Fig. 11 eingezeichnete kleine Verwerfung in der Mitte des Abhangs ist nur von lokaler Bedeutung und hat mit der früher am Fusse angenommenen nichts zu thun.

freilich auch den Gedanken an eine Querspalte in dieser Richtung naheliegen, aus welcher der Basalt emporquoll, um an der Oberfläche sich längs dieser Ausbruchslinie in elliptischer Form auszubreiten. Andererseits würde aber auch die vorhandene sanfte, früher wohl noch stärkere Neigung der Ebene gegen S. zur Genüge einen Abfluss eines an einem Punkte des Längsbruchs austretenden Stroms gegen Dîmeh zu erklären.

Ein für das Oberflächenrelief äusserst wichtiger Querbruch, verbunden mit Verwurf, konnte etwa eine Tagereise nordnordöstlich Dîmeh wahrgenommen werden. Diese Dislokation bildet die NO.-Grenze der im ganzen ungestörten eocän-oligocänen Plateaulandschaft im NNW. der Birket el-Qerūn, deren Gipfel das basaltische oligocäne Schweinfurth-Plateau einnimmt. Jenseits derselben folgt dann bis zur Karawanenstrasse Kairo-Wadi Natrūn die relativ niedrige, meist einförmige, wellige Kieswüste, in der nur wenige sanftere Plateauabfälle und Zeugen einige Abwechslung bringen. In diesem nordöstlichen Gebiet sind die Obereocän- und Oligocänschichten eingesunken. Das dem Oligocän hier wie dort eingeschaltete Basaltlager erscheint im NO. (vergl. die Höhenzahl c. 150 m in Profil Q Fig. 15) um über 100 m tiefer als am Schweinfurth-Plateau (c. 250 m in Profil R Fig. 16), wobei allerdings zu berücksichtigen ist, dass sowohl das marine Mitteleocän als der folgende fluvio-marine Komplex gegen NO. schnell an Mächtigkeit abnimmt. An der in O.-W. bis OSO.-WNW.-Richtung streichenden Verwerfung selbst grenzen Obereocänschichten der S.-Seite direkt an gestörte, steilaufgerichtete Schollen des Mitteleocäns der N.-Seite, das erst entfernter von der Hauptkluft am Profil F horizontale Lagerung annimmt. Die Bruchlinie ist durch eine deutliche tiefe Depression oder Bodenfurche charakterisirt, in der der wenig begangene Karawanenweg von Tamije nach dem Wadi Natrūn führt.

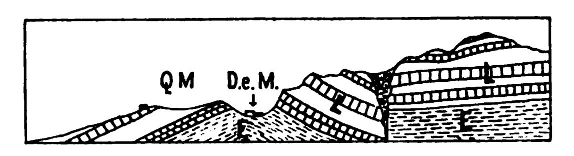
III. Von der Nekropole von Theben verdanken wir E. Fraas[1]) ein „Profil bei Medînet Hābu“ mit 4 Brüchen und

---

[1]) Geognostisches Profil vom Nil zum Rothen Meer. Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. 1900, S. 6, Fig. 2.

breiten Massen von Verwerfungsbreccie. Wie aus seinem kolorirten Profil auf Taf. XXIII hervorgeht, fasst Fraas diese Brüche als wirkliche, in die Tiefe gehende Verwerfungen mit Senkung der Libyschen Plateaumasse auf. Nach meinen Beobachtungen an dem Wege von Medīnet Hābu über Dēr el-Medīnet nach Biban Muluk und vom Hügel Scheich Abd el-Qūrna aus ist dieses Profil etwas zu modifiziren, wie nebenstehende Fig. 20 zeigt.

Fig. 20.



D. e. M. = Der el Medinet.
Q M = Qurnet Murrai.
E = Kretacoische Esnehschiefer
L = Libysche Stufe.

Es handelt sich nur um Plateaurandbrüche infolge von unterirdischem Materialschwund, bei welchem in der Regel, wie ich bei meinen früheren Aufnahmen in der Arabischen Wüste unzählige Male beobachten konnte, die abgesunkenen Schollen gegen den stehengebliebenen Horst sich geneigt zeigen, oft rings um eine horizontal gebliebene Plateaumasse herum. Auch in dem Profil Schweinfurths: „Schichtenaufbau im SW. von Esna“[1]) und meiner obigen Fig. 1 von Scheich Abd el-Qūrna kommt diese Art Lagerung zum Ausdruck.

Was die Breccien betrifft, so handelt es sich hier wenigstens teilweise um geschichtete, helle, bröckelig knollige Eocänkalke, die in ihrer unregelmässig knolligen Beschaffenheit von Natur zur Breccienbildung neigen und besonders in den abgestürzten Schollen in sich noch etwas zertrümmert sind. Speziell an der jedesmaligen unteren Grenze der Kalkbänke, wo sie weichen Schiefern oder Mergeln aufliegen, entstehen in den bewegten

---

[1]) Petermanns Mitth. X, 1901, Taf. I,

Schollen typische Breccienmassen durch Zwischenpressung der grünlichen Mergel zwischen die aufliegenden halbzertrümmerten Kalke. Die rotbraune Breccie oder Brocatelle der Wadijen und anderer Lokalitäten Aegyptens hingegen, womit Fraas die „Verwerfungsbreccie bei Medīnet Hābu vergleicht, scheint eine ganz andere Bildung zu sein, deren Entstehungsart noch besonderer Studien bedarf.

IV. Wie im Fajūm wurden auch auf dem rechten Nilufer bei Kairo Anzeichen für Existenz noch unbekannter Querverwerfungen gewonnen. Schon 1898 hatte ich eine wichtige Verwerfung festgestellt, welche das Mokattamgebirge quer durchzieht.[1]) Sie verläuft von den Pulverkammern hinter der Citadelle hinauf südlich an der Station des Venusdurchgangs vorbei nach W. längs des Thales, das auf Schweinfurths geologisch-topographischer Karte des Westabhangs des Mokattam angedeutet ist.[2])

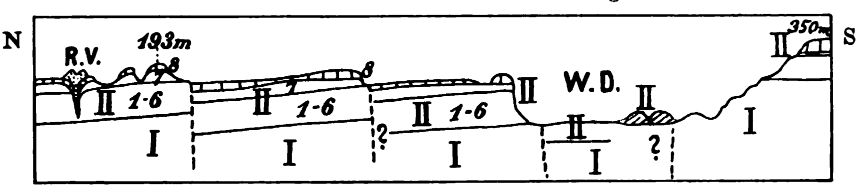
Ein Blick auf diese letzte Karte lehrt nun, dass ganz ähnliche orographische und geologische Verhältnisse wie hier, der plötzliche Gegensatz zwischen einer aufgesetzten Hügelreihe und einförmigem Hochplateau und der geradlinige Verlauf der Grenze zwischen beiden noch einmal genau parallel zu obiger Bruchlinie wiederkehren, nämlich ungefähr 1230 m weiter südlich am südlichen Reitwege „zum Mosesbrunnen". So wird man leicht auf die Vermutung geführt, dass dieser Erscheinung die nämliche tektonische Ursache zu Grunde liegt. An dem Schaq el-Taban (Schlangenloch) genannten Aufstiege dieses Reitweges, d. h. am Westrand des Mokattam, ist von einer Verwerfung freilich noch nichts wahrzunehmen. (Auch die ersterwähnte nördliche, zweifellose Querverwerfung scheint sich nach W. hin in den Steinbrüchen zwischen den Pulverkammern und der Citadelle auszukeilen.) Erst an der Lokalität XXII Schweinfurths könnte allenfalls von einem beginnenden Verwurf die Rede sein. Leider fand ich am Schlusse unseres Aufent-

[1]) Siehe Fig. 2 auf S. 333 in meiner „Geologie Aegyptens IV."

[2]) Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. 1883, Taf. XX.

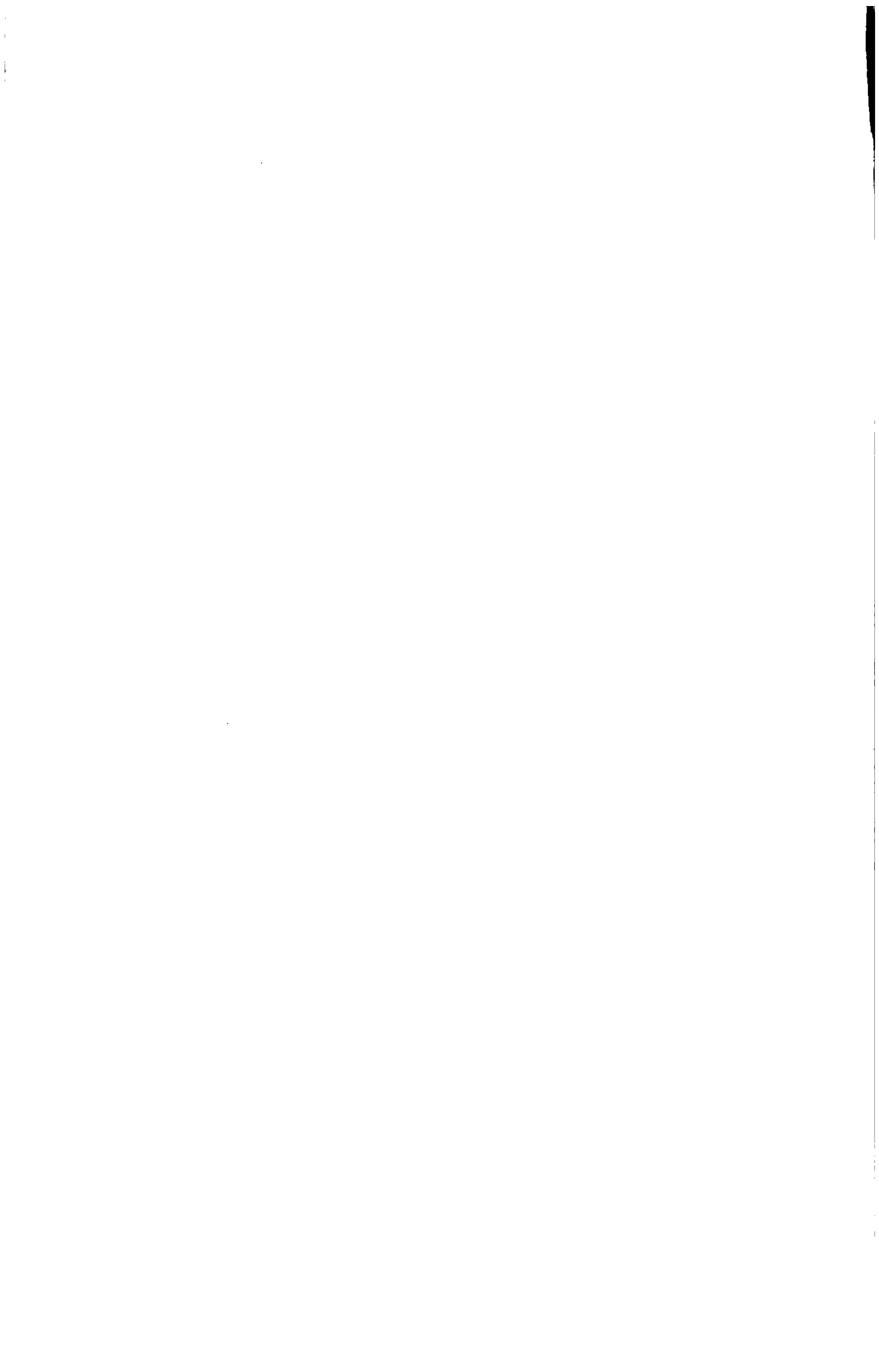
haltes in Aegypten nicht mehr die Zeit zu einer gründlichen Begehung der Südseite des Mokattam und sicherer Beantwortung dieser Frage. Auf einem flüchtigen, mit Herrn Architekten Rennebaum zusammen unternommenen Spaziergang über den Mokattam von N. nach S. bis Heluān gewann ich die in der beifolgenden Figur wiedergegebene Auffassung der stratigraphischen und tektonischen Verhältnisse.

Fig. 21. Maassstab der Länge = 1 : 50000, der Höhe = 1 : 5000.



R. V. = „Rennebaums Vulkan," Hügel aus Gebel Ahmar-Sandstein.
I. Untere } Mokattamstufe.
II. Obere }

Danach hätte das Mokattamgebirge einen staffelförmigen Aufbau in N.-S.-Richtung und seinen Hauptabbruch im S. am Nordrand der grossen breiten Depression, die bald Wadi Dugla, bald Wadi Tih genannt wird. Diese Depression, an der die Staffeleinbrüche endigen, stellt ähnlich dem Jordanthal einen einseitigen Graben dar, indem das südlich folgende Hochplateau von Turra (wie das Plateau des Ostjordanlands) als ungebrochener Horst erscheint, an dessen Nordrand (auf dem Südufer der Dugladepression) sich ein einziger Einbruch, aber mit der bedeutendsten Sprunghöhe vollzog. Diese Sprunghöhe ist thatsächlich noch beträchtlicher, als sie in obiger Fig. 21 erscheint. Durch ein Versehen ist nämlich hier der geologische Aufbau des Plateaus von Turra nicht ganz richtig gezeichnet. Dasselbe besteht bis zu seinen 240—350 m hohen Gipfeln nur aus schwach nordwärts geneigten Schichten der Unteren Mokattamstufe (I); die Obere Mokattamstufe fehlt wenigstens in seinen westlichen Teilen ganz.



Ueber die Fossilien der Blättermergel von Theben.

Von **Paul Oppenheim.**

(*Eingelaufen 15. Dezember.*)

(Mit Taf. VII.)

Herr Dr. Blanckenhorn, der in Gemeinschaft mit Herrn Prof. Schweinfurth im Anfange dieses Jahres Aufsammlungen in den Blättermergeln von Theben, dem „Cinquième Étage" bei Delanoüe, vorgenommen hatte, hat mich seiner Zeit gebeten, diese Reste einer paläontologischen Bearbeitung zu unterwerfen. Delanoüe und d'Archiac[1]) hatten, wie im Vorhergehenden bereits auseinandergesetzt wurde,[2]) in dieser fünften Abtheilung ihres Profiles noch typisches Untereocän erkennen zu können geglaubt; v. Zittel hatte seinerseits später den cretacischen Charakter der Faunula kurz betont und sie in Verbindung gesetzt mit den gleichartigen Kreideablagerungen der libyschen Wüste. Eine bis in die Einzelheiten gehende Bearbeitung der Reste von Theben selbst lag aber bisher nicht vor; sie zu geben, war ungemein erleichtert durch die beiden letzten Publikationen der Münchener Schule, in welchen unter ständiger Anregung und Mitarbeit ihres Oberhauptes durch die Herren Wanner und Quaas[3]) der ganze paläontologische Inhalt des libyschen Danien in so erschöpfender Weise der Kenntnis weiterer Kreise übermittelt worden ist. Durch eine nach dieser

---

[1]) Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. 67. p. 701 (Séance du 5 oct. 1868).

[2]) Vergl. den Aufsatz Blanckenhorns im laufenden Jahrgange dieser Zeitschrift.

[3]) Palaeontographica. XXX 2. Stuttgart 1902.

Richtung hin sehr günstige Verzögerung des gesammten hier vorgelegten Berichtes ist es mir ermöglicht gewesen, auch von der grösseren und, wenigstens für mein Thema, wegen der gleichartigen Facies auch wichtigeren Monographie des Herrn Dr. A. Quaas nicht nur die mir durch die Freundlichkeit des Autors schon früher zugehenden Tafeln, sondern auch noch den Text benutzen zu können. Dagegen haben leider statutarische Bestimmungen des Museum d'histoire naturelle in Paris, welche nach freundlichen Mittheilungen und Beantwortung meiner Anfrage Seitens des Herrn Marcellin Boule eine Versendung von Originalexemplaren in das Ausland formell untersagen, es mir vorläufig wenigstens unmöglich gemacht, die d'Archiac'schen Bestimmungen an der Hand der Typen näher zu prüfen.

Allzugross dürfte indess der Schaden hier nicht sein, da eine Reihe, und gerade die wichtigsten der Citate d'Archiac's durch die mir vorliegenden Materialien so erläutert werden, dass kaum ein Irrthum möglich sein dürfte; was noch an Zweifeln etwa übrig bleibt, dürfte sich in absehbarer Zeit durch eine Autopsie der Originale in Paris selbst aufklären lassen.

Ich gehe nunmehr sogleich in medias res über und werde einer specielleren Betrachtung der einzelnen Typen, die ich vorwegnehme, zum Schlusse eine Zusammenfassung der Ergebnisse von allgemeineren Gesichtspunkten aus folgen lassen.

Die mir aus den Blättermergeln von Theben etc. übergebenen Fossilien sind:

1°. Aturia praeziczac n. sp. T. VII, f. 1—3. Die Form, welche in einer sehr grossen Anzahl wohlerhaltener Steinkerne anliegt, ist eine echte Aturia, also Angehörige eines bisher ausschliesslich tertiären Geschlechtes. Sie theilt mit diesem alle generischen Charaktere, auch den Besitz von Siphonalduten. Ich habe lange gezögert, sie von A. ziczac Sow.,[1]) mit welcher

---

[1]) Vergl. F. E. Edwards: A Monograph of the Eocene Cephalopoda and Univalves of England. Palaeontographical Society, London 1849—77. p. 52 ff. T. IX, f. 1a—h. — de Gregorio: Fauna di S. Giovanni Ilarione.

sie d'Archiac ursprünglich vereinigt hat und die mir in specimine vom Kressenberge und vom Mt. Postale vorliegt, specifisch zu trennen, doch ist ihr Laterallobus gleichmässig breit und relativ kurz und verjüngt sich nach hinten nicht zu der Spitze, in welche er sowohl bei den mir zur Verfügung stehenden Exemplaren als auf sämtlichen von mir consultierten Figuren[1]) bei der typischen Eocänart ausläuft. Ich halte darum, bei der zweifellos vorliegenden Differenz im Niveau, es für angemessen, die Form der Blättermergel, die anscheinend stets kleiner bleibt und bei der vielleicht auch die Ohren an der Mündung mehr herausquellen, auch specifisch zu trennen unter Betonung des Umstandes, dass uns trotzdem hier eine ausgesprochen tertiäre Form vorliegt. Die Lage des Siphos ist, wie hinzugefügt sein mag, genau die gleiche wie bei der eocänen Art.[2]) Sie wie die grössere Tiefe des Lateralsattels schliessen jede Möglichkeit einer Vereinigung mit dem Nautilus danicus v. Schloth. der Faxoe-Kreide unbedingt aus, wie ich mich an gut erhaltenen Stücken des k. Mus. für Naturkunde (darunter das Original v. Schlotheims) zu überzeugen vermochte. Das von Quaas dieser Art zugerechnete Stück aus den cretacischen Blätterthonen zwischen Farafrah und Dachel scheint sich, soweit ich aus den leider nur von oben abgebildeten Typen schliessen kann (T. XXXIII, f. 31), schon durch grössere Breite

---

Palermo 1880, p. 3 II, f. 2, 3, 5. — H. B. Geinitz: Ueber Nautilus Alabamensis Morton etc. N. Jahrb. für Mineralogie etc. 1887. II, p. 53 ff. T. III. — Oppenheim: Die Eocänfauna des Mt. Postale etc. Palaeontographica. 43. Stuttgart 1896, p. 208—9.

[1]) Besonders ähnlich ist Fig. 1 g u h bei Edwards l. c.

[2]) Wie ähnlich ein so ausgezeichneter Kenner der Eocänfaunen wie der Vicomte d'Archiac die Vorkommnisse von Theben und die nordischen Specimina fand, geht aus seinen hier wiedergegebenen Worten hervor (a. a. O. bei Delanoüe p. 11—12): „Parmi les mollusques, l'Aturia ziczac, cette forme de cephalopode si particulière, est représentée dans la collection de M. Delanoüe par un nombre d'échantillons plus considérable que tous ceux qu'on a recueillis depuis cinquante ans dans les argiles de Londres et de Bracklesham, et surtout plus complets que ceux qui ont été décrits et figurés jusqu'à présent.“ —

und Flachheit des Laterallobus zu unterscheiden. Herr Quaas betont l. c. p. 302 ausdrücklich, dass er sich von der Lage des Sipho überzeugt habe und dass er „über die Zuverlässigkeit der Bestimmung keine Zweifel hege.“ Nach diesen so positiven Angaben muss man wohl an der Verschiedenheit der in beiden Fällen vorliegenden Typen festhalten.

2°. Nautilus desertorum Zitt. (wohl = N. centralis Sow. bei d'Archiac-Delanoüe). Die 4 mir vorgelegten Exemplare dieser kugeligen, breitrückigen, schmalmündigen Form besitzen ganz einfache, nicht wellig gebogene, unten geradlinige Scheidewände und einen der gerundeten Aussenseite etwas genäherten Sipho. Die Seitenohren springen nach aussen hervor, der schmale, tiefe Nabel bleibt aber frei. Von tertiären Arten steht sehr nahe N. centralis Sow., welcher nur durch die ganz centrale Lage des Siphos unterschieden werden kann, während N. imperialis mit leicht gebogenen Scheidewänden und nach innen gerücktem Sipho schon weit leichter zu trennen ist. Wie N. centralis, von dem dies Edwards[1]) bereits betont, steht diese Form den recenten Nautilen sehr nahe, doch setzt sie bereits in typischer Kreide ein. Sehr ähnlich, aber anscheinend enger genabelt, mit flacherem Septum und mehr centralem Siphonalkanal versehen ist auch der mir im Gipsabgusse aus der Sammlung des k. Museums vorliegende N. fricator Beck der Faxoe-Kreide von Seeland. Noch näher steht der auch in der Siegsdorfer Kreide von J. Boehm angegebene[2]) N. depressus v. d. Binkhorst[3]) aus Maastricht, der sowohl dieselbe, dem Aussenrande genäherte Lage des Sipho besitzt als das gefaltete Septum und der nach den Abbildungen zu urtheilen überhaupt kaum von der libyschen Art zu trennen

---

[1]) Edwards l. c. p. 45, T. III, f. 1a—c, T. VIII, f. 2.

[2]) Palaeontographica 38, p. 51, T. I, f. 16 und 16a. — Die pflockartige Kalkmasse zwischen Mündung und Schaale, welche auf Fig. 16 abgebildet ist, scheint wohl sekundärer Entstehung.

[3]) Monographie des Gastropodes et des Cephalopodes de la craie supérieure du Limbourg. Bruxelles 1861, Cephalopodes, p. 12, T. V, f. 9a—d.

ist. Die Unterschiede zu anderen ebenfalls nahe verwandten Typen der obersten Kreide, wie N. Dekayi, sublaevigatus, Heberti und Bouchardianus hat bereits Quaas a. a. O. erörtert.[1])

3. Limea Delanoüei n. sp. T. VII, f. 9—9b. Schale sehr klein, dünn, stark gewölbt, nach hinten stark verbreitert und schief ausgezogen. Wirbel dem nach innen gebogenen Vorderrande genähert, von einander so entfernt, dass eine Art dreieckiger Area entsteht. Eine stumpfe Hervorwölbung zieht sich von ihnen zum Unterrande. Der Hinterrand ist flacher als der übrige Theil der Schaale. Diese trägt zumal gegen den Unterrand hin stark hervortretende, etwas geschlängelte Längsrippen, welche schmäler sind als die Zwischenräume. — Das vordere Ohr ist klein, dreieckig, das hintere nicht deutlich abgesetzt. Höhe 5 1/2, Breite 4, Dicke der Doppelklappe 4 mm. 4 Exempl.

Diese Type ist kleiner, gewölbter und schmäler als L. nux Gümb. aus dem Senon von Siegsdorf, von der sie sich auch durch die geringere Anzahl der stärkeren Längsrippen unterscheidet. Weder Wanner nach Quaas geben Aehnliches an; auch d'Archiac betont ausdrücklich die Abwesenheit aller Monomyarier in den Blättermergeln.[2])

4. Leda leia Wanner (l. c. p. 120, T. XVII, f. 16—17). Die Steinkerne von Theben entsprechen den Abbildungen; es lagen aber auch beschaalte Stücke vor. Der löffelartige Fortsatz, den Wanner am Schlosse angiebt und der zu einer Leda wohl kaum passen würde, scheint eine Zufälligkeit, anscheinlich durch einen Gesteinsrest hervorgehoben. Ich kann auch an dem Schlosse nichts Aehnliches entdecken.

5. Leda Zitteli, J. Böhm[3]) (? = L. striata Desh. var. bei d'Archiac-Delanoüe) T. VII, f. 7—7a. Ich sehe keinen wesentlichen Unterschied mit der Art der Siegsdorfer Kreide. L. striata Dech. aus dem pariser Grobkalke ist in der Form ähnlich, aber

---

[1]) p. 300, T. XXIX, f. 1, XXXIII, f. 29—30.
[2]) Bei Delanoüe a. a. O. p. 13.
[3]) l. c. p. 77, T. III, f. 15.

weit breiter gerippt. Die Herren Wanner und Quaas führen nichts Entsprechendes auf.

6. Nucula sp. cf. chargensis Quaas (T. XXXI, F. 34—36. p. 195). d'Archiac giebt bei Delanoüe eine ganze Reihe von eocänen Nucula-Arten aus den Blätterthonen von Theben an. Ich möchte vermuthen, dass sein Material nicht besser erhalten war als das mir vorliegende; und dann schweben alle diese Bestimmungen in der Luft, da es sich nicht nur um Steinkerne handelte, sondern diese dazu mehr oder weniger starken Verdrückungen ausgesetzt gewesen sind. Eine sichere Artbestimmung halte ich mit solchen Materialien für unmöglich, Eine starke Aehnlichkeit besteht mit den von Quaas abgebildeten Stücken, und bei der sonstigen Analogie der Faunen ist auch eine specifische Uebereinstimmung sehr wahrscheinlich, ohne dass indessen für sie der Beweis geliefert zu werden vermag.

7. Axinus cretaceus Wanner (l. c. p. 122, T. XVIII, f. 5, Quaas p. 212, T. XXXII, f. 10—11) = Lucina Goodhalli J. de C. Sow. bei d'Archiac-Delanoüe. Diese hochinteressante Form liegt in 3 Stücken vor, von denen 2 die Grösse der Originale Wanners besitzen, das Eine indessen über doppelt so gross ist. Wie der Autor bereits betont, handelt es sich um eine ganz moderne Sippe, welche in thonigen Ablagerungen des Tertiärs und der Gegenwart fast überall eine grosse Rolle spielt. Die Arten sind schwer zu unterscheiden, doch scheinen die älteren Formen sich vor den jüngeren durch ein starkes Herausquellen des inneren Theiles der Area auszuzeichnen. Dieses Merkmal unterscheidet denn auch die cretacische Form von A. unicarinatus Nyst, einem der Leitfossilien des oligocänen Septarienthones. Eine in der Mokattamstufe stellenweis sehr häufige grosse Form, die Mayer auf seinen Etiquetten im k. Museum für Naturkunde, wie mir scheint irrthümlich, mit dem kleinen A. Goodalli Sow. des Londonthons identificiert hat und die ich A. Schweinfurthii nenne, zeigt diesen Zug noch in viel höherem Grade, doch dürfte man kaum fehlgreifen, wenn man in dieser Type die nur wenig modificierte Kreide-

form erblickt. Die Form der Esnehschiefer steht, zumal in ihren Dimensionen, zwischen beiden.

8. Cypricardia? sp. (Quaas p. 220, T. XXXII, f. 17, auch 18—19?) T. VII, f. 4—4a u. f. 11. Die hier abgebildeten kleinen Steinkerne zeigen sehr stark geschwollene, nach der Seite gedrehte Wirbel, dazu eine sehr deutliche innere Radialstreifung und vor Allem 1—2 scharfe, inneren Leisten wohl entsprechenden Furchen, die schief diagonal aus der Wirbelregion zur Analecke ziehen. Die Identität mit der von Quaas dargestellten Type der Blätterthone scheint zweifellos, ebenso unsicher aber deren generische Stellung, für welche neben Isocardia und Cypricardia auch vielleicht Verticordia in Frage kommen könnte. Wenigstens bieten die von Wood [1]) abgebildeten Formen des englischen Eocän mancherlei Berührungspunkte in der Form. d'Archiac hat vielleicht diese Form als „Isocardia n. sp., très-petite" bezeichnet.[2])

9. Lucina? sp. T. VII, f. 14—14a. Für diese kleinen Steinkerne finde ich weder bei Wanner noch bei Quaas Analogien. Sie sind sehr stark aufgebläht, hinten breiter als vorn, anscheinend mit schwacher äusserer Area versehen. Von den für die Luciniden, zu denen die Form wohl gehören dürfte, so charakteristischen inneren Wärzchen und Streifen findet man an den Steinkernen nichts erhalten. Ich halte es nicht für ausgeschlossen, dass man in ihnen zwerghafte Vorläufer der grossen Loripinus-Formen zu erblicken hat, welche als L. thebaica Zitt. und L. pharaonis Bell. dem ägyptischen Eocän eine so charakteristische Physiognomie verleihen.

9. Neaera aegyptiaca n. sp.[3]) T. VII, f. 6—6a. Es liegen einige mit dünner Schaalendecke versehene Steinkerne

---

[1]) A Monograph of the Eocene Bivalves of England. p. 139—40, T. XXI, f. 8—9.

[2]) Bei Delanoüe p. 6 des Sep.

[3]) Wohl = N. n. sp. rappelant la N. cuspidata Olivi bei Delanoüe-d'Archiac. p. 6.

aus den Esnehschiefern von Theben vor, deren grösster 7 mm hoch und 8 mm breit ist. Die Form ist also relativ sehr hoch und dazu stark gewölbt, da die Dicke beider Klappen gegen 6 mm beträgt. Der Analflügel ist sehr kurz und spitz, wodurch sich die Form neben ihrer bedeutenderen Höhe, dem weiter nach vorn gerückten Wirbel und dem stärkeren Abfall der Lunularpartie von der Art unterscheidet, welche J. Böhm wohl mit Unrecht zu der bekannten N. cuspidata Olivi gezogen hat. Da jede Spur von Radialscriptur fehlt, scheiden die pariser Eocänarten sämtlich für ihren Vergleich aus.[1]) Sehr ähnlich ist dagegen die N. clava Beyrich des Septarienthones, doch ist sie flacher, gleichseitiger und das Rostrum bei jugendlichen Exemplaren, die bei der bedeutenderen Grösse der jüngeren Art allein in Frage kommen können, kürzer und weniger abgesetzt.

10. Pleurotomaria thebensis n. sp. T. VII, f. 16—16a. Die Type erinnert in der Gittersculptur und der medianen Lage des Schlitzbandes etwas an Pl. humilis Kaunh.[2]) aus der Maastrichtkreide, doch ist diese weit höher gewölbt und aus zahlreicheren Umgängen zusammengesetzt. Die Form von Theben besitzt deren nur 4, die ziemlich flach und breit sind, so dass die Gestalt an Turbo erinnert. Auch die Basis ist, soweit man nach dem mir vorliegenden Unicum urtheilen kann, nur sehr wenig gewölbt, die Nähte flach und von keiner Depression der folgenden Windung begleitet; durch den letzteren Umstand entfernt sich die Form vor Allem von der cenomanen Pl. Guerangeri d'Orb.,[3]) der sie relativ noch am Aehnlichsten ist; sie unterscheidet sich aber auch ausserdem durch grössere Breite von Mund und Nabel und grobere Sculptur. Die mir bekannten Tertiärformen sind sämtlich leicht zu trennen; aus dem ägypti-

---

[1]) Vergl. Cossmann: Catalogue illustré des mollusques éocènes des environs de Paris. I, p. 38 ff.

[2]) F. Kaunhowen: Die Gastropoden der Maestrichter Kreide. Palaeontol. Abhandlungen. VIII. Jena 1898, p. 26, T. I, f. 20—21.

[3]) Paléontologie française. Terrain crétacé. II, p. 272, T. 205, f. 3—6.

schen Danien werden Pleurotomarien überhaupt merkwürdiger Weise nicht angegeben.

11. Trochus sp. aff. T. margaritifer J. Böhm.[1] T. VII, f. 22—22 a. Diese kleine Trochide ist mit Cerithium abietiforme Wann. die häufigste Schnecke in den Blättermergeln von Theben. Leider ist sie ausschliesslich in Sculptursteinkernen erhalten. Man erkennt im Verhältnisse mit der Siegsdorfer Kreideart, dass sie dieser wohl ähnlich ist, sich aber durch grössere Schlankheit und stärker vertiefte Nähte sicher specifisch unterscheidet. Die Sculptur hingegen dürfte eine ganz ähnliche gewesen sein und aus 3—4 Spiralen auf jeder Windung bestehen, welche von erhabenen Längsrippen geschnitten und gekerbt werden. Die Basis ist schwach durchbohrt und nur sehr mässig gewölbt.

Weder Wanner noch Quaas geben Aehnliches an. Angesichts der ungünstigen Erhaltung verzichte ich auf specifische Fixierung in dieser schwierigen Gruppe zumal bei einer Type, welche für eine Altersbestimmung so indifferent ist.

12. Natica farafrensis Wann. (p. 125, T. 18, f. 12, Quaas p. 239, T. 32, f. 26—27, wohl = N. brevispira Leym. bei d'Archiac-Delanoüe). T. VII, f. 20—20 a. Die Beschreibung bei Wanner ist in Anbetracht, dass es sich hier um eine in ihrer artlichen Gliederung so schwierige Gruppe handelt, nicht recht scharf und steht mit der Abbildung nicht recht im Einklange. Die mir vorliegenden Stücke haben nun neben den von Wanner wohl im Texte angegebenen, aber auf der Zeichnung nicht deutlich wiedergegebenen rinnenförmig vertieften Nähten fast stets eine sehr deutliche, den Nabel fast vollständig ausfüllende Nabelschwiele wie die N. Noae des Grobkalkes. Sie sind also typische Naticiden, an Vanikoro (cf. Quaas a. a. O.) ist nicht zu denken. Auch Wanner giebt an, dass „die Innentype oben zuweilen schwielig sei“, womit er vielleicht das gleiche Organ ins Auge fasst. Ich glaube nicht,

---

[1]) Siegsdorf. Palaeontographica. 38. p. 67, T. II, f. 30 a, b.

dass die mir vorliegende Type von der Wanner'schen Art getrennt werden kann.

d'Archiac dürfte diese Form als die eocäne N. brevispira Leym.[1]) der Montagne noire bestimmt haben; die Gestalt des Gewindes, zumal die rinnenförmig vertieften Nähte, würden stimmen, aber ganz abgesehen von den Grössenverhältnissen sind die Einzelheiten der Nabelregion ganz verschieden. Denn N. brevispira Leym. ist nach diesen eine echte Ampullina, N. farafrensis Wann. eine typische Natica s. strict.

13. Eulima Wanneri n. sp. T. VII, f. 19—19a. Zwar fehlt das Embryonalende, doch zeigt der theilweise noch von der Schaale umhüllte Kern von 8 Windungen habituell einen so ausgesprochenen Pyramidellen-Habitus, dass ich an der generischen Bestimmung nicht zweifele. Was die specifische anlangt, so besteht grosse Aehnlichkeit mit der E. puncturata Joh. Böhm[2]) von Siegsdorf, doch ist die Form weit schlanker und der letzte Umgang niedriger, indem er etwa $^1/_3$ der Gesamthöhe misst. Die Mündung ist ganzrandig, die Columella leicht verdickt, Falten sind an ihr nicht wahrzunehmen. Die Nähte liegen ganz oberflächlich, die letzte verläuft etwas schräger als die vorhergehenden, der Endumgang ist vorn an der Mündung deutlich verschmälert, die Anwachsstreifen annähernd geradlinig, Höhe 12, Breite kaum 3 mm.

14. Cerithium abietiforme Wanner (p. 133, T. XVIII, f. 37—38, Quaas p. 259, T. XXXII, f. 30—31). T. VII, f. 21. Ziemlich häufig in grösseren und kleineren, mit Schaale versehenen Exemplaren, welche in Gestalt und Sculptur gänzlich übereinstimmen mit der Type der Bir-el-Jasmund-Kreide. Der Columellarkanal ist an dem dargestellten Exemplare sehr wohl erhalten.

15. Alaria sp., Quaas T. XXXII, f. 38—40, p. 265. Ein Steinkern von Theben, der auf jedem Umgange 2 Kiele auf-

---

[1]) Vergl. Leymerie in Mém. Soc. géol. de France. (II) 1. T. XVI, f. 4—4b.

[2]) Siegsdorf a. a. O. Palaeontographica. XXXVIII, p. 64, T. II, f. 36a.

weist, dürfte hierher gehören. In Grösse und Gestalt stimmt er am besten zu Fig. 40 bei Quaas. Sollte es sich hier, wie auch ich glauben möchte, um eine neue Art handeln, so würde ich vorschlagen, sie mit dem Namen ihres Beschreibers zu bezeichnen. — Ich möchte fast annehmen, dass es diese Form ist, welche in der Aufzählung d'Archiacs (a. a. O. p. 5) als Pleurotoma terebralis F. Edw. non Lam. figuriert.

16. Voluta (Scaphella) aegyptiaca Wanner (l. c. p. 139, T. 19, f. 11). T. VII, f. 12. Ich rechne hierher einen 13 mm langen und 7 mm breiten Steinkern aus den Esnehschiefern von Theben, welcher die Embronyalblase der Scaphellen[1]) besitzt und auch in der Gestalt durchaus übereinstimmt. Wenn die Nähte etwas tiefer eingeschnitten sind, so scheint dies durch den Erhaltungszustand als Steinkern bedingt. Es handelt sich auch hier wieder um eine durchaus moderne Gattung, deren alttertiäre Vertreter, zumal die V. Wetherelli[2]) Sow. des Londonthones viel schlanker sind und sich mehr an den oligocänen und neogenen Typus der V. Siemsseni Boll.[3]) und V. Lamberti Sow. anlehnen. Die Formengruppe scheint übrigens bereits in dem zwischen Kreide und Eocän eingeschobenen, also im Alter nicht allzu verschiedenen Kalke von Mons aufzutreten, doch ist diese Sc. inaequiplicata Briart et Cornet[4]) zwar in der Gestalt recht übereinstimmend, aber durch Form und Zahl ihrer Falten sicher specifisch verschieden. Was diese Gebilde anlangt, so zeichnet Wanner von der ägyptischen Art deren nur zwei, giebt aber im Texte 3—4 an. Dieser Widerspruch bleibt noch aufzuklären.

---

[1]) Cossmann: Essais de Paléoanchologie comparée. III. Paris 1899. p. 126.

[2]) Cf. F. Edwards: The eocene Cephalopoda and Univalves of England. London (Palaeontographical society) 1849—77, p. 179, T. XXIII, f. 4 a - d.

[3]) Beyrich: Norddeutsches Tertiärgebirge. p. 81, T. V, f. 2—5.

[4]) Fossiles du Calcaire grossier de Mons. Mém. de l'Acad. roy. de Bruxelles. 38. T. V, f. 3—3 c.

Die V. pyriformis Kaunhow.[1]) von Maastricht erinnert in der Gestalt an die ägyptische Art, hat aber stärkere Spiral- und schwächere Anwachsstreifung. Sie dürfte indessen in die gleiche Gruppe gehören.

17. Cinulia Ptahis Wanner (l. c. p. 141, T. XIX, f. 19.) Die Steinkerne aus den Esnehschiefern entsprechen durchaus der cretacischen Form und zeigen an halbbeschaalten Stücken auch noch die starken Columellarfalten. Die Art hat aber einen holostomen Charakter und besitzt nicht die Spur eines vorderen Kanals. Sie ist daher eine Cinulia, keine Ringicula, wie Wanner meinte, und weit entfernt, Beziehungen zu Neogenformen, die der in meiner Sammlung befindlichen Ringicula Bonellii Desh. zu besitzen, gehört sie umgekehrt einem bisher ausschliesslich cretacischen Genus an, welches z. B. in der obersten Kreide von Siegsdorf sehr zahlreiche und stellenweis recht ähnliche Vertreter besitzt! Allzuweit dürfte jedenfalls C. serrata Gümb. sp.[2]) nicht entfernt sein, wie ein Vergleich der fast vollständig übereinstimmenden Abbildungen erkennen lässt. Ich würde beide Formen direkt identificieren, wenn Wanner nicht abweichende Angaben über die Sculptur machen würde; allerdings spricht auch er von „schrägen Zickzacklinien“ der Längsfurchenränder, während für die Gümbel'sche Art durch J. Böhm eine „sägezahnartige Kerbung“ diagnosticiert wird. Vielleicht spielt hier aber auch der Erhaltungszustand eine Rolle.

18. Cinulia cretacea Quaas (p. 298, T. XXXIII, f. 26 bis 28). T. VII, f. 5. Herr Quaas giebt die Wanner'sche Ringicula Ptahis nicht aus den Blätterthonen an, beschreibt aber als neu eine Cinulia (= Avellana), welche zu der Wanner'schen Art jedenfalls in innigsten Beziehungen stehen muss. Das hier abgebildete Mündungsbruchstück entspricht in Zahl,

---

[1]) Die Gastropoden der Maastrichter Kreide. Palaeontol. Abhandlungen von Dames und Kayser. 4. Jena 1898—1902.

[2]) Vergl. Joh. Boehm: Die Kreidebildungen des Fürbergs und Sulzberges bei Siegsdorf in Oberbayern. Palaeontographica. 38. 1891. p. 54, T. I, f. 23 a—d.

Form und Lage der Falten wie in der Ornamentik des doppelten Mundsaumes durchaus der Quaas'schen Art, allerdings scheint die Spiralsculptur etwas zarter und die Längsstreifung zwischen ihr ist nicht zu erkennen, Momente, die indessen möglicher Weise auf den Erhaltungszustand zurückzuführen sind. Sehr ähnlich scheint zumal das auf Fig. 26 bei Quaas dargestellte Exemplar, von welchem sich Fig. 27 und 28 immerhin nicht ganz unwesentlich unterscheiden.

Ich möchte annehmen, dass auch Actaeon (Tornatella) chargensis Quaas (p. 296, T. XXXIII, f. 23—25) unserer faunula angehört, da diese in erster Linie mit Recht von dem Autor mit T. simulata Sol. verglichen wird und d'Archiac diese (a. a. O. p. 5) aus den Blätterthonen von Theben angiebt.

19. Terebratulina chrysalis v. Schloth.[1]) (Vergl. Wanner, p. 113, Quaas p. 167, T. XX, f. 4—5.) Es ist wohl diese in den Esnehschiefern nicht seltene Art, welche d'Archiac bei Delanoüe als T. tenuistriata Leym. bestimmt hat. Diese Eocänart, welche mir in meiner Sammlung von mehreren typischen Fundpunkten des südöstlichen Frankreichs vorliegt, hat aber wohl in der Gestalt, nicht aber in der viel zarteren Sculptur und den weit zahlreicheren Längsrippen Aehnlichkeit. In Frage kommen überhaupt nur die eocäne T. striatuala Sow.[2]) und die v. Schlotheim'sche Kreideart. Die Form ist aber viel zu schmal, um mit der eocänen Type identificiert werden zu können. Von der Mehrzahl der Vorkommnisse der vielgestaltigen T. chrysalis trennt sie allerdings die mediane Einbuchtung, welche an beiden Klappen gegen

---

[1]) U. Schloenbach: Beiträge zur Paläontologie der Jura- und Kreideformation im nordwestlichen Deutschland. II. Kritische Studien über Kreidebrachiopoden, Palaeontographica XIII, 1866. p. 11 ff., T. I, f. 3—4. — Davidson: A. monograph of British Cretacons Brachiopoda. II. London (Palaeontographical society) 1852, p. 35, T. II, f. 18—28 (T. striata Wahlenberg).

[2]) Cf. Davidson: British tertiary Brachiopoda. Ibidem p. 14, T. I, f. 16—16 b.

den Stirnrand zu beobachten ist, doch giebt Davidson[1]) auch durchaus entsprechende Typen an und zieht diese anstandslos zu der Kreideart, welche ihrerseits mit der recenten T. caput-serpentis L. in den innigsten Beziehungen steht.

20. Palaeopsammia Zitteli Wanner (p. 104, T. XV, f. 1—4, Quaas p. 161, T. XXXI, f. 8—11) = Stephanophyllia discoides M. Edw. und H. bei d'Archiac-Delanoüe). T. VII, f. 17—18 a. Man kann zur Noth den neuen generischen Schnitt acceptieren, obgleich schliesslich die Septa nicht freier sind als bei manchen Balanophyllien. Was die Artabgrenzung anlangt, so kann ich mir kaum vorstellen, dass ein so wichtiger und mit der ganzen Organisation des Thieres in so innigem Zusammenhange stehender Charakter wie die Entwicklung der Ausfüllungsgebilde bei zwei nahe verwandten und generisch untrennbaren Formen so schwanken kann, wie dies Wanner angiebt. Die mehr oder weniger beträchtliche Entwicklung der Epithek ist, selbst wenn sie sich bestätigt, gewiss kein Trennungsgrund; denn ganz epithekfrei soll ja nach dem Autor doch keine der beiden „Arten" sein. Wenn hier specifisch zu gliedern wäre, so könnte dies wohl im Wesentlichen nur auf Grund der mehr oder weniger breiten, krugförmigen oder langgestreckten bis gerundeten Allgemeingestalt. Vor der Hand ziehe ich beide Typen zusammen und wähle als Bezeichnung für sie statt des indifferenten „multiformis" den Namen ihres Entdeckers. Dies vorausgeschickt, so liegen mir nur die Formen vor, welche Wanner l. c. auf Fig. 3—4 abbildet; kleine, krugförmige Gestalten mit oder ohne Epithekalwulst und fast gleichen, aus zahlreichen Trabekeln zusammengesetzten, vielfach durchlöcherten, breiten Rippen. Die Anheftungsstelle ist, zumal bei jungen Individuen, sehr breit, seltener, und dann mit zunehmendem Alter verschmälert. Die Columella ist sehr deutlich, breit, mit warzenförmiger Oberfläche aus zahlreichen Bälkchen gebildet. Der Unterschied in der Septalstärke ist sehr

[1]) „valves . . . . . sometimes presenting a slight longitudinal depression on each valve" (l. c. p. 36, vergl. auch T. II, f. 21 aus dem Chalk von Kent.

gering. Bei Theben ist die Type besonders häufig, wenn auch nicht immer glänzend erhalten. Der trabekulare Charakter der Septocostalien ist an den mir vorliegenden Exemplaren äusserst deutlich, er wird auch von Wanner im Texte erwähnt, ohne indessen auf den Figuren bisher deutlich zum Ausdrucke zu gelangen; hoffentlich vermögen die hier gegebenen Abbildungen ihn kenntlich wiederzugeben.

21. Pattalophyllia aegyptiaca Wanner sp. (Thecocyathus p. 99, T. XIV, f. 1 und 1 a). T. VII, f. 10—10 b. Diese Koralle ist häufig in wohlerhaltenen Stücken. Dieselben zeigen sehr schön und weit besser als die von Wanner gegebene Figur die länglich elliptische, warzige, aus etwa 40 dicken Bälkchen zusammengesetzte Axe, den Pfählchenkranz von 24 Pali und die 4 Cyclen von sehr regelmässig in Länge und Stärke abnehmenden Septen. Dass die Oberfläche dieser letzteren allem Anschein nach gezähnelt ist, scheint Wanner selbst bemerkt zu haben, da er sie „gekörnt“ nennt; sie gehört daher nicht zu den Turbinoliden, nicht zu Trochocyathus und noch weniger zu Thecocyathus,[1] sondern unter die Litrophylliaceen und zwar in die bisher ausschliesslich tertiäre Gattung Pattolophyllia d'Archiardi,[2] unter der ihr die schon von d'Archiac bei Delanoüe l. c. erwähnte P. cyclolitoides Boll. sehr nahe steht, sich aber durch stärker verbreiterte Gestalt, schwächere Septocortalien und mehr zurücktretende Columella specifisch unterscheidet. Die Septa jüngerer Ordnung schliessen sich innig an die älteren an und scheinen in ihren distanten Endigungen, wie abgeriebene Stücke an der Aussenseite des Kelches zeigen (Fig. 10 b), zumal nach der Tiefe des Kelches hin mit diesen zu verschmelzen; an P. cyclolitoides ist das Gleiche zu beobachten. Auch Wanner spricht bei der Kreideform von einer „Verwachsung der Septa in der Tiefe“.

---

[1]) Für Thecocyathus E. H. spricht nichts. Man vergleiche die Gattungsdiagnose bei Zittel: Palaeozoologie p. 268. Weder überragt bei der ägyptischen Type die überhaupt sehr rudimentäre Epithek den Kelchrand, noch ist der Kelch kreisförmig und flach.

[2]) Vergl. Priabonaschichten: Palaeontographica. 47. 1901. p. 60 ff. T. II, f. 1—7.

Die Form, von welcher Trochocyathus epicharis Wanner (p. 99, T. XIV, f. 5—7) vielleicht nur ein Jugendstadium darstellt, hat entschiedenen Tertiärtypus, doch tritt sie, wie wir sehen, in Aegypten bereits in der typischen obersten Kreide von Bâb-el-Jasmund etc. auf. Sehr weit dürfte sich übrigens auch Trochocyathus? mammillatus Gümb.[1]) aus der Siegsdorfer Kreide nicht entfernen, dessen Zugehörigkeit zu Trochocyathus mir ebenfalls zweifelhaft ist.

22. Pentacrinus (Balanocrinus) africanus P. de Loriol. (In Peron: Description des mollusques fossiles des terrains crétacés de la région sud des Hauts-Plateaux de la Tunisie Paris 1889—90, p. 391, T. XXXI, f. 39—53, vergl. besonders Fig. 52—53) T. VII, f. 13—13 a. 2 Stiele, 11 mm lang, 3 mm breit, aus 5 relativ sehr hohen Gliedern zusammengesetzt. Aussenwand stark abgerundet, daher auch der Querschnitt nur wenig eckig und am Rande nicht eingebuchtet. Nahrungskanal klein, Gelenkflächen rhombisch, wie die randlichen Leistchen stark hervortretend. Nähte schwach gezackt; an dem einen Stücke die Spuren der Cirrhen als schwache Vertiefungen an der Aussenwand sichtbar.

Diese sehr schmale, aus verhältnismässig hohen Gliedern zusammengesetzte Form ist von den durch Wanner und Quaas besprochenen ächten Pentacrinus-Formen anscheinend verschieden. Die Form der Overwegi-Schichten[2]) ist grösser und hat dabei niedrigere und breitere Elemente, diejenige der Blätterthone[3]) ist nach aussen viel zu kantig, um überhaupt verglichen werden zu können; die nicht abgebildete Type der oberen weissen Kreide hat nach den von Wanner l. c. p. 106 gegebenen Dimensionen ungefähr den Charakter der Form aus dem Overwegi-Niveau. Aber auch die Arten des älteren Tertiär wie P. subbasaltiformis Forbes,[4]) P. didactylus d'Arch. und P.

---

[1]) J. Boehm in Palaeontographica. 38. p. 102, T. IV, f. 19 a, b.

[2]) Quaas T. XX, f. 1.

[3]) Ibidem T. XXXI, f. 16.

[4]) Edwards Forbes: Echinodermata of the British Tertiaries. London (Palaeontographical society) 1852, T. IV, f. 8—10.

diaboli Bay. weichen sowohl in der Gestalt ab wie in der geringen Höhe der Stielglieder. Durch den Hinweis bei Wanner (a. a. O. p. 106) bin ich endlich auf die tunesische Kreideart gestossen, und es scheint mir, als ob mit dieser die unserige restlos vereinigt werden darf. Jedenfalls dürfte sie kaum einer bekannten Type näherstehen.

23. Porocidaris prior. n. sp. T. VII, f. 8—8a. Das flache, seitlich zusammengedrückte, am Rande deutlich scharf gesägte Stachelfragment kann nur mit Angehörigen der bisher ausschliesslich tertiären Gattung Porocidaris Des. verglichen werden. Schon der bekannte P. Schmideli Des. des mittleren Eocän steht nahe, noch ähnlicher sind zwei einer anscheinend neuen Type angehörige Stacheln, welche Sckweinfurth in Kalken der Libyschen Stufe im Wadi Aschar sammelte, „in weissen, mergelartigen sandigen Kalksteinen mit Lucina, Cardita, Porocidaris 25 m über der Kreidebasis". Mein Porocidaris ruinae[1]) aus der Spileccostufe des Vicentino gehört demselben Typus an, steht aber ferner.

24. Lamna? sp. aff. Vincenti Winkler, vielleicht Oxyrhina angustidens Reuss, T. VII, f. 15—15b. Ein kleiner Selachier-Zahn von 11 mm Länge, einigermassen entsprechend der alttertiären Art, zumal den von Leriche[2]) neuerdings gegebenen Figuren, aber an der Basis noch stärker verschmälert; mit leicht nach aussen gebogener Spitze und schwacher Einbiegung nach innen an der rechten Flanke. Die Mitte der Innenseite unten nur sehr schwach eingebuchtet. Nebenzähne sind nicht sichtbar, doch ist die Wurzel an beiden Endigungen beschädigt. Jedenfalls entspricht die Art keiner der von Wanner und Quaas aus der Kreide angegebenen Typen. Eine gewisse Aehnlichkeit besteht auch mit den als Carcharias (Aprionodon)[3])

[1]) Z. d. d. g. G. 1902, p. 173, T. VIII, f. 7.

[2]) Sur quelques éléments nouveaux pour la faune ichthyologique du Montien inférieur du bassin de Paris. Annales de la soc. géologique du Nord. XXX. Lille 1901. p. 159, T. V, f. 16.

[3]) Vergl. F. Priem in B. d. G. F. (III) 27. Paris 1899, p. 243—4, T. II, f. 8—15.

frequens Dames bekannten Formen der Mokattamstufe; doch scheint mir der Zahn selbst im Verhältnisse zur Wurzel zu lang, und von der tiefen medianen Furche finde ich an der letzteren keine Spur. Wenn es sich mit Sicherheit herausstellen sollte, dass keine Nebenzähne vorhanden sind, so dürfte die Form wohl mit allergrösster Wahrscheinlichkeit zu Oxyrhina angustidens Reuss gehören, von der Herr Leriche[1]) neuerdings sehr ähnliche Abbildungen nach Formen der nordfranzösischen Kreide gegeben hat. Die sigmoidale Krümmung des Zahnes, welche der Autor angiebt, würde trefflich stimmen. Auch diese Form würde dann rein cretacisch sein.

Schlussfolgerungen.

Es ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass die Blättermergel von Theben eine Faunula enthalten, deren grösster Theil bereits in den typischen Kreideabsätzen der libyschen Wüste auftritt; so:

Balanocrinus africanus P. de Lor.
Palaeopsammia Zitteli Wann.
Pattalophyllia aegyptiaca Wann. sp.
Terebratulina chrysalis v. Schloth.
Nautilus centralis Zitt.
Natica farafrensis Wann.
Cerithium abietiforme Wann.
Voluta aegyptiaca Wann.
Alaria sp.
Cinulia Ptahis Wann. sp.
Cinulia cretacea Quaas
Leda leia Wann.
Axinus cretaceus Wann.

Daneben liegen einige wenige Arten vor, welche im ägyptischen Danien bisher fehlen:

---

[1]) Révision de la faune ichthyologique des terrains crétacés du Nord de la France. Annales de la Soc. géolog. du Nord. XXXI. Lille 1902, p. 87 ff., vergl. p. 117, T. III, f. 59—65.

Pleurotomaria thebensis n. sp.
Trochus sp. aff. margaritifer J. Boehm
Eulima Wanneri n. sp.
Neaera aegyptiaca n. sp.
Limea Delanoüei n. sp.

Diese Faunen haben aber sämtlich eher mit Kreide- als mit Eocänarten verglichen werden können.

Als echt tertiäres Element besitzt die Fauna nur

Aturia praeziczac n. sp. und
Porocidaris prior n. sp.

welche allem Anscheine nach bisher in der typischen Kreide Aegyptens nicht aufgefunden worden sind.

Dass es sich in den Blättermergeln von Theben demnach nicht um typisches Eocän handeln kann, wie d'Archiac meinte, scheint mir ausgemacht. Die Bestimmungen d'Archiac's sind allem Anscheine nach grösstentheils irrthümlich. Vermuthlich hat der sehr moderne Totaleindruck der Faunula im Verein mit dem reichen Auftreten der Aturia diesen erstklassigen Forscher, der gerade in den beiden hier in Betracht kommenden Erdperioden so gründliche Specialkenntnisse besass, veranlasst, nun auch z. B. die so überaus ungünstig erhaltenen Nucula- und Leda-Formen auf bekannte Eocänarten zurückzuführen. Und mit Materialien wie diese letzteren lässt sich mit Leichtigkeit alles beweisen!

Der moderne Habitus der Fauna steht fest, aber, was d'Archiac noch nicht wissen konnte, auch das Danien Aegyptens besitzt ihn, und zwar in noch höherem Maasse als die Herren Wanner und Quaas angenommen haben. Ohne das Vorhandensein der Ammoniten, Exogyren, Ananchyten und einiger cretacischer Haifischformen würde man sehr in Verlegenheit kommen, diese Faunen durchgreifend von denen des Eocän zu unterscheiden, und es sind unter den Crassatellen, Carditen, Cucullaeen, Axinus, Turritellen etc.[1]) so manche Typen, welche mir in

---

[1]) Crassatella chargensis Quaas, C. Zitteli Wann., Cardita libyca

überaus ähnlichen Gestalten noch aus dem Mokattam vorliegen. Andrerseits haben z. B. die von Wanner aus der obersten Kreide mitgetheilten Riffkorallen[1]) einen durchaus tertiären Habitus. Wenn je so drängt sich hier die Ueberzeugung auf einer continuierlichen, endogenen, nicht durch fremde Einwanderung stark beeinflussten Entwicklung und naturgemäss ist die Schwierigkeit einer festen Grenzmarkierung auf Grund paläontologischer Momente hier eine ungeheure.

Für mein systematisches Empfinden scheint es, als ob eine Fauna, von der die überwiegende Mehrzahl ihrer Bestandtheile schon in der typischen Kreide auftritt, noch nicht als Tertiär bezeichnet werden kann. Selbst für diejenigen, welche in solchen Fällen zu dem Verlegenheitsausweg einer Zwischenstufe zu greifen pflegen, würde es schwer sein, in dem sog. Paleocän Analoga zu finden. Denn die Sande von Kopenhagen und der Kalk von Mons, die hier in Frage kommen, haben durchaus eocänen Charakter; ebenso ausgesprochen ist der cretacische Habitus bei den Garumnien-Bildungen Südfrankreichs und Nordspaniens. So modern auch die senone und zumal die dänische Kreide an zahlreichen Punkten wird, sie steht dem sie überlagernden Tertiär dennoch stets fremd und unvermittelt gegenüber. Transgressionen und wohl stets durch sie bedingter Wechsel der Facies thun das ihrige dazu, die gesponnenen Fäden abzuschneiden und fremde für sie einzuwirken. Anders liegt, wie v. Zittel seiner Zeit sofort hervorgehoben hat, die Sache für Aegypten, und in die Reihe allmäliger Uebergänge zwischen sonst scharf und präcis getrennten Formationen scheint sich auch der Esnehschiefer von Theben einzuschieben. Andrerseits scheint es mir wohl kaum bestreitbar, dass dieses Gebilde mit seinen zahlreichen Kreideelementen älter sein muss

Zitt., Cucullaea Schweinfurthi, Axinus supracretaceus, Turritella (Mesalia non Torcula) Overwegi, Mesalia Jovis-Ammonis Quaas etc.

[1]) Z. B. ist Oroseris undata Wann. (p. 104, T. 14, f. 13), bei der leider eine Vergrösserung des Details vermisst wird, sehr schwer von der eocänen Pachyseris Murchisoni d'Arch. zu unterscheiden. Vergl. über diese letztere meine Bemerkungen und Figuren in Beiträge zur Palaeontologie Oesterr.-Ungarns 1901. p. 207, T. 13, f. 1—1a.

als alles, was sonst selbst als Paleocän bezeichnet worden ist. Diese Anschauung kann aber, bei aller Anerkennung des modernen Charakters dieser Fauna, nur dadurch ihren systematischen Ausdruck finden, dass man diese noch zur Kreide zieht, und erst über dem Niveau der Blättermergel mit der libyschen Stufe das Tertiär, des Untereocän, beginnen lässt.

Anmerkung. Herr Dr. Quaas, welcher mein Material inzwischen bei mir eingesehen hat, ermächtigt mich zu der Erklärung, dass er vollständig einverstanden ist mit den von mir vorgenommenen Identifikationen mit den von ihm beschriebenen Arten aus den cretacischen Blätterthonen, und dass für ihn anderseits die Verschiedenheit meiner Aturia praeziczac von dem bei ihm abgebildeten Nautilus danicus ganz unzweifelhaft sichergestellt ist.

Tafelerklärung.

T. VII.

Fig. 1—3. Aturia praeziczac n. sp. nach verschiedenen Individuen und in verschiedenen Stellungen. Fig. 2a ein aufgebrochenes Exemplar von zwei Seiten. p. 436.

„ 4—4a. Cypricardia? sp. p. 441.

„ 5. Cinulia cretacea Quaas. Mündungsansicht mit doppeltem äusserem Mundsaum und den Falten. p. 446.

„ 6—6a. Neaera aegyptiaca n. sp. Fig. 6a vergrössert. p. 441.

„ 7—7a. Leda Zitteli J. Boehm. Fig. 7a vergrössert. p. 439.

„ 8—8a. Porocidaris prior n. sp. p. 451.

„ 9—9a. Limea Delanoüei n. sp. Fig. 9—9a vergrössert. p. 439.

„ 10—10b. Pattalophyllia aegyptiaca Wann. Fig. 10 Kelchbild mit der grossen warzigen Axe, den Pali und den anscheinend gezähnten Septen vergrössert. Fig. 10b Rippen der Aussenwand, die am Grunde verschmelzen. p. 449.

„ 11. Cypricardia? sp. zeigt die diagonalen Furchen der Analseite. p. 441.

„ 12. Voluta (Scaphella) aegyptiaca Wann. p. 445.

„ 13—13a. Balanocrinus africanus P. de Lor. Fig. 13a vergrössert. p. 450.

„ 14—14a. Lucina? sp. p. 441.

„ 15—15b. Oxyrhina angustidens Reuss? p. 451.

„ 16—16a. Pleurotomaria thebensis n. sp. Fig. 16a halb schematisch. p. 442.

„ 17—18a. Palaeopsammia Zitteli Wann. — Man achte auf den trabekularen Charakter der Rippen auf Fig. 17. p. 448.

„ 19—19a. Eulima Wanneri n. sp. p. 444.

„ 20—20a. Natica farafrensis Wann. Blick auf die Basis und den Columellarpflock. p. 443.

„ 21. Cerithium abietiforme Wann. p. 444.

„ 22—22a. Trochus sp. aff. T. margaritifer J. Boehm. p. 443.

Die Originale zu sämtlichen Figuren dieser Tafel, mit Ausnahme von Fig. 10, deren Typus aus Farafrah stammen soll, wurden in den Blättermergeln von Theben gesammelt und in der paläontologischen Sammlung des bayerischen Staates zu München niedergelegt.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1902.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnet die Festsitzung mit einer Rede: „Ueber wissenschaftliche Wahrheit“, welche für sich in den Schriften der Akademie veröffentlicht wird.

Sodann verkündigten die Classensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, die der mathematisch-physikalischen Classe.

Es wurden von der mathematisch-physikalischen Classe gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

I. zum ordentlichen Mitgliede:

Das bisherige ausserordentliche Mitglied Dr. Johannes Ranke, ordentl. Professor für Anthropologie und allgemeine Naturgeschichte an der hiesigen Universität.

II. zu correspondirenden Mitgliedern:

1. Dr. W. C. Brögger, Professor der Mineralogie und Geologie an der Universität in Christiania;
2. Dr. Wilhelm Engelmann, Professor der Physiologie an der Universität in Berlin;
3. Dr. Adolf Engler, Professor der Botanik an der Universität in Berlin;
4. Dr. J. Willard Gibbs, Professor der mathematischen Physik an der Yale-Universität in New-Haven;
5. Jacobus Hendricus van t'Hoff, Professor der Chemie an der Universität in Berlin;
6. Karl Harry Rosenbusch, Professor der Mineralogie und Geologie an der Universität in Heidelberg.

Sitzung vom 6. Dezember 1902.

1. Herr Ad. v. Baeyer spricht: „Ueber Triphenylmethan-Derivate.“ Die Veröffentlichung findet anderwärts statt.

2. Herr Rich. Hertwig hält einen Vortrag: „Ueber Correlation von Kern- und Zellgrösse.“ Die Veröffentlichung findet ebenfalls anderwärts statt.

3. Herr K. A. v. Zittel legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung des Herrn Dr. Max Schlosser, II. Conservators der geologischen Sammlung dahier: „Ueber die fossilen Säugethiere China's“ vor, in welcher die von Herrn Haberer mitgebrachten, namentlich aus Zähnen bestehenden Fossilien bearbeitet sind.

4. Herr Siegmund Günther hält einen Vortrag: „Ueber glaciale Denudationsgebiete im mittleren Eisackthale.“

5. Herr Joh. Rückert spricht: „Ueber Entstehung des Blutes im Hühnerei.“

Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisackthale.

Von Siegmund Günther.

(*Eingelaufen 22. Dezember.*)

Jedermann weiss, welch unermessliche Arbeit daran gesetzt worden ist, über die eiszeitlichen Residuen an der Nordseite der Alpen vollkommene Aufklärung zu schaffen,[1]) und auch im Bereiche der lombardisch-venetianischen Tiefebene, sowie in den Westalpen hat diese Untersuchung beträchtliche Fortschritte gemacht. Umso auffallender muss es erscheinen, dass der Südabhang der Zentralalpen nach dieser Seite hin noch verhältnismässig wenig durchforscht worden ist; abgesehen allerdings von der Umgebung Bozens und Merans, der sich schon frühzeitig vielseitige Teilnahme zugewendet hat.[2]) Zu-

---

[1]) Penck-Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter, Leipzig 1901 ff. Dieses im grössten Stile angelegte Werk, welches jedoch zur Zeit bis zu den hier in betracht gezogenen Gegenden einstweilen noch nicht fortgeschritten ist, wird unser gesamtes Wissen von diesen Dingen derart abgeschlossen darstellen, dass es für jede einschlägige Forschung normativ wirkt (Günther, Pencks neue Glazialstudien, Jahresber. d. Geogr. Gesellsch. zu München für 1901/02, S. 41 ff.).

[2]) Dieses Thal gehört sogar zu den in der Geschichte der Glazialgeologie besonders bemerkenswerten Oertlichkeiten, die zuerst als Zeugen für eine dereinstige weitere Ausdehnung der alpinen Gletscher in anspruch genommen wurden (Gredler, Die Urgletschermoränen aus dem Eggenthale, Bozen 1868). Bald nachher erschienen zahlreiche Beiträge zur weiteren Klärung der hiemit angeregten Fragen (Goetsch, der alte Etschgletscher, Zeitschr. d. deutschen u. österr. Alpenver., 1. Band, S. 583 ff.; Gümbel, Gletschererscheinungen aus der Eiszeit, Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch., Math.-Phys. Kl., 1872, S. 223 ff.).

den am stiefmütterlichsten bedachten Gebieten gehört dagegen das mittlere Eisackthal, dessen Abgrenzung leicht so durchgeführt werden kann, dass es sich gerade mit der Thalweitung von Brixen deckt.[1]) Obwohl man schon seit geraumer Zeit sehr wohl wusste, dass glaziale Schotterbildungen gerade hier kräftig entwickelt sind, wurde doch noch kein ernster Ansatz zu deren näherer Bestimmung und Gliederung gemacht. Wenigstens spricht sich in diesem Sinne Blaas aus,[2]) dessen Streben doch sonst dahin geht, die gesamte Litteratur über die geologischen Verhältnisse Tirols für seine Zwecke heranzuziehen. Eine abschliessende Erörterung liegt auch nicht in der Absicht dieser Studie, die vielmehr nur ein ziemlich beschränktes Territorium aus dem Gesamtbereiche der Brixener Glazialformation herausgreifen, dieses jedoch nach verschiedenen Seiten einlässlich schildern möchte. Es tritt hier nämlich nicht nur das im engeren Sinne glazialgeologische Moment stark in den Vordergrund, sondern es hat in die dortigen Ablagerungen die Erosion zahlreiche Eingriffe gemacht.

---

[1]) Die nördliche Grenze des mittleren Eisackthales fällt naturgemäss zusammen mit der tiefen Klamm, in welcher sich der Fluss, und zwar innerhalb der Mauern von Franzensfeste, seinen Austritt aus dem engen Thale erkämpft, innerhalb dessen er vom Sterzinger Moos aus dahingeströmt war. Das untere Thal würde in der Hauptsache mit dem sogenannten „Kuntersweg" zusammenfallen, und man könnte als dessen Beginn die schon durch ihren Namen gekennzeichnete Stadt Klausen oder auch, mit vielleicht noch mehr Recht, die etwa eine Stunde oberhalb von ihr gelegene „Sternklamm" gelten lassen, weil von da ab der Thaleinschnitt die Eigenschaft eines Engpasses annimmt, deren er vor dem „Bozener Boden" nicht mehr verlustig wird.

[2]) Blaas, Geologischer Führer durch die Tiroler und Vorarlberger Alpen, 4. Bändchen (Mitteltirol), Innsbruck 1902, S. 460 ff. „Bedeutsam, aber noch wenig studiert, sind die mächtigen glazialen Ablagerungen in der Umgebung von Brixen, besonders nördlich der Stadt, bei Neustift, Schabs und Franzensfeste. Die Sedimente bestehen aus Konglomeraten im Liegenden (Neustift), geschichteten, stark gestörten Schottern und Sanden (Neustift, Schabs) und Moränen (Franzensfeste). Wahrscheinlich liegen hier Stauschotter vor, veranlasst durch Absperrung des Eisackthales durch die Gletscher der Dolomiten zu der Zeit, als jene aus den Zentralalpen Brixen noch nicht erreicht hatten."

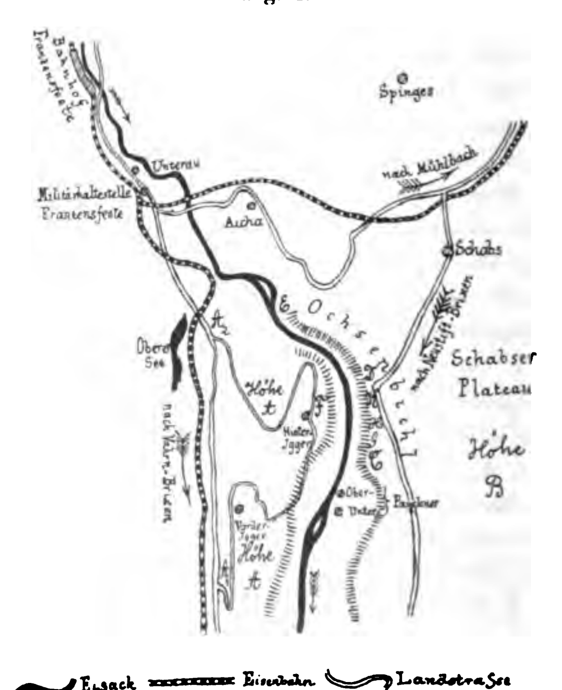
welche zur Herausbildung höchst merkwürdiger Formen führten. Man darf es wohl aussprechen, dass sich hier auf verhältnismässig sehr kleinem Raume Paradigmen aller der verschiedenen Denudationsgebilde zusammenfinden, welche unter der Einwirkung fliessenden und meteorischen Wassers zustande kommen können.

Um zunächst die topographischen Verhältnisse zu erledigen, sei daran erinnert, dass das Eisackthal zwischen Franzensfeste und Brixen durch die beiden Wasserläufe, welchen dasselbe angewiesen ist, in drei untergeordnete, durch niedrige Erhebungen von einander geschiedene Längsthäler zerlegt wird. In Fig. 1, der die österreichische Generalstabskarte (Blätter Klausen und Franzensfeste) zu grunde liegt, sind das westliche und das mittlere dieser drei Parallelthäler veranschaulicht. Das erstere wäre an und für sich ein Trockenthal, wenn nicht durch Aufstauung ein fast 1 km langer See (auf der Karte, aber nicht im Volksmunde „Oberer See“ genannt) entstanden wäre, der die spärlichen Zuflüsse von den Bergen herab in sich aufnimmt und, als abflusslos, grossenteils versumpft ist. Ein länglich-schmaler Rücken von geringer Höhe, der künftig kurz den Namen „Höhe A“ führen soll, trennt diese Senkung vom eigentlichen Eisackthale, und dieses wieder wird auf seiner östlichen Seite durch einen weit kräftiger modellierten Höhenzug — von nun an „Höhe B“ — begleitet, den die offizielle Karte als „Schabser Plateau“ kennt. Zwischen diesem und den ziemlich steil ansteigenden Vorbergen der Plose fliesst in tief eingeschnittenem Thale die von Osten kommende Rienz dahin, die sich unmittelbar bei Brixen unter einem scharf ausgeprägten spitzen Winkel mit dem Eisack vereinigt. Das anstehende Gestein aller dieser Hügel verbirgt sich fast durchgehends unter den diluvialen Auflagerungen, und nur bei dem Durchbruch des Eisacks zwischen den beiden Höhen A und B, an dessen unterem Ende das alte Kloster Neustift gelegen ist, kann man deutlich erkennen, dass den Kern derselben archaeische Schiefer bilden.

Das „Schabser Plateau“ fällt steil gegen die Eisack-Thal-

niederung ab. Gegen Nordwesten ist eine ausgesprochene Terrassenbildung wahrnehmbar, indem eine fast ebene Fläche, auf welcher das Dörfchen Aicha liegt, sich bis an den Fuss des Berges von Spinges hinzieht. Die Generalstabskarte kennt diese Terrasse als „Ochsenbichl" — eine Bezeichnung, die jedenfalls auch den gegenwärtigen Umwohnern nicht mehr

Fig. 1.



recht geläufig ist. Schon die oberflächlichste Begehung[1]) der Thalleiste vergewissert darüber, dass man es hier mit Glazial-

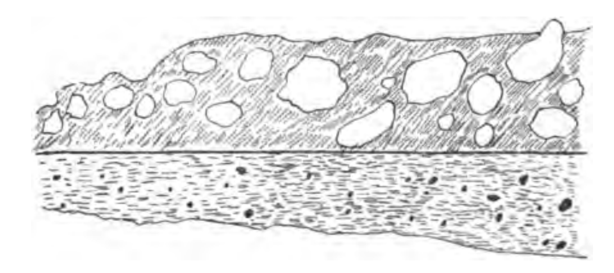
---

[1]) Verf. hat den Ochsenbichl samt der angrenzenden Thallandschaft nicht nur zu wiederholten malen allein, sondern zuletzt auch mit einem besonders gründlichen Kenner des Glazialphänomenes, Prof. Ed. Richter (Graz), durchwandert, und es ergab sich hiebei in allen wichtigeren Punkten eine durchgängige Uebereinstimmung der Ansichten.

schottern zu thun habe, wobei allerdings zunächst noch die Frage eine offene bleibt, ob jene vom Gletscher selbst oder von den sich ihm entringenden Wassermassen an ihrem nunmehrigen Orte deponiert worden seien, ob also an Moränen oder an fluvioglaziale Ablagerungen zu denken sei. Auch eine relative Altersbestimmung einzelner Teile wird erst dann möglich, wenn man die Gesamtheit der den Höhen A und B angehörigen Schichten ins Auge fasst.

Nicht unerheblich erleichtert wird diese letztere Aufgabe durch einen Strassenbau, welcher einige höchst belehrende Aufschlüsse in dem sonst allenthalben durch eine reiche Vegetation unübersichtlich gemachten Terrain zuwege gebracht hat. Es

Fig. 2.



kam darauf an, den das rechtseitige Ufer des Eisacks bildenden Wiesengrund, in dem die beiden Weingüter „Vorder-Igger“ und „Hinter-Igger“ kleine wirtschaftliche Zentren ausmachen, durch einen fahrbaren Weg mit der Reichsstrasse Brixen-Vahrn-Franzensfeste zu verbinden; die beiden Punkte, in denen diese Strasse von dem neu angelegten Wege getroffen wird, haben in Fig. 1 die Signaturen A_1 und A_2. Unmittelbar bei A_1 ist deshalb ein Durchschnitt durch den oberen Teil der Höhe A hergestellt worden, und hier zeigt sich ganz ungesucht dem Auge Folgendes: Eine vollkommen horizontal verlaufende Linie scheidet die durch den Einschluss vieler und mächtiger Gesteinstrümmer charakterisierten hangenden Schichten von den stark verwit-

terten liegenden, die nur sehr wenig Schottermaterial, und dieses in weit feiner verteiltem Zustande, enthalten. Fig. 2 sucht von dem hier angedeuteten Gegensatze eine ungefähre Vorstellung zu geben. Die Blöcke sind durchweg Granit und Gneiss und entstammen ersichtlich dem Urgebirge des oberen Eisack- und Wippthales; der sandige Lehm der Unterlage ist aus Gestein von derselben Beschaffenheit hervorgegangen, gehört aber unzweifelhaft einer älteren Epoche an. Die erwähnte Trennungsfläche lässt sich, wenn man einmal an der erwähnten, besonders dazu geeigneten Stelle ihre Eigenart kennen gelernt hat, auch noch anderwärts leicht herausfinden, so beispielsweise im Pusterthale zwischen Mühlbach und Schabs. Vor allem durchzieht sie auch die denudierten Abhänge des Ochsenbiehls, und hier begegnen wir auch einem Vorkommnis, welches besonders beachtenswert erscheint. Durch eine jener Erdpyramiden nämlich, mit denen wir uns gleich nachher zu beschäftigen haben werden, zieht sich der Trennungshorizont derart hindurch, dass ihre Spitze sich aus lauter kleinen, fest verkitteten Schottersteinen zusammensetzt, während der eigentliche Körper der Säule aus gleichmässigem Verwitterungsstoffe von Massengesteinen besteht.[1]) Es wird wahrscheinlich nicht viele zusammenhängende Bezirke in Moränenlandschaften[2]) geben, welche die Trennungsfläche zwischen Ablagerungen verschiedener zeitlicher Entstehungen so präzis auf immerhin weitere Entfernung zu verfolgen gestatten, wie dies hier der Fall ist.

Dass alle diese Ablagerungen den glazialen Typus an sich tragen, kann vonvornherein nicht zweifelhaft sein. Insbesondere

---

[1]) Es ist dies vielleicht der einzige bekannte Fall heterogener Zusammensetzung eines Erdpfeilers. Man nimmt diese Gebilde gewöhnlich als aus einer ganz gleichförmigen Zersetzungsmasse gebildet an. Jene Bänderung, die allerdings da und dort beobachtet wird, ist mit der hier in betracht kommenden Zugehörigkeit zu zwei ganz verschiedenen Schichtfolgen keineswegs identisch.

[2]) Dieses Wort gebrauchen wir in dem erweiterten Sinne, den ihm A. v. Boehm (Geschichte der Moränenkunde, Wien 1902, S. 124) unterlegt.

weisen einzelne der von der oberen Schicht umschlossenen Blöcke prächtige Schliffe auf. Weit schwieriger ist es selbstverständlich, die beiden Depositen mit solchen zu identifizieren, welche man in anderen, weit entfernten Gegenden genau gegliedert und zur Grundlage einer zunächst eben doch dem örtlichen Auftreten angepassten Nomenklatur gemacht hat. Dafür, dass eine Gliederung auch für die südlich vom Brenner auftretenden Glazialgebilde möglich ist, hat vor längerer Zeit bereits Penck[1]) den Nachweis erbracht, indem er wenigstens für die Seitenmoräne des grossen Gletschers, der damals von der anders gelegenen Wasserscheide[2]) des Uralpenzuges sich herabsenkte, feststellte, dass sie dem letzten Eiszeitstadium angehört haben müsse. Die genauen chronologischen Parallelen zwischen den an den Höhen A und B wahrnehmbaren Formationen und denen, die den Nordrand der Alpen einsäumen, wird man heute noch nicht ziehen können; verbürgt ist anscheinend nur das, dass die beiden Ablagerungen, die der mehrerwähnte Trennungshorizont zu unterscheiden gestattet, zwei verschiedenen Uebereisungsperioden zuzurechnen sind. Die obere Schichtenreihe dürfte mutmasslich als fluvioglazial anzusprechen sein, weil eben in ihr vielfach eine so regelrechte Schichtung der derberen Einschlüsse zu tage tritt, wie sie nur von fliessendem Wasser bewirkt zu werden pflegt. Die glaziale Schrammung und Schleifung der Gesteinstrümmer mag über dieselben zu einer Zeit ergangen sein, als sie sich noch in ihrer ursprünglichen Verbindung mit dem anstehenden Fels befanden. Alles in allem weisen die äusseren Kennzeichen auf den Niederterrassenschotter[3]) des bayerischen Alpen-

---

[1]) Penck, Der Brenner, Zeitschr. d. deutschen u. österr. Alpenver., 18. Band, S. 11.

[2]) Was Penck nach dem damaligen Befunde nur ahnen konnte, hat F. Kerner v. Marilaun (Die Verschiebungen der Wasserscheiden im Wippthale während der Eiszeit, Sitzungsber. d. k. k. Akademie d. Wissensch. zu Wien, Math.-Naturw. Kl., 1. Dezember 1891) mit neuen Argumenten erhärtet.

[3]) Nach der neuerdings von Penck gewählten und in dem jüngsten

vorlandes hin, der, rein morphographisch betrachtet, eine ganz analoge Beschaffenheit besitzt.

Was dieser Nebeneinanderstellung noch eine gewisse Stütze verleiht, ist die Thatsache, dass an einzelnen Stellen dieser Terrassenschotter sich in höchst eigenartiger Weise mit einer ganz unregelmässig gelagerten Schicht durchdringt, die unserem Deckenschotter zum mindesten ausserordentlich ähnlich ist. Da und dort begegnet man Konglomeraten, die von der nordalpinen Nagelfluh kaum zu trennen sind; ein Irrblock dieser Art liegt z. B. hart an dem Wege, der von der Brixener Vorstadt Stufls nach Neustift führt. Ganz besonders bezeichnend sind ferner die Zustände am nördlichen Ende der Ochsenbichl-Terrasse. Wie aus Fig. 1 zu ersehen, schmiegt sich diese letztere ganz und gar dem gewundenen Laufe des Flusses an, so dass zwischen ihr und dem Eisack nur ein ganz schmaler Ufersaum übrig blieb. Da, wo dieser sich südlich etwas erweitert, liegen die beiden Einöden „Ober-" und „Unter-Pauckner", und von hier an, von C bis D, besitzt die glaziale Flanke der Höhe B (s. o.) den uns bekannten Charakter. Dieser verliert sich von D an nach und nach, und gegen E hin machen sich mehr und mehr grobe, durch ein lössartiges Bindemittel zementierte Blöcke geltend, die eben unwillkürlich den Eindruck des Deckenschotters hervorrufen. Indessen wäre es gewagt, bestimmt von einem solchen zu sprechen, solange nicht auch anderswo das Vorkommen solcher Gebilde, und zwar unter dem vermeintlichen Niederterrassenschotter,[1]) zuverlässig ermittelt ist.

Werke konsequent zur Anwendung gebrachten Bezeichnungsweise läge das System W (Würm) vor.

[1]) Trotzdem von hause aus der Deckenschotter unter der Hochterrasse liegt, die ihrerseits wieder die Niederterrasse unterteuft, bringt es doch die Flusserosion mit sich, dass man in der Nähe des vom Flusse gebildeten Einschnittes den Deckenschotter in höheren Horizonten als die später abgesetzten Schotter antrifft (Penck-Brückner-Du Pasquier, Le système glaciaire des Alpes, Neuchatel 1894). Wie eigentümlich hie und da eine Grundmoräne sich in die Niederterrasse hineinzuschieben vermag, beweist die Bänderung der Innleite bei Wasserburg in Ober-

Dieser letztere ruht also, wie wir sahen, der Regel nach auf einer mutmasslich ziemlich mächtigen Schicht, die gar nichts mit Nagelfluh zu thun hat. Man möchte wohl geneigt sein, in ihr eine echte Moräne und zwar, angesichts der feinen Aufbereitung ihres Materiales, eine Grundmoräne zu erblicken. Andererseits will auch jene Anschauung, auf welche Blaas (s. o.) anspielt, beachtet sein. An und für sich hindert nichts, sich den Sachverhalt in der Weise zurechtzulegen, dass von Osten her ein gewaltiger Gletscher den Ausgang des Eisackthales versperrt und die nach Süden abfliessenden Gewässer aufgestaut habe; wenn dann der Eisackgletscher in den so entstandenen See hineinrückte, konnten seine Moränen sehr wohl jene Konfiguration annehmen, welche die untere Schicht erwähntermassen auszeichnet. Auf ein Zusammenwirken flüssigen und gefrorenen Wassers wird man somit bei der Erklärung der Glazialdepositen nördlich von Brixen unter allen Umständen Bedacht nehmen müssen, indem nur bei den oben aufliegenden Schottermassen der fluvioglaziale, bei den fast homogenen Straten der tieferen Horizonte mehr der im engeren Sinne glaziale Ursprung zu betonen wäre. Als ein weiterer Faktor könnte auch noch die Gestalt der Höhe A eine gewisse Rolle spielen, welche unverkennbar die eines Drumlins ist. „Die Drumlins sind", so lesen wir in der massgebenden Darstellung,[1]) „gestreckt und schwarmförmig in der Richtung der Eisbewegung angeordnet; in der Mittellinie der alten Gletscherzunge stehen sie daher senkrecht zur Richtung der Endmoränen, an den Flanken laufen sie unter

---

bayern, auf welche von Penck (Penck-Brückner, S. 131 ff.) als auf eine seltenere Modalität der Verknüpfung von Schotter und Moränen, die zumeist eine „Verzahnung" oder „Verkeilung" zu sein pflegt, hingewiesen worden ist.

[1]) Penck-Brückner, a. a. O., S. 16. Als Ort der Drumlins, wie der verschiedenen Gattungen glazialer Absätze werden hier die „Zungenbecken" definiert, ringsum geschlossene, tiefe Wannen, häufig von Seen erfüllt. Die Merkmale eines solchen Beckens treffen teilweise für die hier behandelte Thalung zu, welcher der Fluss freilich eine Oeffnung nach abwärts verschaffte.

spitzem Winkel auf letztere zu". Dass ein normaler Endmoränenwall heutzutage nicht mehr existiert, kann mit Rücksicht auf die zerstörenden Wirkungen, welche die verbundenen Flüsse Eisack und Rienz bei ihren häufigen Ueberschwemmungen ausgeübt haben, nicht befremden; im übrigen dagegen ordnet sich die Höhe A völlig der Penck'schen Begriffsbestimmung unter. Die verlängerte Achse der einer langgestreckten Ellipse im Horizontalprofile vergleichbaren Erhebung mochte einstens gerade mit der Mittellinie der Stirnmoränen zusammenfallen.[1])

Soviel über die hypothetische Entstehung der Schottermassen, welche den Abhang des Ochsenbichls bilden. Wir gehen jetzt zu den merkwürdigen Oberflächenformen über, welche diesem abgelegenen und — wie es wenigstens den Anschein hat — noch nirgendwo beschriebenen Erdenwinkel[2]) auch unter dem landschaftlichen Gesichtspunkte ein ganz eigenartiges, pittoreskes Gepräge verleihen. Auf der Strecke C D (Fig. 1), deren Richtung eine angenähert meridionale ist, hat sich eine formenreiche Kolonie von Erdpyramiden angesiedelt; die Steilwand D E hingegen, welche unter stumpfem Winkel von C D abgeht, zeigt sich durchsetzt von gigantischen geologischen Orgeln. Es ist bekannt genug, dass diese beiden Gruppen von Naturerscheinungen auf Erosion und Denudation

---

[1]) Auch die Beschreibung, welche Nansen (Auf Schneeschuhen durch Grönland, 2. Band, Hamburg 1897, S. 451 ff.) von den Drumlins gibt, passt sich vollständig unserem Falle an. Sie überdecken die Grundmoränen, und da erwähntermassen die glazialen Unterschichten der Höhe A von uns mit einer Grundmoräne identifiziert worden sind, so würde auch dieses Kennzeichen zutreffen.

[2]) Unmittelbar führt keine Chaussée dorthin, und eine genauere Bekanntschaft mit der Oertlichkeit lässt sich lediglich durch eine etwas anstrengende Wanderung erreichen. Einen Ueberblick gewährt freilich schon ein Punkt, der von der Reichsstrasse Brixen-Pusterthal nur wenige Schritte entfernt ist, den aber eben nur der Eingeweihte sofort findet. Gleichwohl kann man auch vom Eisenbahnwagen aus, bald nachdem man auf der Pusterthalbahn die Militärhaltestelle Franzensfeste verlassen hat, aus einer Entfernung von 2 km die kühnen Formen deutlich genug beobachten. Auch von Vahrn aus kann dies geschehen.

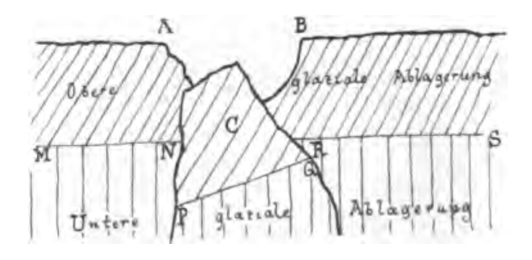
zurückzuführen sind; sehr belehrend sind aber im vorliegenden Falle die lokalen Verhältnisse, welche mehr als sonst eine tiefere Einsicht in den Hergang zu gewinnen erlauben. Fürs erste soll den Erdpfeilern, deren Beschränkung auf einen völlig abgeschlossenen Raum[1]) jedermann auffallen muss, eine eingehendere Betrachtung zu teil werden.

Obwohl es Erdpyramiden und Bodenprotuberanzen, deren Herauspräparierung aus einer zuvor ziemlich gleichmässig ver-

---

[1]) Auch gegenüber von CD (Fig. 1), bei F, scheint beim ersten Beschauen eine Erdpyramide sich abgelöst zu haben; sieht man aber näher zu, so überzeugt man sich, dass das losgetrennte Erdstück nicht durch eine von oben nach unten, sondern durch eine von unten nach oben wirkende Kraftwirkung des Zusammenhanges mit dem Hauptkörper beraubt worden ist. Die Bewaldung des Abhanges ist der Ermittlung des Sachverhaltes wenig günstig, allein die uns bekannte, auch an dieser Stelle hervortretende Trennungslinie hilft aus der Verlegenheit. Von A bis B (Fig. 3 a) klafft eine halbkreisförmige Unterbrechung in dem fast lotrecht abstürzenden Schotterwalle, und gerade vor ihr erhebt sich aus Bäumen der vorbezeichnete Obelisk C, der sich, als die Unterwaschung durch die Eisackfluten ihn abtrennte, zugleich nach Süden drehte, so dass nunmehr der fragliche Horizont den Verlauf MNPQRS erkennen lässt, indem das Stück PQ flussaufwärts ansteigt. Der Bildungsakt ist völlig derselbe wie bei den südrussischen Obruiven (Küstenabrutschungen), mit denen uns Kohl (Reisen in Südrussland, 2. Band, Dresden 1841, S. 63 ff.) bekannt gemacht hat. Das strömende Wasser grub sich, gerade so wie es am Steilrande der pontischen Steppe die Wellen des Schwarzen Meeres thun, in die Basis des Abhanges ein und lockerte dessen Konsistenz so lange, bis eine Höhle entstanden war; deren Decke brach ein,

Fig. 3a.



teilten Masse leicht angreifbaren und zerstörbaren Stoffes sich in einer wesentlich ähnlichen Weise erklären lässt,[1]) allenthalben

---

und das darüber stehende Erdprisma sackte nach, so dass jene zirkusartige Ausbuchtung entstand (Fig. 3b). Es liegt folglich ebenfalls ein erosiver Vorgang in mitte, aber derselbe ist, wie bemerkt, grundverschieden von demjenigen, dem die Ausgestaltung des gegenüberliegenden Abhanges der Höhe B auf Rechnung zu setzen ist.

[1]) Es ist nicht ohne Interesse, alle die turmartigen Oberflächengebilde zusammenfassend zu behandeln, von denen in der physischen Erdkunde gesprochen wird. Abgesehen von den durch direkten Aufbau entstandenen Stalagmiten, von den denudatorisch blosgelegten, aber doch längst zuvor vorhanden gewesenen Batholithen und unwesentlichen anderen Gelegenheitsbildungen kann man stets das gleiche Grundprinzip konstatieren: Die Erosion greift modellierend in eine vorher ziemlich einförmige, tiefer gehender Diffe-

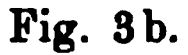


Fig. 3b.



auf der Erde gibt, so kann man trotzdem den Satz aufstellen: Tirol ist das klassische Land der Erdpyramiden. Die

---

rentierung entbehrende Masse ein. Dieselbe kann aus festem Gestein, aus lockeren Stoffen oder aus Eis bestehen — was aus ihr unter dem stetig wirkenden Einflusse auch ganz schwacher Kräfte wird, ermangelt nicht gewisser gemeinsamer Familienzüge, die sich beim Beschauen der entsprechenden Landschaftsbilder ungezwungen dem Auge einprägen. Bilderwerke, in denen die wichtigsten Oberflächenformen anschaulich zusammengestellt sind, können nach dieser Seite hin der Forschung wirklichen Vorschub leisten; dahin gehört vorzugsweise das monumentale Werk von Robin (La terre; ses aspects, sa structure, son évolution, Paris 1902). Nur in gedrängter Kürze seien die wichtigsten Modalitäten hier aufgeführt. In die erste Gruppe gehören säulenartige Felsbildungen des Cañons von Colorado; die „Aiguilles" des Montblancgebietes, welche dessen Südseite, gegen Courmajeur, als in ein schon von Saussure bewundertes Meer spitz ansteigender Protoginpyramiden aufgelöst erscheinen lassen (Petersen, Erinnerungen an den Col du Géant, Z. d. d. u. öst. Alpenver., 17. Band, S. 357); die kretazischen Felszerklüftungen des Mittelgebirges (Labyrinthe von Adersbach und Weckelsdorf, Sächsische Schweiz, Wittower Klint auf Rügen mit geradezu überraschenden Anklängen an die Erdpyramiden, „Rochers de Vallière" im Departement Charente Inférieure); dolomitische Nadelbildungen (Südtirol, Fränkische Schweiz, Umgebung von Montpellier, „Nadel" im krainischen Sannthale); die durch Deflation erzeugten Restberge („Zeugen" in den afrikanischen und asiatischen Wüsten, „Mesas" im südlichen Nordamerika, „Teufelstisch" bei St. Mihiel an der Maas, „Monument-Park in Colorado); Brandungsresiduen am Meeresgestade („Needle-Rock" in New-Jersey, „Demoiselle de Fontenailles" im Departement Calvados, „Aiguille d'Étretat" im Departement Seine Inférieure, „Mönch" auf Helgoland). Die zweite Formenklasse bietet uns im folgenden Stoff zu besonderer Erörterung. Was endlich die dritte anlangt, so ziehen zwei Erscheinungen unsere Aufmerksamkeit auf sich, die der Séracs und des Büsserschnees, über deren gegenseitige Beziehungen noch keine volle Klarheit geschaffen ist. Wenn man mit Sieger (Die Karstformen der Gletscher, Geogr. Zeitschr., 1. Band, S. 182 ff.) die Mannigfaltigkeit der Gebilde, welche durch Insolation, Ablation und Zusammensturz an der Oberfläche eines Gletschers hervorgebracht werden können, mit derjenigen verkarsteter Kalkgebirge vergleicht, wird man sich dem Gefühle nicht zu entziehen vermögen, dass das einigende Band, welches sogar Eis und Stein verknüpft, auch im Bereiche des festen Wassers allein diese seine Kraft bethätigen werde. Hauthals Entdeckung (Gletscherbildung aus der argentinischen Cordillere, Globus, 67. Band, S. 37 ff.), dass Säulen aus „Nieve penitente"

erste Erwähnung derselben im wissenschaftlichen Schrifttum[1]) datiert von einem Tiroler, dem Innsbrucker Mathematiker F. Zallinger, der auf sie anlässlich der Besprechung der Muhrbrüche hingewiesen hat.[2]) Es dauerte längere Zeit, bis

---

sich auch mit wirklichen Gletschern zusammenfinden, spricht freilich einigermassen gegen die von Brackebusch (Die Penitentesfelder der argentinischen Kordilleren, Globus, 63. Band, S. 1 ff.) vertretene Anschauung, der zufolge diese Eispilaster als ein unmittelbares Seitenstück zu den Erdpyramiden zu gelten hätten.

[1]) Unser ganzes Wissen von der Sache, wie es vor einigen Jahren beschaffen war, kennzeichnet sehr übersichtlich eine Schrift von C. Kittler (Ueber die geographische Verbreitung und Natur der Erdpyramiden, München 1897; M. Geogr. Studien, herausgeg. von S. Günther, 3. Stück). Einige Ergänzungen zu den hierin niedergelegten Angaben über das Vorkommen dieser „Lehmtürme", wie man in Tirol sagt, werden weiter unten gegeben werden.

[2]) F. S. Zallinger zum Thurn, Von den Ueberschwemmungen in Tirol, Innsbruck 1779, S. 63 ff. Wenn wir die betreffende Stelle wörtlich wiedergeben, erreichen wir zugleich, dass Zallinger als der eigentliche Begründer der Lyell'schen Theorie, von der nachher die Rede sein wird, hervortritt. „Was das Regenwasser in einem lockeren Boden vermag, zeigen auch jene Säulen und Pyramiden, die ich nicht weit von Unterinn und Lengmoos niemals ohne Vergnügen ansah. Sie stehen fast senkrecht; bei einigen gehen aus dem nämlichen Stamme zwei oder drei hervor; die meisten ziehen sich oben in eine Spitze zusammen und, was recht wunderlich scheint, ist die Spitze bei allen mit einem grossen Steine bedeckt. Als ich, die Sache genauer zu beobachten, hinzutrat, fand ich augenscheinlich, dass die Pyramiden nur von dem Regen entstehen können; denn dieser spült nach und nach die lockere rote Erde an der Seite herum so ab, dass nur jene Stücke noch übrig blieben, die wider den Regen noch von jenen Steinen sind geschützt worden, so man itzt auf jenen Spitzen beobachtet." Was Lyell zur Erklärung beibringt, ist nur eine Umschreibung des hier kurz und bündig skizzierten Grundgedankens: Zallinger möchte die Priorität des Hinweises auf solch ungewöhnliche Bodenformen einem Buche von Mitterpacher (Kurzgefasste Naturgeschichte der Erdkugel, Wien 1774, S. 43 ff.) zuerteilen. Bei näherem Zusehen muss man es jedoch mindestens als sehr zweifelhaft erachten, ob jene Säulen, die Bouguer in den Cordilleren, Pontoppidan in Norwegen, Gmelin in Sibirien gesehen zu haben angeben, wirkliche Erdpyramiden und nicht vielmehr Denudationsfiguren anderer Art waren.

zu den stets in erster Linie genannten Erdpfeilern am Bozener Ritten, deren die älteren Schriften ausschliesslich gedenken,[1]) auch andere Gebilde von verwandtem Charakter hinzukamen. Nur eine einzige Erwähnung, und zwar aus dem Gebiete der Westalpen, ist fast gleichaltrig, steht jedoch ganz isoliert da.[2]) Jedenfalls wird man, sobald von Erdpyramiden die Rede ist, sofort an Tirol denken, und diesem Lande werden am zweckmässigsten etwaige Typen zu entnehmen sein, nach denen sich eine Klassifikation derartiger Bodenformen bewerkstelligen lässt. Eine solche anzuregen, wäre schon längst am Platze gewesen, um, wenn es sich um die Schilderung irgend eines konkreten Vorkommens handelt, sich in der oft abenteuerlichen Formenfülle leichter zurechtzufinden. Der nachstehende Vorschlag will nur als ein solches Hilfsmittel bequemer Orientierung betrachtet werden; er sieht von allen eigentlich morphologischen Erwägungen ab und hält sich ausschliesslich an äusserlich in die Augen fallende, rein morphographische Momente. Als Südtiroler Typus bezeichnen wir den von einem Felsblock, einem Rasenstücke oder einem Baume gekrönten Obelisk;[3]) das Wort Nordtiroler Typus ist von den besonders schönen, jedem Brennerfahrer wohlbekannten Spitzsäulen bei Patsch herge-

---

[1]) Die gesamte hierher gehörige Litteratur berücksichtigen ausser Kittler auch noch nach Möglichkeit Penck (Die Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 234 ff.) und der Verf. (Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 885 ff.). Einige Nachträge hinwiederum sind in gegenwärtiger Abhandlung enthalten.

[2]) Saussure, Voyages dans les Alpes, 8. Band, Neuchatel 1796, S. 11 ff.; er spricht da von den „monticules de formes souvent coniques" im Kanton Wallis.

[3]) Trotz dieser gemeinschaftlichen Eigenschaft können selbst innerhalb eines und desselben Formenbereiches noch die schärfsten Gegensätze platzgreifen; man vergleiche beispielsweise die eleganten, himmelanstrebenden Obelisken vom Ritten mit den täuschend einem grossen Pilze gleichenden Zwergformen des Jenesien-Berges bei Bozen, die ihrerseits wieder in allen Stücken erinnern an die von F. Simony (Das Dachsteingebiet, 1. Band, Wien 1889, S. 107; Tafel XCII) beschriebenen „Hutpilze" aus Breccienmaterial.

nommen; der Osttiroler Typus endlich soll gewisse scharfschneidig auslaufende, aber auf langgestreckter Basis sich erhebende Denudationsreste in sich begreifen.[1]) Wenn wir uns dieser Sammelnamen bedienen, so können wir mit Bezug auf die Erdsäulenkolonie des mittleren Eisackthales als deren hervorstechendste Eigenschaft die hinstellen, dass in ihr alle drei Typen, wenn auch durchaus nicht gleichmässig, vertreten sind.

Auf die Entfernung eines starken Kilometers ist der ganze Steilhang C D (Fig. 1) des Schabser Plateaus (Höhe B) zerfasert in ein Aggregat von Erdsäulen, die im denkbarst abwechselungsreichen Bilde aus ziemlich dichtem Walde emporragen.[2]) Abgesehen von kleineren, da und dort eingestreuten Exemplaren sind es wesentlich drei in sich geschlossene Familien, die den Beschauer fesseln. In dem Photogramme (Fig. 4) ist das ganze Gebiet, dessen Schilderung hier gegeben wird, zur Anschauung gebracht worden. Die drei zusammengehörigen Gruppen lassen sich darin, wenn man von rechts gegen links fortschreitet, unschwer erkennen. Die Photographien wurden dem Verf. in allen Fällen von seinen Söhnen geliefert. Bei den beiden ersten — von Süden aus gezählt G und H in Fig. 1 — ist der Auflösungsprozess bereits weiter fortge-

---

[1]) Rabl, Die Erdpyramiden von Goednach-Goertschach, Der österreichische Tourist, 1884, S. 149 ff. Diese sonderbaren Gebilde sind nicht aus diluvialem Schotter, sondern aus tertiären Konglomeraten herausgearbeitet, was wohl zum teile die Verschiedenheit der Sachlage begreiflich macht. Wahrscheinlich ist aber gleichwohl die Abweichung nur eine scheinbare, indem nämlich bei stetigem Fortschreiten der Erosionsarbeit die Erdpyramiden vom Osttiroler Typus in solche der beiden anderen Typen zerlegt werden würden.

[2]) Die Basisfläche der Pyramiden ist so zerrissen und das Unterholz so dicht, dass sich Versuche, die Höhe der einzelnen Objekte, vielleicht nach dem für Bäume von Stützer (Die grössten, ältesten oder sonst merkwürdigen Bäume Bayerns in Wort und Bild, München 1900, S. 16 ff.) erprobten photogrammetrischen Verfahren, bestimmen zu wollen, von selbst verbieten. Der Schätzung zufolge darf man jedoch einzelne dieser Säulen den höchsten bisher in Europa bekannten zurechnen; die eigentlichen Riesen beherbergt Nordamerika, wie in anderen Fällen auch.

schritten, so dass die einzelnen Aufragungen fast ganz isoliert erscheinen und nur noch in ganz geringer Höhe über dem Boden mit einander verbunden sind. Fig. 4 (rechts) gibt einige markante Erscheinungen wieder; es herrscht hier hauptsächlich der Südtiroler Typus vor, doch ist auch derjenige Osttirols nicht unvertreten.

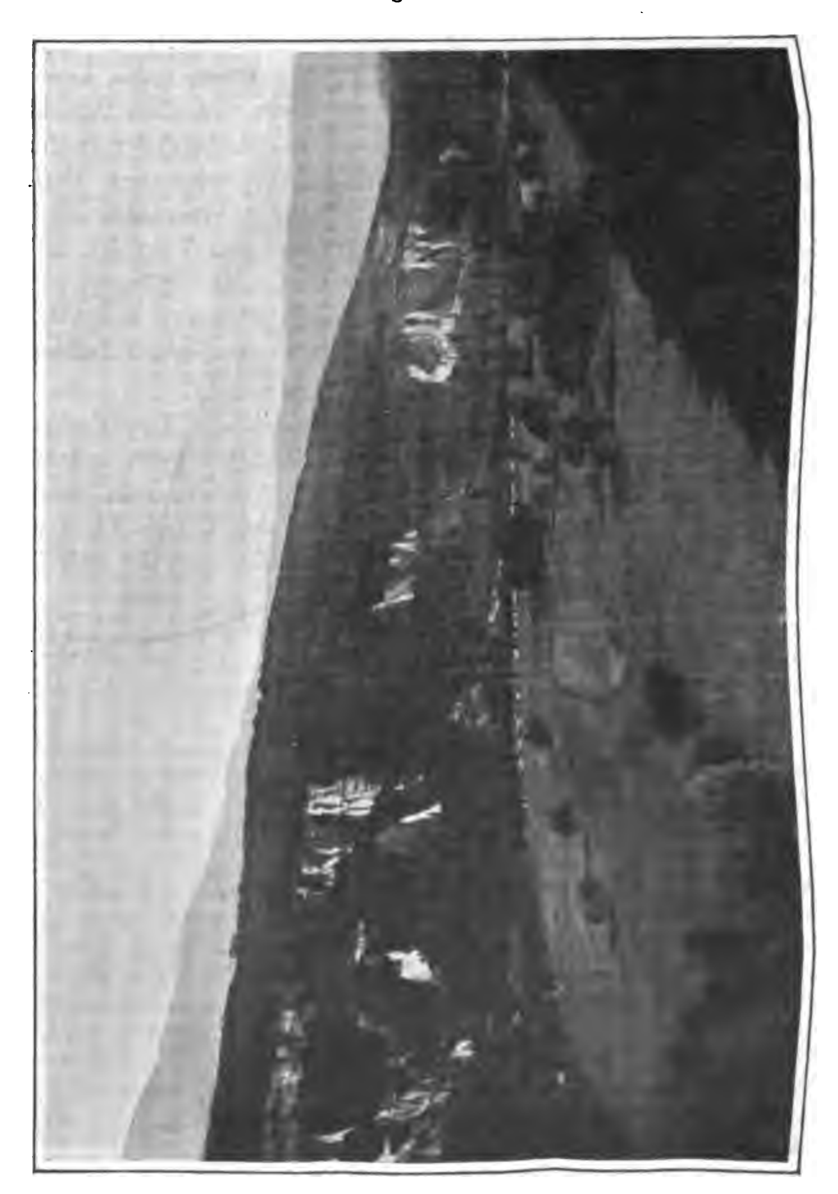
Weitaus am fesselndsten gestaltet sich in landschaftlicher, wie in wissenschaftlich-geographischer Hinsicht die dritte Kolonie (K in Fig. 1); sie gewährt uns eine vortreffliche Gelegenheit, die Bildung der Erdpyramiden genetisch zu verfolgen. Durch Erdrutsche, als deren Ursache hier, wie am jenseitigen Ufer, die Unterspülung durch den über seine gewöhnlichen Grenzen getretenen Eisack anzusehen ist, wurden zu beiden Seiten der schmalen Wand, welche an diesem Orte allein von der glazialen Schottermasse stehen blieb, sehr ansehnliche Bestandteile dieser letzteren fortgeschafft, so dass die Abrissstellen in ihrer ganzen Eigenart erkennbar sind.[1])

[1]) Bezeichnend ist für die Abrisszirken die vollkommene Glätte der Wandungen, und auch da ist es einerlei, ob aus einer festen, aus einer lockeren oder aus einer Eis-Masse sich der halbzylindrisch begrenzte Rutschkörper losgelöst hat, dessen Trümmer den unteren Teil der Rutschbahn, die angrenzende Thalsohle und die sogenannte „Spritzzone" — nach A. Heim — bedecken. Vielfach sieht sich dieser Hohlraum so an, als wäre das fehlende Stück geradezu mit dem Messer herausgeschnitten worden. Sehr belehrend sind nach dieser Seite hin die Photogramme, welche A. Heim (Die Gletscherlawine an der Altels, Zürich 1895) und L. Du Pasquier (L'Avalanche de l' 11 septembre 1895, Neuchatel 1896) von dem Eisabbruche des Altelsgletschers mitgeteilt haben. Die Abbildungen der Ursprungsstellen von Erdschlipfen und Bergstürzen sind bis jetzt wenig zahlreich. So gibt es von dem tragischen Ereignis, welches am 2. September 1806 das Gelände zwischen Zuger- und Lowerzer-See betraf, zwar eine für jene Zeit vortreffliche und auch der kartographischen Beigaben nicht entbehrende Monographie (Zay, Goldau und seine Gegend, Zürich 1807), aber die interessante Abrissstelle scheint auch später nicht viel beachtet worden zu sein, und es mag sich deshalb empfehlen, ein photographisches Originalbild (Fig. 5) hier einzufügen, aus dem sofort erhellt, dass eine glatt verlaufende Vertikalfläche die stehen gebliebenen Teile der den Rossberg bei Goldau bildenden Nagel-

Fig. 4.



Fig. 4.



Die Zwischenwand aber ist von den erosiven Agentien derart bearbeitet worden, dass, wovon Fig. 4 ein Bild zu liefern sucht, die Konturen eines Miniaturgebirges entstanden.[1]) Aussergewöhnlich kühne Zacken, Säulen, Pfeiler, Türme ragen in die Luft; hie und da wird ein höherer Turm von einer Anzahl kleinerer Türmchen umgeben, die sich wie Strebepfeiler an ihn anlehnen. Von den zahlreichen Erdstellen, welche dem Verf. unter dem gleichen Gesichtspunkte bekannt geworden sind, kann keine an malerischer Grossartigkeit den Vergleich mit der Gruppe K aushalten. Decksteine fehlen durchgängig; nur anscheinend ein einziges mal trägt ein kleinerer Erdpfeiler einen kleinen Rasenhut, ein Bruchstück des abgerutschten Plateaus.

Wer noch von der Unvollständigkeit der Lyell'schen Theorie,[2]) die noch immer durch die Lehrbücher geht, und an deren Grundgedanken auch nicht gerüttelt werden soll, überzeugt zu werden brauchte, der müsste sich an den Platz K begeben. Bekanntlich legt der berühmte Geologe, der sich ja

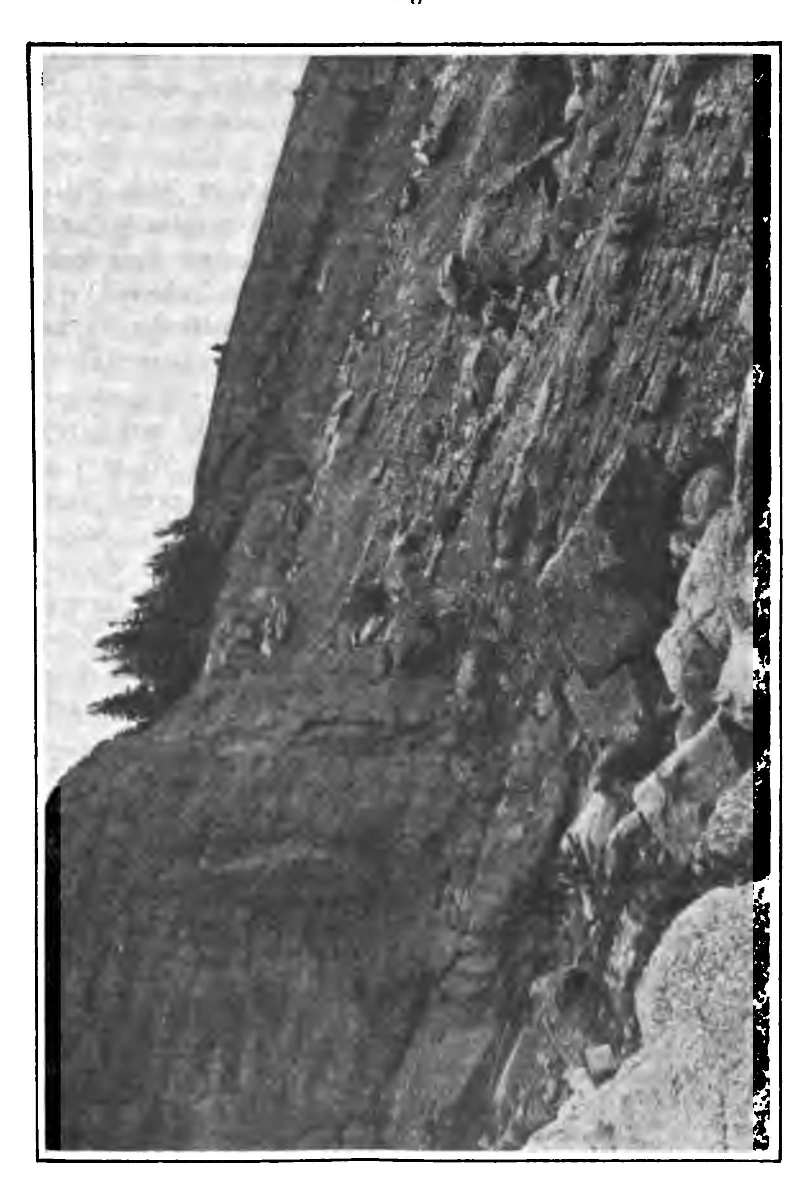
---

fluhbänke von den aus ihnen gleichsam herausgeschälten, abgerutschten Teilen trennt. Nicht anders sieht, natürlich abgesehen von den durch die Schotternatur bedingten Abweichungen, das Abrissgebiet der Erdpyramidenwand K aus.

[1]) Ratzel (Die Erde und das Leben, 1. Band, Leipzig-Wien 1901, S. 551) bemerkt hiezu: „An einer Stelle des linken Ufers der Plansee-Aache unterhalb der Stuibenfälle glaubt man auf ein Gebirgsrelief mit sehr scharfen Kämmen herabzuschauen.“ Dies trifft auch in anderen Fällen zu, unter denen eben der hier in Rede stehende nicht zuletzt kommt. Ein merkwürdiges Exemplar bringt De Marchi (Trattato di geografia fisica, Mailand etc. 1901, S. 242 ff.) zur Anschauung. Wäre man im ungewissen über den Massstab, in welchem die Zeichnung des kühn profilierten Erdobelisken, nächst der piemontesischen Stadt Brà, gehalten ist, so könnte man ebensowohl das Matterhorn wie eine gewöhnliche Lehmpyramide vor sich zu haben glauben. Die Aehnlichkeit der Umrissformen ist eine überraschende. Eigentümlicherweise rechnet De Marchi die Deckblöcke zu den notwendigen Requisiten der Pyramidenbildung, obwohl gerade die von ihm angeführten italienischen Belege sich dieser Angabe nicht unterordnen.

[2]) Lyell, Principles of Geology, 1. Band, London 1872, S. 329 ff.

Fig. 5.



Das Abrissgebiet des Bergsturzes von Goldau [1806].

um die richtige Bewertung der der Wasserwirkung bei der Gestaltung des Erdbildes zuzuteilenden Rolle unvergängliche Verdienste erworben hat, den Steineinschlüssen der verwitterten Masse, aus der sich die Erdpyramiden absondern, eine viel zu hohe Bedeutung bei. Es war Ratzel, der sich zuerst[1]) mit Entschiedenheit gegen diese Ueberschätzung erklärte und betonte, dass, wie er sich neuerdings ausdrückt, in jedem Felsblocke allerdings ein Element zugleich der Konzentration und des Schutzes gegeben sei,[2]) dass aber auch ohne diese doch recht oft fehlenden Zugaben die Bildung ihren ruhigen Verlauf nehmen könne. In der That ist ja der Südtiroler Typus nicht entfernt die Norm. Man könnte z. B. in unserem Falle sehr wohl fragen, weshalb dieser Typus so gar wenig ausgeprägt sei, da es doch an Blockeinschlüssen nicht mangelt.[3]) Weit wichtiger noch ist eine andere Frage, deren Wesen von Ratzel gleichfalls berührt wird, auf deren Tragweite aber noch mehr von Kittler[4]) aufmerksam gemacht wurde. Schon früher hatte sich der Verf. von der Notwendigkeit durchdringen lassen, dass, ehe das Regenwasser die Modellierung der einzelnen Protuberanzen in angriff nimmt, ihm die Zerklüftung der ganzen Masse bis zu einem gewissen Grade vorgearbeitet haben muss. In Kürze lässt sich das Prinzip, auf

[1]) Ratzel, Ueber die Entstehung der Erdpyramiden, Jahresber. d. Geogr. Gesellsch. zu München, 1884, S. 77 ff.

[2]) Es wird (Die Erde und das Leben, S. 556 ff.) daran erinnert, dass es an minder steil geböschten Abhängen auch liegende Erdpyramiden gibt, an denen der Beruf der Steinkrönung, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, sehr deutlich hervortrete. Unter allen Umständen begünstigen die Blöcke das Eindringen des Wassers in grössere Tiefe und damit auch die Abtrennung von der Hauptmasse.

[3]) Die Mehrzahl der Pyramiden besteht, wie oben bereits festgestellt ward, aus feinem Moränenlehm und kommt demnach ohnehin für Decksteine nicht in betracht. Einige freilich ragen auch über den Schotterhorizont empor, allein die Blöcke sind durchweg nicht gross und noch dazu sehr glatt vom Wassertransporte, so dass sie auch nicht besonders dazu geeignet waren, auf einer schmalen Unterlage dauernd liegen zu bleiben.

[4]) Kittler, a. a. O., S. 45.

welches es hauptsächlich ankommt, folgendermassen formulieren: Jene Detailarbeit, als deren Ergebnis die Herausbildung der einzelnen Erdpyramiden zu betrachten ist, beginnt erst dann energisch einzusetzen, wenn der Schutt-, Lehm- oder Lösskörper, der einstweilen noch als kompakt vorausgesetzt wird, irgendwie in langgestreckte Kämme von sehr geringer Breite zerfällt worden war. Ehe es soweit gekommen ist, entstehen Aushöhlungen, Regenrinnen und allenfalls embryonale, fast ganz mit der Hinterwand verwachsene Auszackungen, nicht aber selbständige Pyramiden und Obelisken.

Massgebend ist mithin für diese letztere eine lineare Anordnung. Da, wo die Anzahl der Einzelgebilde eine verwirrend grosse ist, scheint sich ja eine solche nicht nachweisen zu lassen, indem man zuerst blos ein Durcheinander wahllos neben einander gestellter Aufragungen wahrzunehmen glaubt. Richtet man aber das Augenmerk konsequent auf ein noch so kraus angeordnetes Aggregat, also gleich auf die berühmten Rittengebilde im Thale des oberen Finsterbaches, so findet man allgemach Reihen von schlanken Säulen heraus, die aus einer gemeinsamen Basismauer, dem Reste jenes früheren Kammes, förmlich herausgewachsen sind.[1]) Bei aufmerksamer Durchmusterung guter Abbildungen kann man feststellen, dass ein einzelnes Individuum stets eine Reihe anderer Individuen verdeckt. Auf diese Eigentümlichkeit muss besonderer Nachdruck gelegt werden; sie liefert den Schlüssel für das Verständnis der Bildungsgeschichte, und es würde nicht schwer halten, durch eingehende Prüfung einer grösseren Menge von bekannteren Vorkommnissen jenen Satz, der übrigens auch für sich selbst spricht, erfahrungsgemäss zu belegen.[2]) Die Art und

[1]) Weiter unterhalb, gegen Atzwang zu, gelingt die Beobachtung leichter, weil dort nur einzelne Reihen zierlicher, minder hoher Säulchen stehen, über deren jeweiligen Zusammenhang schon der blosse Anblick vergewissert.

[2]) Von alpinen Plätzen, die minder bekannt sind, seien besonders erwähnt Berghalden bei Bolladore im oberen Veltlin und bei dem

Weise, wie sich die Kämme bilden, braucht keine einheitliche zu sein. In dem uns beschäftigenden Falle hat gewiss der unten vorbeifliessende Gebirgsstrom mit seinen jähen Anschwellungen das Seinige dazu beigetragen, und es ist insofern ganz zutreffend,[1]) dass nicht nur die vertikal nach unten gerichtete Steilerosion, sondern auch Kräfte von entgegengesetzter Richtung mitgewirkt haben. So sind Pyramidennester, die den Lauf eines Flusses begleiten, sehr häufig auch Zeugen kräftiger Aktion der lateralen Erosion.[2]) Damit ist nun wohl die Frage nicht beantwortet, weshalb doch nicht immer dann, wenn eine locker gefügte Wand, die stetig bespült und unterwaschen wird, vorteilhafte Vorbedingungen darzubieten scheint, die Auflösung des Abhanges in ein Aggregat von Erdpfeilern erfolgt.[3]) Neben dem einen Faktor, der uns

---

Dörfchen Stilfs, zwischen Prad und Gomagoi. Namentlich bei diesen letztgenannten Pyramiden, die sich dem zum Stilfserjoche Hinanschreitenden vortrefflich von verschiedenen Seiten darstellen, zeigt sich recht augenfällig die Zusammengehörigkeit je einer aus der nämlichen Schuttmauer hervorgegangenen Serie. Ein gutes aussereuropäisches Beispiel liefern die südamerikanischen Erdsäulen, welche Mosbach (Streifzüge in den bolivianischen Anden, Globus, 72. Band, S. 26) abbildet, und die eine so reguläre Anordnung bekunden, als habe man es mit den Ruinen teilweise eingestürzter Portiken zu thun. Auch für die grossartigen Wälder von Erdpyramiden, die in dem kleinasiatischen Reisewerke von R. Oberhummer und H. Zimmerer (Durch Syrien und Kleinasien, Berlin 1899, S. 120 ff.) beschrieben und abgebildet sind, dürfte ein gleiches gelten.

[1]) Dass auch solche Kräfte in Thätigkeit treten können, bemerkte Pechuel-Loesche (Westafrikanische Laterite, Ausland, 57. Band, S. 401 ff.).

[2]) Wie kräftig die morphologische Leistung der seitlichen Ausnagung eines nicht ruhig, sondern häufig in wilden Paroxysmen dahinflutenden Wassers werden kann, beweist u. a. der Trümmerwall, der südlich von München auf eine ziemliche Entfernung hin das linksseitige Ufer der Isar begleitet. Er wurde einlässlich gewürdigt von Penck (Morphol. d. Erdoberfl., 1. Band, S. 225; Die Alpen im Eiszeitalter, S. 60). Die früher weiter nach Osten reichende Steilwand ist infolge der unablässigen Unterspülungen des Flusses grossenteils zusammengebrochen.

[3]) Dass dies durchaus nicht immer eintritt, ist bekannt genug. Man

hier am meisten beschäftigte, weil über ihn noch nicht genug Klarheit besteht, wirkt eben doch noch gar mancher anderer mit.[1])

Damit verlassen wir einen Gegenstand, der, so gering er auch quantitativ das „Antlitz der Erde" beeinflusst, trotzdem in seiner Art des morphologischen Interesses sicherlich nicht entbehrt. Gerade der Umstand, dass in nächster Nähe der Flanke CD (Fig. 1) sich die Flanke DE hinzieht, die einen durchaus verschiedenen Anblick gewährt, gibt uns den Anlass, auf die Probe das Exempel zu machen. Wie weiter oben dargelegt ward, ist die Beschaffenheit des Schotters nunmehr eine andere geworden; derselbe ist der Hauptsache nach ein weit festeres, breccienartiges Konglomerat, dessen einzelne Stücke oft eine ganz respektable Grösse erreichen. Erdpyramiden gibt es auch hier, aber nur spärlich, und ihr Aussehen ist ein anderes — wenn man so sagen will, minder elegantes. Da nicht anzunehmen ist, dass die Erosion und Denudation für DE irgendwie anders als für CD gewirkt haben könnten, und da auch sonst die Verhältnisse sich gar nicht von einander unterscheiden, so kann einzig und allein die stoffliche Nichtüber-

---

denke z. B. nur an die vorhin erwähnte Innleite bei Wasserburg. Dieselbe ist von Runsen und Regenrinnen, wohin man blickt, arg durchfurcht, und einzelne Erdschneiden, die keck vorspringen, sehen gerade so aus, als müsste sich aus ihnen in Bälde eine gezackte Kammlinie entwickeln. Allein trotz des ungeheuren Zeitraumes, der dafür zur Verfügung stand, ist es nicht geschehen. So sieht man auch im Ratzelschen Werke (S. 543) den Granit der Seychellen bedeckt mit einer Fülle karrenartiger Regenrisse, aber die Zerlegung des Gesteines in selbständig aufragende Pyramiden, wie (s. o.) beim Montblanc, ist ausgeblieben.

[1]) Einflussreiche Momente, von deren Ineinandergreifen die Pyramidenbildung abhängt, sind vor allem die jahreszeitliche Verteilung der Niederschläge, auf welche Kittler und De Marchi mit Recht grosses Gewicht legen, ferner die Bestrahlung und Exposition der Schuttmasse, deren Färbung und petrographisch-geognostische Zusammensetzung. Diese ist dann wieder bestimmend für die chemische Konstitution der der Wasserwirkung ausgesetzten Materie; erstere sollte nach Philippson (Besprechung der Kittler'schen Schrift, Geogr. Zeitschr., 3. Band, S. 650) auch nicht ausser acht gelassen werden.

einstimmung beider Abhänge die Schuld an ihrem gegenwärtigen, ungleichartigen Ansehen tragen. Längs DE war die Konsistenz des Materiales eine weitaus stärkere, und es kam wohl zur Höhlenbildung in grossem Umfange, nicht aber zur Auswaschung und Fortspülung ganzer Gebirgsglieder. Jene Höhlen entstanden aber nicht da und dort nach einer launenhaften Willkür der Natur, sondern auch sie fügen sich einer gewissen Norm, wie man dies eben bei den geologischen Orgeln (s. o.) gewohnt ist.

Mit diesen Namen — auch Erdorgeln, Erdpfeifen, Naturbrunnen sind geläufige Bezeichnungen — belegt die terrestrische Morphologie seit Brongniart[1]) und Matthieu[2]) schmale Vertiefungen,[3]) die sich angenähert lotrecht durch eine selber steil abfallende Gesteinswand hindurchziehen und dieser letzteren das Aussehen einer Kannelierung aufprägen. Sehr häufig wird ein solcher hohler Halbzylinder durch einen Lettenzapfen ganz oder teilweise ausgefüllt, der sich aus dem Hangenden herabsenkte. In unserem Falle ist eine solche Lehmdecke nicht oder nicht mehr vorhanden, und infolge dessen fehlen auch die Lehmeinschlüsse. Im übrigen ähneln unsere Orgeln wesentlich denjenigen, die man aus der Umgegend Münchens kennt,[4]) obwohl es kaum statthaft wäre, ihr Vorhandensein zu einem Zeugnis für den glazialen Charakter der Ablagerungen, in denen sie sich zeigen, stempeln zu wollen. Denn darin hat

---

1) Brongniart, Essai sur la géographie minéralogique des environs de Paris, Paris 1811, S. 87 ff.

2) Matthieu, Note sur les orgues géologiques, Journal des Mines, 1813, S. 197 ff.

3) Das Wort „schmal" ist hier cum grano salis zu nehmen; es treten einfach gegenüber der namhaften Höhendimension die beiden anderen Abmessungen sehr zurück.

4) v. Ammon, Die Gegend von München, geologisch geschildert, München 1894, S. 116 ff.; Penck-Brückner, a. a. O., S. 60 ff. Die Höhe der Orgeln des sogenannten Dieffenbach-Steinbruches erreicht nach Penck 5—6 Meter. Die Wahrnehmung, „dass die hangende Nagelfluh sich in die breitesten Schlöte zapfenförmig wenige Dezimeter weit hinein erstreckt," lässt sich auch in unserem Falle machen.

Prestwich[1]) unbedingt recht, dass die Tagewasser in jeder nicht sehr widerstandsfähigen — oder besser, verschiedene Grade von Widerstandsfähigkeit aufweisenden — Gesteinsmasse solche Spuren ihres Eindringens zurücklassen können. Ob hier, am nordwestlichen Plateauabfalle des Ochsenbichls, wirklich blos die Niederschläge gewirkt haben, möchte allerdings in Zweifel zu ziehen sein. Wenn, wie wir glauben, die Zerstörungsarbeit, welche der Eisack weiter abwärts leistete, indem er die Schotter teilweise denudierte, ziemlich deutlich in die Erscheinung tritt, so wird man ihm auch bei der Ausführung jener vertikalen Hohlkehlen von DE eine gewisse Mitwirkung zuzuschreiben geneigt sein. Alles in allem: Die Orgeln sind wahrscheinlich durch eine kombinierte Wirkung der Erosion des atmosphärischen Wassers und der lateralen Erosion des strömenden Wassers ausgehöhlt worden. An eine Auswirbelung, wie etwa in manchen nordischen Kalk- und Gipsgebieten, zu denken, verbietet die Struktur der Röhren, da bei Evorsionsaushöhlungen eine ziemlich rasch von oben nach unten fortschreitende Verjüngung des Hohlraumes zu konstatieren ist.

Unsere Darlegung dürfte gezeigt haben, dass auf einer kleinen Strecke am mittleren Eisack, in unmittelbarster Nähe des Schienenweges und zweier belebter Landstrassen, ein weltabgeschiedenes Thal Gebilde birgt, deren Studium in verschiedenen Beziehungen die physikalische Geographie zu befruchten geeignet ist. Die Frage der Glazialablagerungen unter verschiedenen äusseren Bedingungen, und damit auch die Frage einer mehrfach sich wiederholenden Eiszeit steht an der Spitze; es folgt eine ganze Reihe von Erosions- und Denudationsphänomenen, die zusammenwirkten, um diesem merkwürdigen Fleckchen Erde den eigenartigen Charakter zu verleihen, der ihn auszeichnet. Selbst mitten in einem Gebiete, das seit Jahrzehnten eifriger Durchforschung unterzogen worden ist, hat

---

[1]) Prestwich, On the Origin of the Sand- and Gravel-Pipes, Quarterly Journal of the Geological Society, 11. Band, S. 64 ff.

sich oft hie und da ein kleiner Bezirk der näheren Kenntnisnahme entzogen; ein Beweis dafür, dass die Gelegenheit zu lohnenden Studien nicht blos beim Bereisen entlegener Länder, sondern auch noch im Bereiche der Heimatgrenzen dem danach Suchenden sich reichlich genug eröffnet.[1])

---

[1]) Nachträglich wurde dem Verf. noch eine Bemerkung bekannt, die sich an einem Orte befindet, an dem man sie nicht suchen würde, die aber auffallend richtig, direkt aus der Beobachtung heraus, das Hauptmoment betont, auf welches es bei der Entstehung der Erdpyramiden ankommt. Wir meinen einen touristischen Aufsatz von A. Ludwig (Drei Wochen im Clubgebiet, Jahrb. d. Schweizer Alpenclubs, 27. Jahrgang, S. 16 ff.). „Diese Griestürme kann man immer da antreffen, wo sich zwischen zwei benachbarten Rutschgebieten eine schmale Mittelwand vorfindet. Dieselbe ist vielleicht zuerst fast horizontal oder schwach geneigt; durch Ursachen verschiedener Art, z. B. durch Bildung kleiner Seitenrinnen, wird der stehen gebliebene Mittelgrat geschartet; der Einschnitt wird immer grösser und tiefer, bis der Turm isoliert dasteht.“ Diese in den Bergen des Prätigaus gemachte Wahrnehmung gestattet die weitest gehende Generalisierung.

Ueber die Abstammung der bluthaltigen Gefäss-anlagen beim Huhn und über die Entstehung des Randsinus beim Huhn und bei Torpedo.

Von **J. Rückert.**

(*Eingelaufen 29. Januar.*)

(Mit Tafel VIII.)

Bei der Bearbeitung der ersten Entwicklung des Gefässsystems, die ich mit Herrn Kollegen Mollier für das neue Handbuch der Entwicklungsgeschichte von O. Hertwig ausführe, habe ich unter Anderem auch über die Gefäss- und Blutbildung in der Area vasculosa des Hühnchens eigene Untersuchungen angestellt, von denen ich hier Einiges mittheilen will. Was zunächst die viel ventilirte Frage nach der Abstammung dieser Anlagen anlangt, so bin ich trotz der augenscheinlichen, später zu besprechenden Beziehungen, welche dieselben mit dem unterliegenden Entoblast eingehen, zu der schon von Remak und Kölliker vertretenen Ansicht gelangt, dass ihr Zellenmaterial aus dem mittleren Keimblatt stammt. Diese Abkunft ist leichter an jenen zellenreichen Gefässanlagen festzustellen, welche ausser der Gefässwand zugleich Blutzellen liefern und von den neueren Autoren deshalb gewöhnlich „Blutinseln" genannt werden. Ich bezeichne sie, da dieser Name historisch nicht gerechtfertigt ist, im Folgenden als „Gefässanschwellungen". Sie sind bekanntlich vornehmlich in der hinteren Hälfte der Gefässzone entwickelt, besonders stark in derem Randtheil, und nehmen nach vorne an Stärke und Zahl ab, so dass sie im vorderen Abschnitt der Area gegen-

über den zellenarmen Anlagen der blutleeren Gefässe ganz in den Hintergrund treten. Von diesen Gefässanschwellungen lassen sich wiederum diejenigen am besten genetisch verfolgen, welche im hintersten Theil der Area vasculosa, also in der Umgebung des caudalen Primitivstreifenendes liegen, denn man findet sie hier vielfach ganz im Innern des daselbst dickeren und mehrschichtigeren Mesoblast eingeschlossen. In ihrem Bau unterscheiden sie sich vor allem durch die sehr dichte, lückenlose Aneinanderfügung ihrer Zellen von dem umgebenden lockerer und eher mesenchymatös gebauten Mesoblast.

Indess lässt ihr Vorkommen im Innern des Mesoblast noch keinen Schluss auf ihre Abstammung von diesem Keimblatt zu, wenigstens werden die Anhänger der rein entoblastischen Abstammung der Gefässe den Einwand machen, dass sich die Anschwellungen vom Keimwall abgelöst haben und nachträglich in das Mittelblatt eingedrungen seien. Deshalb möchte ich auf die geschilderte Lage der Anschwellungen an sich weniger Werth legen als vielmehr auf den Umstand, dass man auch die Vorstufen derselben im Mesoblast findet in Form von geringgradiger verdichteten Stellen. Ein Theil dieser Zellengruppen steht hinsichtlich seines Gefüges dem umgebenden Mesoblast so nahe, dass man schwankt, ob man sie überhaupt als besondere Bildungen innerhalb dieses Blattes betrachten soll, andere wieder nähern sich in ihrer Struktur den charakteristischen Anschwellungen soweit, dass man sie unbedenklich als Vorläufer derselben bezeichnen wird. Die geschilderten Gefässanlagen sind im Bereich des das Primitivstreifenende umgebenden Mesoblastes im Allgemeinen derartig vertheilt, dass die Anfangsstadien derselben weiter nach innen gegen den Primitivstreifen zu liegen, sich also in einem Mesoblastmaterial befinden, das seinem Ursprung aus dem Primitivstreifen nach als jüngeres bezeichnet werden darf.

Auch die Flächenbilder gut gefärbter Keimscheiben lassen ein bisher nicht beachtetes Verhalten erkennen, welches auf die Abstammung der caudalen Gefässanlagen aus dem hinteren Ende des Primitivstreifens hinweist. Von der Zeit ab, in

welcher die ersten Gefässanschwellungen im Flächenbild sichtbar werden, als färbbare Streifen und Flecken im Caudaltheil der Area opaca, bemerkt man, dass schwächer gefärbte Stränge von dem verbreiterten Primitivstreifenende durch den Caudaltheil der Area pellucida zu ihnen hin verlaufen. An den einzelnen Keimscheiben ist dies Verhalten ein sehr wechselndes: manchmal kaum kenntlich sind diese Züge an anderen Keimscheiben wieder so deutlich, dass es den Anschein gewinnt, als ob die Gefässanlagen aus dem hinteren Ende des Primitivstreifen hervorsprossten. Das Letztere finde ich namentlich dann, wenn in den betreffenden Stadien der Primitivstreif caudal in die Area opaca hineinragt, eine Anordnung, die ab und zu angetroffen wird. Fig. 1 der beigegebenen Tafel zeigt dies Verhalten an einer Keimscheibe, in welcher schon die Medullarplatten des Kopfes sichtbar sind und die Gefässanschwellungen in der hinteren Hälfte der Area opaca bereits sehr deutlich im Flächenbild hervortreten.

An manchen Keimscheiben zieht sich das verbreiterte Caudalende des Primitivstreifens zu einer Platte von Sichelform aus. Schon Kupffer hat diese „Sichel" am Blastoderm des Huhns und namentlich des Sperlings beobachtet und sie mit der von ihm entdeckten Reptiliensichel homologisirt. Wie von einem solchen sichelförmigen Felde aus die Mesoblaststränge zu dem Gefässnetz der Area opaca hinziehen, zeigt Fig. 2 von einem noch etwas älteren Blastoderm mit bereits abgegrenztem ersten Urwirbelpaar. Die Peripherie der dreieckigen Platte ist hier völlig in jene Züge aufgelöst, daher denn auch ihre Sichelform nicht ganz so scharf hervortritt, wie an einzelnen anderen Keimscheiben.

Das besprochene Verhalten ermöglicht vielleicht einen Anschluss an die Blutbildung bei Reptilien. Bekanntlich leitet Mehnert[1]) die Gefässe der Area vasculosa bei Emys lut.

---

[1]) Mehnert, Ueber Ursprung und Entwicklung des Hämovasalgewebes (Gefässhofsichel) bei Emys lutaria taurica und Struthio camelus. Morphol. Arbeiten VI.

taurica von der Sichel ab, die nach seiner Schilderung bei diesem Objekt zu einem ausgedehnten, die Embryonalanlage weit nach vorn zu umfassenden Wulste anschwillt und sich sodann in das Gefässnetz der Area vasculosa umbildet. Er homologisirt diese „Sichel" geradezu mit der gesammten ebenfalls sichelförmigen Area vasculosa des Vogels. Ich war nicht in der Lage, die Gefässbildung der Schildkröte selbst zu untersuchen und kann daher zu dieser Angabe des leider kürzlich verstorbenen Forschers nur schwer Stellung nehmen. Es will mir aber fast scheinen, als ob seine Sichel auf dem Höhestadium ihrer Entwicklung (l. c. Taf. I Fig. 4) gegenüber den sonst bekannten Reptiliensicheln auffallend gross und weit nach vorn reichend sei. Aber auch wenn sich bei Nachuntersuchung herausstellen sollte, dass dieser Wulst nicht mehr als Sichel im Sinne Kupffers bezeichnet werden darf, sondern dass nur jene jüngere Anlage, wie sie in Fig. 2 l. c. abgebildet ist, diesen Namen verdient, so wäre doch damit Mehnert's Grundanschauung von der gefässbildenden Eigenschaft der Reptiliensichel nicht erschüttert, denn es ist nach seiner Darstellung doch zum mindesten wahrscheinlich, dass die Kupffersche Sichel Material für die Gefässe der Area vasculosa liefert. Die von mir beim Huhn gemachten Beobachtungen würden zu dieser Auffassung sehr gut stimmen.

Die von dem verdickten Caudalende des Primitivstreifens ausgehenden Mesoblaststränge der Hühnerkeimscheibe sind noch in verhältnissmässig späten Stadien, bei 15 und 20 Urwirbeln, sichtbar in Form von intensiver färbbaren und schärfer umschriebenen Streifen, die sich nun als ausgebildete Gefässanlagen des hintersten Abschnittes der Area pellucida erweisen.

Die angeführten Beobachtungen weisen darauf hin, dass zur Zeit der Ausbreitung der Gefässanschwellungen in der Area opaca aus dem caudalen verbreiterten Ende des Primitivstreifens Mesoblastzüge sich ablösen oder hervorsprossen, die in radiärer Richtung den hinteren Theil der Area pellucida durchsetzend in die Area opaca gelangen und sich daselbst in Gefässanschwellungen umwandeln. Reste dieser Stränge bleiben

in der Nähe ihres Mutterbodens, nämlich im caudalen Abschnitt der Area pellucida erhalten und bilden sich hier in loco zu Gefässen um.

Wie gross der Antheil ist, welchen das Hinterende des Primitivstreifens an der Entstehung der Gesammtheit der bluthaltigen Gefässe, gegenüber etwaigen vom übrigen Primitivstreifen abstammenden Gefässanlagen, nimmt, entzieht sich vorerst der Abschätzung. Aber es spricht Manches dafür, dass es ein zum Mindesten nicht unerheblicher Bruchtheil ist. So mag hier daran erinnert werden, dass die Blutanlagen gerade in jenem Abschnitt der Gefässzone, welcher das hintere Primitivstreifenende umgiebt, zur mächtigsten Entwicklung gelangen, während sie von da in der Richtung nach vorn zu allmählich an Stärke abnehmen. Ferner, dass sie zeitlich im hinteren Abschnitt der Gefässzone zuerst auftreten, um von da nach vorn zu sich auszubreiten. Auch soll hier auf die schon von früheren Forschern hervorgehobene Thatsache hingewiesen werden, dass in späteren Stadien, wenn die Gefässe der Area vasculosa schon längst gehöhlt sind, nur ein in der Umgebung des Primitivstreifenendes gelegener Theil derselben hiervon eine Ausnahme macht. An den injicirten Keimscheiben des schönen Popoff'schen[1]) Atlas (l. c. Fig. 1—3 und Fig. 5) sind diese undurchgängig gebliebenen Züge des Gefässnetzes gut zu übersehen. Sie stellen, wie sich auch an jedem uninjicirten Blastoderm leicht ermitteln lässt, solide d. h. in der Entwicklung zurückgebliebene Gefässanlagen dar. Man könnte diese Thatsache zunächst damit zu erklären versuchen, dass man sagt: die Anschwellungen differenziren sich in der Umgebung des hinteren Primitivstreifenendes nur deshalb später, weil sie daselbst zellenreicher sind als sonstwo. Kann man sich doch bei Untersuchung der Gefässentwicklung allerorts davon überzeugen, dass zellenarme Anlagen sich schneller höhlen als zellenreichere. Die wenigste Zeit erfordert der Vorgang bei den blutleeren, die längste im

---

[1]) Popoff, Die Dottersackgefässe des Huhnes. Wiesbaden 1894.

Allgemeinen bei jenen bluthaltigen Gefässen, welche grosse Mengen von Blutzellen enthalten. Aber diese Erklärung reicht für die angeführte Beobachtung nicht aus, denn jene Stränge des Hinterendes der Gefässzone, welche notorisch am längsten solid bleiben, sind gar nicht die mächtigsten. Die stärksten Anlagen befinden sich, ebenso wie weiter vorn, so auch im Caudaltheil der Area vasculosa stets mehr an derem peripheren Rand dicht neben der Randvenenanlage. Die von Popoff abgebildeten undurchgängigen Gefässanlagen hingegen liegen hauptsächlich im inneren Theil der Area, gegen ihre Ursprungsstätte, den Primitivstreifen, zu und stellen dementsprechend auch verhältnissmässig dünne Stränge und Zellen vor. Es ist daher anzunehmen, dass sie deshalb eine solide Beschaffenheit zeigen, weil sie später aus dem Mesoblast sich herausdifferenzirt haben. So führt uns auch diese Beobachtung zu der Anschauung, dass der hintere Theil des Primitivstreifens ein Proliferationsgebiet für Blutanlagen darstellt, und dass seine produktive Thätigkeit noch andauert, nachdem solche Anlagen in der Area vasculosa schon erschienen sind.

Eine Entscheidung darüber, ob der Caudaltheil des Primitivstreifens als Bildungsstätte für den grösseren Theil, wie ich vermuthen möchte, oder eventuell sogar für die Gesammtheit der Blutanlagen der Area opaca, dem übrigen Primitivstreifen gegenüber eine Sonderstellung einnimmt, können nur Experimente liefern, wie solche namentlich von Kopsch[1]) in neuerer Zeit mit Erfolg angestellt worden sind. Ich habe hierbei speciell den Versuch im Auge, bei welchem an einer 12 Stunden alten Keimscheibe ein vom hinteren Ende des Primitivstreifens ausgehender sichelförmiger Streif[2]) auf der linken Seite durch Ansetzen der

---

[1]) Kopsch, Experimentelle Untersuchungen am Primitivstreifen des Hühnchens und an Scyllium-Embryonen. Verh. der Anat. Ges. Kiel 1889. Derselbe, Ueber die Bedeutung des Primitivstreifens beim Hühnerembryo. Leipzig 1902.

[2]) Diese Sichel, die nach den Abbildungen von Kopsch an der Grenze der Area opaca zu liegen scheint, stimmt am meisten mit dem von Koller dargestellten Gebilde überein. Ich bin ihr an den von mir

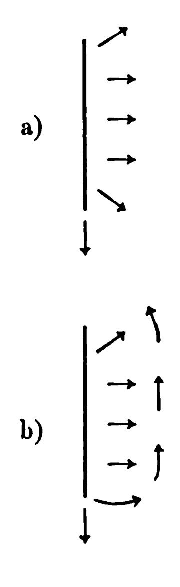
Elektrode in seiner Entwicklung gehemmt wurde. Das Resultat war bei Abtödtung der 60 Stunden alten Keimscheibe: keine wesentliche Schädigung des Embryo, aber Fehlen des linken Stammes der Dottersackarterie und Einziehung des hinteren Abschnittes des Gefässhofes gegen die Operationsstelle hin, durch welch' letztere die Vena terminalis unterbrochen ist. Die Operation lehrt, wie Kopsch hervorhebt, dass die Sichel bei Embryonen von 12 Stunden keine Anlagen für den Embryo, sondern ausschliesslich solche für den Gefässhof enthält. Speciell müsse der Vorderrand derselben die Anlage der Dottersackarterie, ihr Hinterrand eine Strecke der Randvene enthalten. Das sind nun beide blutleer sich anlegende Gefässe (vergl. über die Randvene weiter unten). Wie sich aber die Blutanlagen verhalten, ob sie in der linken Hälfte der Area vasculosa ganz ausgefallen sind, oder ob dies nur im hinteren Theil derselben der Fall war oder ob sie daselbst vielleicht nur schwächer entwickelt waren, ist nicht angegeben, offenbar deshalb nicht, weil in dem Stadium von 60 Stunden das Blut schon verflüssigt und in Circulation war, wenn anders der Embryo in dieser Hinsicht normal entwickelt gewesen.

Drei weitere Embryonen, die auf etwas älterer Entwicklungsstufe nämlich mit 24 und $16^1/_2$ Stunden am hinteren Ende des Primitivstreifens von Kopsch operirt worden sind, wurden nach 48 und 40 Stunden konservirt also in einem Stadium, in welchem noch „Blutinseln“ vorhanden waren. Der Gefässhof ist nach der Angabe von Kopsch bei zweien derselben (Embryo IV und VI) dem Stadium des Embryos entsprechend ausgebildet, bei dem 3ten (Embryo V) in der Ausbreitung „etwas“ zurückgeblieben. Die in Fig. 14 l. c. abgebildeten Blutanlagen dieses Gefässhofes scheinen mir für das Stadium schwach und wenig weit nach vorne reichend. Im Ganzen sind aber,

---

untersuchten jungen Stadien bis jetzt nicht begegnet und weiss daher nicht, in welcher Beziehung sie zu der von mir in etwas älteren Keimscheiben gesehenen, oft sichelförmigen Verbreiterung des Primitivstreifenendes steht, ob sie eine jüngere Entwicklungsstufe der letzteren ist oder nicht.

namentlich mit Rücksicht auf die Embryonen IV und VI die Ergebnisse nicht gerade der Annahme günstig, dass das Caudalende des Primitivstreifens von der 16ten Stunde ab noch bemerkenswerthes Material an die Blutanlagen abgiebt. Indessen darf man nicht ausser Acht lassen, dass die betreffende Stelle des Primitivstreifens durch den operativen Eingriff, bei welchem es in erster Linie darauf ankam, brauchbare Marken am Blastoderm zu setzen, nicht völlig zerstört worden ist, wie die Figuren 13, 14 und 16 l. c. beweisen. Um Missverständnissen vorzubeugen, hebe ich ausdrücklich hervor, dass ich damit nicht die interessanten Experimente und die wie mir scheint sehr werthvolle Methode von Kopsch, deren genauere Beschreibung er in Aussicht gestellt hat, bemängeln will. Die Versuche sind ja zu einem ganz anderen Zweck ausgeführt worden, als dem, der Quelle der Blutanlagen nachzugehen. Es wäre aber vielleicht lohnend, Experimente eigens in dieser Richtung anzustellen. Diese müssten selbstverständlich von der Entwicklung und Ausbreitungsweise des extraembryonalen Mesoblast ausgehen. In letzterer Hinsicht sind 2 Hauptmöglichkeiten gegeben: entweder wächst dieser Theil des Mittelblattes von der ganzen Länge des Primitivstreifen aus einheitlich in seitlicher Richtung bis zum Rande der späteren Area vasculosa hin (vergl. beistehendes Schema a.) und liefert mit seinem medialen Abschnitt die Gefässe der Area pellucida mit seinem lateralen diejenigen der Area opaca, also auch die Blutanlagen oder ein solcher flügelförmig nach der Seite hin sich ausbreitender Mesoblast trifft, indem er die Area pellucida durchsetzt und ihr, eventuell auch noch der Area opaca, leere Gefässe liefert, peripher mit einem vom Caudalabschnitt des Primitivstreifens in der Area opaca nach vorne gehenden Zug zusammen, welcher (eventuell neben Anlagen leerer Gefässe) das gesammte Material für die bluthaltigen Gefässe der Area opaca führt. (S. Schema b.)



Die von mir an den beschriebenen älteren und an einigen jüngeren Hühnerkeimscheiben gemachten Beobachtungen sprechen eher zu Gunsten der letzteren Auffassung.

Wenn ich im Vorstehenden die mesoblastische Abkunft der Gefässanschwellungen vertreten habe, kann ich deshalb doch van der Stricht,[1]) dessen Standpunkt der gleiche ist, nicht zustimmen, wenn er sagt (l. c. p. 212) „ces ilôts sont toujours nettement distincts du rempart vitellin sous-jacent". Ich finde im Gegentheil die Gefässanlagen in der Area opaca oft dem Keimwall innig anliegend, sich in ihn einsenkend und förmlich einbohrend, so dass man stellenweise nicht im Stande ist, eine scharfe Grenze zwischen ihren Zellen und denen des Keimwalls zu ziehen. Solche Gefässanlagen machen den Eindruck, als ob sie zum Keimwall gehörten. Aber andererseits habe ich beim Hühnchen doch nie Bilder gesehen, welche in unzweideutiger Weise eine Entstehung von Blutzellen aus dem Keimwall zeigen. Ich kann daher nicht behaupten, dass beim Huhn das mesoblastische Blutmaterial sich auf dem Dotter durch Hinzutreten entoblastischer Elemente ergänze, wie ich[2]) dies früher für Selachier angegeben. Trotzdem kann ich jene vorübergehende Verbindung weder für ein Artefakt noch für etwas Zufälliges halten, um so weniger als sie sich in noch ausgesprochenerer Weise bei den Selachiern findet. Ich darf hier mittheilen, dass sie nach den Untersuchungen von Herrn Kollegen Mollier auch bei den Amphibien vorhanden ist. Sie stellt also auch mit Rücksicht auf ihr verbreitetes Vorkommen eine auffallende Erscheinung dar, über die man nicht ohne Weiteres hinweggehen kann. Kann sie nicht durch die

---

[1]) van der Stricht, Nouvelles recherches sur la génèse des globules rouges et des globules blancs du sang. Arch. de Biologie T. XII, 1892.

[2]) Rückert, Ueber die Anlage des mittleren Keimblattes und die erste Blutbildung bei Torpedo. Anat. Anz. II, 1887.

Annahme einer Neubildung von Blut- und Gefässzellen aus dem Entoblast erklärt werden, so muss man nach einer anderen Deutung suchen. So möchte ich denn die Vermuthung aussprechen, dass sie vielleicht der Ausdruck ist für die Einverleibung einer Eisenverbindung in die Blutzellen aus dem Dotter. Diese Annahme liegt nahe, nachdem Smiechowsky[1]) durch microchemische Untersuchung gezeigt hat, dass das gesammte eisenhaltige Material des weissen Dotters beim Huhn in den „Megasphären" enthalten ist und von da in die Blutkörper gelangt. Von dem Zeitpunkt an, in welchem die Eisenreaktion in den Blutzellen deutlich wird (Stadium mit 12 Urwirbeln), nimmt sie in den Megasphären bedeutend an Intensität ab. Auf welchem Wege die Uebertragung geschieht, konnte der Autor nicht feststellen. Er tritt aber auf Grund seiner Beobachtungen der Ansicht bei, dass die Megasphären von den Entoblastzellen aufgenommen werden und denkt auch an eine Vermittlung der Endothelzellen.

Zum Schluss soll noch die Entstehung des Randgefässes der Area vasculosa besprochen werden. Die herrschende Ansicht, dass dieses Gefäss aus den peripheren Blutanlagen durch Confluiren derselben sich bilde, ist nicht richtig. Schon der Umstand, dass ein Sinus terminalis auch im vordersten Theil des Blastoderms auftritt, wo die Blutanlagen sehr spärlich sind und auf ausgedehnten Strecken des Randes ganz fehlen, weist auf einen anderen Entstehungsmodus hin. Die Untersuchung ergiebt denn auch, dass der Sinus peripher von den randständigen grossen Blutanlagen sich anlegt und zwar nach dem Typus der blutleeren Gefässe, wie solche bekanntlich innerhalb des Embryo und ausserhalb desselben in der Area pellucida sich bilden. Auch in der Area opaca treten sie wie bekannt neben den blutleeren Gefässen auf, besonders in einer

[1]) Smiechowsky, Ueber die Bedeutung der Megasphären in der Keimscheibe des Hühnchens. Anat. Hefte 1892.

inneren gegen die A. pellucida zu gelegenen Zone, die nach vorn zu an Ausdehnung zunimmt in dem Masse, dass im vordersten Theil der Area die Blutanlagen fast gänzlich durch die der leeren Gefässe ersetzt werden. Nach Art dieser leeren Endothelröhren entsteht der Randsinus, nämlich aus einer dünnen, verhältnissmässig spät erscheinenden Zellschicht, die peripher von der jeweilig randständigen Blutanlage sich befindet. Wie die Gefässanlagen der Area vasculosa in ihrer Gesammtheit, seien sie bluthaltig oder leer, untereinander in Zusammenhang stehen, so ist auch die erste noch nicht gehöhlte Anlage des Randgefässes mit dem übrigen Netz verbunden. Im vordersten Theil der Area hängt sie vielfach mit den leeren Gefässen des Netzes zusammen, weiter hinten ausschliesslich mit den grossen bluthaltigen Anlagen. Bei der Eröffnung zum Rohr zeigt sie sich zusammengesetzt aus einer Reihe hintereinander gelegener Abtheilungen, die unter sich zusammenhängen und schliesslich völlig confluiren. Diese Hohlräume communiciren mit den inzwischen ebenfalls eröffneten Räumen des übrigen Gefässnetzes, im grösseren hinteren Theil der Area opaca also ausschliesslich mit den eröffneten bluthaltigen Gefässen. Die in letzteren befindlichen Haufen von Blutzellen, die unter sich und mit bestimmten Stellen der Gefässwand noch zusammenhängen — es sind das die echten Blutinseln der älteren Autoren — ragen nun frei gegen das Innere des Randgefässes vor, und ihre sich ablösenden Zellen gelangen in dieses hinein. Das Gefäss stellt jetzt das Sammelrohr für das verflüssigte Blut dar.

Bei Torpedo bildet sich der Randsinus noch weiter peripher von den bluthaltigen Anlagen und ebenfalls als leeres Gefäss. Seine erste Anlage erscheint sehr frühzeitig und zwar dann dicht neben der Gefässanschwellung in Gestalt von anfänglich sehr seichten Gruben, die am Rand der Keimscheibe durch Einsenkung des Dotters nebst des ihn überkleidenden Dotterentoblastes sich bilden und vom peripheren an dieser Stelle oft unterbrochenem Mesoblast überspannt werden. Später mit dem Auswachsen des Randes rücken diese Randgruben

von der Blutanlage mehr ab und werden tiefer. Man erkennt sie dann stets deutlich auch im Oberflächenbild, wo sie das Ansehen von runden durchscheinenden Vacuolen haben. H. Virchow hat sie eingehend geschildert, kann sich aber nicht zu der Annahme entschliessen, dass sie Vorstufen von Gefässen seien. Sie sehen in der That auch gar nicht wie solche aus, und habe ich lange Zeit gebraucht, bis ich mich davon überzeugt habe, dass sie wirklich durch Confluiren den Randsinus, der bei seinem ersten Auftreten, den Vacuolen entsprechend, stark wellig gebuchtet ist, bilden. Der Randsinus von Torpedo ist also anfänglich ein wandungsloser d. h. nicht mit Endothelzellen ausgekleideter Raum und erhält seinen endothelialen Zellenbelag erst spät und ganz allmählich durch vereinzelte, sehr lang ausgezogene Gefässzellen. Er steht aber in dieser Hinsicht nicht isolirt, denn ein Theil der übrigen blutleeren Gefässe des Torpedo blastoderms ist ebenfalls in Form von wandungslosen Dellen und Rinnen vorgebildet,[1]) deren Auskleidung zur Zeit der auftretenden Endothelröhren aber rascher vor sich geht als beim Randsinus. Der Unterschied ist dadurch bedingt, dass in diese letzteren Einsenkungen die Gefässzellen meist mehr in gruppenweiser Anordnung gelangen. Sie wandeln sich hier in Endothelröhren um, die, sich rasch ausdehnend, die Wand des Raumes austapeziren. Auch diese weiter innen gelegenen Einsenkungen sieht man im Oberflächenbild.[2]) Der geschilderte primitive wandungslose Zustand bei einem Theil der Dottergefässe von Torpedo stimmt gut zu den bekannten Angaben, welche über das Verhalten der ersten Gefässräume auf dem Dotter der Knochenfische vorliegen.

---

[1]) H. Virchow, Ueber Blutinseln und Gefässbezirk von Torpedo ocellata. Sitzber. d. Ges. naturf. Freunde zu Berlin. 1898.

[2]) Vergl. auch hierüber H. Virchow l. c. und die von ihm citirte Schrift Kollmann's „Gemeinsame Entwicklungsbahnen der Wirbelthiere". Gedenkschrift zur Eröffnung des Vesalianum, Leipzig 1885.

Namen-Register.

Sach-Register.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1902.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

University of Aberdeen:

Studies. No. 4. 5. 1901. 4⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions and Proceedings. Vol. 25, part 2. 1901. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Vol. 146. 147. 8⁰.
Monumenta spectantia historiam Slavorum merid. Vol. XXX. 1. 1901. 8⁰.
Ant. Radić, Zbornik za narodni život. Bd. VI, 2. 1901. 8⁰.
Milivoj Šrepel, Grata za povjest Književnosti hrvatske. Bd. 3. 1901. 8⁰.
P. Budmani, Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Heft 21. 1901. 4⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. 4, Heft 1—3. 1902. 4⁰.

Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen. Bd. 1. Ergänzungsheft. 1901. 8⁰.

Expédition antarctique belge in Antwerpen:

Note rel. aux rapports scientifiques publiés aux frais du gouvernement belge sous la Direction de la Commission de la Belgica. 1902. 4⁰.
Résultats du Voyage du S. Y. Belgica en 1897—99. (10 Hefte). 1901—02. 4⁰.

Observatoire national d'Athènes:

Annales. Tom. 3. 1901. 4⁰.

Redaktion der Zeitschrift „Athena“:

Athena. Tom. 14, fasc. 1—3. 1902. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Studies in historical and political Science. Ser. XIX, No. 10—12; Ser. XX, No. 1. 1901—02. 8°.
Circulars. Vol. 21, No. 155—158. 1902. 4°.
American Journal of Mathematics. Vol. 24, No. 1. 1902. 4°.
The American Journal of Philology. Vol. 22, No. 2. 3. 1901. 8°.
American Chemical Journal. Vol. 26, No. 4—6; Vol. 27, No. 1—3. 1901/02. 8°.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XII, No. 129; Vol. XIII, 130—133, 135. 1901/02. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XIII, 2. 3. XIV, und Index zu Bd. 6—12. 1901/02. 8°.
Fr. Burckhardt, Zur Erinnerung an Tycho Brahe. 1546—1601. 1901. 8°.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Bd. 1, Heft 2. 1902. 8°.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 44, afl. 5 en 6. 1901. Deel 45, afl. 1. 1902. 8°.
Notulen. Deel 39, afl. 2. 3. 1901. 8°.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 63. 64. 1901—02. 8°.
Godischniak. XIV. 1900. 1901. 8°.
Sbornik. Bd. I. 1902. 8.

Museum in Bergen (Norwegen):

An Account of the Crustacea. Vol. IV, part 5. 6. 1902. 4°.
Aarbog für 1901. 1902. 8°.
Aarsberetning for 1901. 1902. 8°.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1901.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Abhandlungen aus dem Jahre 1901. 1901. 4°.
Sitzungsberichte. 1901 No. 39—53; 1902 No. 1—22. 8°.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXVII. 1902. 8°.
Corpus inscriptionum graecarum Peloponnesi et insularum vicinarum. Vol. I. 1902. fol.
Corpus Inscriptionum Orientis. Supplementum. Pars posterior. 1902. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. N. F. Heft 31 mit Atlas. 1900. Heft 35. 36. 1901. 4°.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Bericht über die Thätigkeit des Centralbureaus i. J. 1901. 1902. 4°.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 34. Jahrg., No. 18 und 35. Jahrg., No. 1—12. 1902. 8°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 53, Heft 4. 1902. 8°.
E. Koken, Die deutsche geologische Gesellschaft 1848—1898. 1901. 8°.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. 32. 1902. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Literatur. 1901. Bd. XV, No. 20—26 und Register. 1902. Bd. XVI, No. 1—6. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Die Grenzen der Seeschiffahrt. Rede von Rektor Budendey. 1902. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XVI, Heft 4; Bd. XVII, Heft 1. 1902. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Pulkowa im Jahre 1901. 1902. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinz Sachsen, von G. Hellmann. 1902. 8⁰.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1899. 1901. 4⁰.
Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen in den Jahren 1897 u. 1898. 1901. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. II, No. 1. 1901. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1897. 1902. 4⁰.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1901. Heft 1. 1902. 4⁰.

Reichs-Marineamt in Berlin:

Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf 20 Stationen der westafricanischen Küste, von M. Loesch. 1902. 4⁰.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungs-Ergebnisse. Heft 10 u. 11. 1902. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. 51. Jahrg. 1902, No. 1—13. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XV, 1. Hälfte. 1902. 8⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 22. Jahrg. 1902, Heft 1—6. 1902. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Quellen zur Schweizer Geschichte, Bd. XV, 1; XVI—XX. Basel 1899 bis 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. 38. Zürich 1901. 4.

Geolog. Kommission der Schweiz. naturforsch. Gesellschaft in Bern:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. N. F. Liefg. XI. 1901. 4⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Bd. 16, Heft 2. 1901. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. III. Serie. Vol. XIX, fasc. 4—6. 1901. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1901. I. und II. Hälfte. 1901—02. 8⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 58. Jahrg. I. und II. Hälfte. 1901—02. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1902. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 37, No. 4—14. 1901—02. 8⁰.

American Philological Association in Boston:

Transactions and Proceedings. Vol. 32. 1901. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 29, No. 15—18; Vol. 30, No. 1. 2. 1901. 8⁰.
Occasional Papers. VI. 1901. 8⁰.

Magistrat der Stadt Braunschweig:

Abt Berthold Meiers Legenden und Geschichten des Klosters Sct. Aegidien. Wolfenbüttel 1900. gr. 8⁰.

Geschichtsverein in Braunschweig:

Braunschweigisches Magazin. Jahrg. 1901. 4⁰.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

12. Jahresbericht über die Jahre 1899/1900 und 1900/1901. 1902. 8⁰.

Technische Hochschule in Braunschweig:

Programm für die Jahre 1901—02. 1901. 8⁰.
Vorschriften über die Diplomprüfungen. 1901. 8⁰.

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Zeitschrift. Bd. I, Heft 1 u. 2. 1901. gr. 8⁰.
Časopsis. Bd. I, Číslo 1 u. 2. 1901. gr. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Karl Lechner, Die ältesten Belehnungs- und Lehensgeschichtsbücher des Bisthums Olmütz. 1902. 8⁰.
Zeitschrift. 6. Jahrg., Heft 1—3. 1902. gr. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 39. 1901. 8⁰.
XIX. Bericht der meteorol. Kommission im Jahre 1899. 1901. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés in 8⁰. Tom. 56. 1896—1902. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tom. XV No. 10. 11. Tom. XVI No. 1—5. 1901/02. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires des membres in 4⁰. Tom. 51, fasc. 1—4. 1900—01. 4⁰.
Mémoires couronnés in 4⁰. Tom. 59, fasc. 1. 2. 1901. 4⁰.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tom. 61. 1901. 8⁰.
Biographie nationale. Tom. XVI, fasc. 2. 1901. 8⁰.
Annuaire 1902. 68ᵉ année. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1901, No. 11. 12; 1902, No. 1—3. 8⁰.
b) Classe des sciences 1901, No. 11. 12; 1902, No. 1—3. 8⁰.
Charles de l'Abbaye de Saint-Martin de Tournai. Tom. 2. 1901. 4⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. 21, fasc. 1. 2. 1902. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 45. 1901. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tom. 12, fasc. 4; Tom. 15, fasc. 6; Tom. 16, fasc. 1. 1902. 8⁰.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. 13, Heft 4. 5. 1902. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 31, Heft 5—12; Bd. 32, Heft 1—4. 1901/02. 8⁰.
Jahresbericht für 1897. 1901. 8⁰.
A Magyar kir. földtani intézet évkönyve. Bd. 13, Heft 5. 6. 1901. 4⁰.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. No. XXIX, 2. Berlin 1901. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicaciones. Tom. I, No. 10. 1901. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen. No. LII—LV. Batavia 1902. 4⁰.
Bulletin. No. IX—XI. 1901. 4⁰.

Botanisches Institut in Bukarest:

Bulletin de l'Herbier. No. 1. 1901 Sept.—Déc. 1901. 8⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. XV, anul 1899. 1901. fol.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. Aug.—Dec. 1901, Januar 1902. 1901/02. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. XII, part 2. 1902. fol.
Rainfall of India. 10th year 1900. 1901. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 999. 1001—1004. 1901/02. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 30, part 3. 4; Vol, 31, part 2. 3; Vol. 32, part 1. 1901. 4⁰.

Institut Égyptien in Cairo:

Bulletin. 1896—1901. 8⁰.
Livre d'or de l'Institut Égyptien 1859—1899. Texte et planches. Le Mans 1899. 8⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:
Bulletin. Vol. 39, No. 2. 3; Vol. 40, No. 1. 1902. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXVI, No. 1—3; Vol. XXVII, No. 1. 1902. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:
56th Annual Report. 1901. 8⁰.
Annals. Vol. 43, part 2; Vol. 48, part 1. 1901/02. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:
Proceedings. Vol. XI, part 4. 5. 1902. 8⁰.

Geological Commission, Colony of the Cape of Good Hope in Cape Town:
Annual Report for 1898 and 1899. 1900. 4⁰.

Geodetic Survey of South Africa in Capetown:
Geodetic Survey. Vol. II. 1901. fol.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:
Atti. Serie IV, Vol. 14. 1901. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 71 (Nov. 1901); fasc. 72 (Febr. 1902). 1902. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:
Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1901. Berlin 1902. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:
Decaden-Monatsberichte. Jahrg. IV. 1902. fol.
Jahrbuch. Jahrg. XVI, Abtlg. III. 1902. 4⁰.

John Crerar Library in Chicago:
VIIth annual Report for the year 1901. 1902. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:
Publications. No. 60. 62. 63. 1901. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal“ in Chicago:
Vol. XIV, No. 5; Vol. XV, No. 1—4. 1901/02. gr. 8⁰.

Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition in Christiania:
Den Norske Nordhavs-Expedition. No. XXVIII. 1901. fol.

Nors Folkemuseum in Christiania:
Aarsberetning 1901. 1902. 4⁰.

Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science in Christiania:
The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Vol. III. 1902. 4⁰.

K. Norwegische Universität in Christiania:
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 39. Heft 1—4. 1901. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:
XXXI. Jahresbericht. Jahrg. 1901. 1902. 8⁰.

Lloyd Museum and Library in Cincinnati:
Bulletin. Mycological Series, No. 5—8. 1900—1901. 1900/02. 8⁰.

Ohio State University in Columbus:

31. annual Report 1900—01. 1901. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 44. 1902. gr. 8⁰.

Kais. Gouvernement von Deutsch-Ostafrica in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. 1, Heft 1. 2. Heidelberg 1902. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv. N. F. Erg.-Bd. I, Heft 2. 1902. 8⁰.
Quartalblätter. Bd. II, No. 17—20; Bd. III, No. 1—4. 1900—01. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Bd. IX, 3. 1902. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 23, trimestre 1. 1902. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

XXVII. Jahresbericht. 1901. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Transactions. Vol. 31, Part 12—14; Vol. 32, Section and Part 1. 2. 1901/02. 4⁰.

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 2. 1899. 8⁰.
The scientific Proceedings. Vol. IX, parts 2—4. 1900—01. 8⁰.
Transactions. Vol. VII, parts 8—13. 1900—01. 4⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. XXIII, No. 12; Vol. XXIV, No. 1—6. 1901/02. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 23, p. 429—510; Vol. 24, p. 1—192. 1902. 4⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. III, No. 2. 1901. 8⁰.

Gesellschaft f. bildende Kunst u. vaterländische Altertümer in Emden:

Jahrbuch. Bd. XIV, Heft 1 u. 2. 1902. 8⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 28. 1902. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. 24, disp. 3. 4; Vol. 25, disp. 1. 1901/02. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XX, 3; Bd. XXVI, 4. 1902. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Bd. XIX. Berlin 1902. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Bd. XII. 1902. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." Jahrg. 28, II. Halbband. 1901. fol.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Nouv. Sér. Fasc. 12 (= N. F. fasc. 3). 1902. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Fulda:

2. Ergänzungsheft. 1901. 4⁰.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1900 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. 1902. 8⁰.

Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pour l'année 1900. 1901. 8⁰.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Mémoires et Documents. Nouv. Sér. Tom. 5, livre 2. 1901. 8⁰.

Bulletin. Tom. 2, livre 5. 1901. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Vol. 34, fasc. 1. 1902. 4⁰.

Vlaamsch natuur- en geneeskundig Congres in Gent:

Handelingen van het Congres gehouden te Brugge 28.—29. Sept. 1901. 1901. 4⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:

33. Bericht. 1899—1902. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mittheilungen. N. F. Bd. 10 und Ergänzung hiezu. 1901/02. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. VII. 1901. 8⁰.

Codex diplomaticus Lusatiae superioris. II. Bd. 2, Heft 2. 1901. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1901, No. XII; 1902, No. I—V. Berlin 1901/02. 4⁰.

Abhandlungen. N. F.
a) Philol.-hist. Classe. Bd. IV, No. 6. Berlin 1901. 4⁰.
b) Mathem.-physikal. Classe. Bd. II, No. 2. Berlin 1902. 4⁰.

Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1901, Heft 3. 4; 1902, Heft 1. 2. 4⁰.
b) Math.-phys. Classe. 1901, Heft 2. 5; 1902, Heft 1—3. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1901, Heft 2.

Universität in Graz:

Verzeichnis der akademischen Behörden etc. 1901/02. 1901. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel IX, afl. 3 en 4; Deel X, afl. 1 en 2. 1901/02. 8⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II. Tom. 7, livr. 1. 1902. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 37, No. 12; Heft 38, No. 1—5. 1901/02. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. 79. 1901. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 56, Heft 1. 2. Leipzig 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 74, Heft 3—6. Stuttgart 1901/02. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 21. Jahrg., 1901. 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. III. Folge. IX, 1901. 1902. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen. Heft VII. 1902. fol.
Zeitschrift. Jahrg. 1901. Jahrg. 1902, Heft 1. 1901/02. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XI, Heft 1. 1901. 8⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. VII, Heft 1. 1902. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XVI. 1902. 4⁰.

Grossherzogl. Sternwarte in Heidelberg:

Mitteilungen. I. Karlsruhe 1901. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Öfversigt. XLIII, 1900—01. 1901. 8⁰.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Acta. Vol. XVI. XVIII. XIX. XX. 1897—1901. 8⁰.
Meddelanden. Heft 24—27. 1900/01. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingsfors:

Fennia. Vol. 10. 16. 18. 1894—1901. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. XXX, Heft 2. 1902. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1901. 1902. 8⁰.
Urkundenbuch zur Geschichte der Deutschen in Siebenbürgen. Bd. III. 1902. 4⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 40. Heft. 1902. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 29. Jahrg. 1902. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 5, No. 9; Vol. 6, No. 1—3. 1901/02. 8⁰.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. 2, fasc. 1. 1902. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F. Bd. XII, Heft 2—4. 1901—02. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften. No. X. Moskau 1902. 8⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1901 in 4⁰ und 8⁰.

Pfälzisches Museum in Kaiserslautern:

Pfälzisches Museum. XIX. Jahrg., No. 4 (April 1902). 8⁰.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Aloys Schulte, Markgraf Ludwig Wilhelm von Baden. 2 Bde. Heidelberg 1901. 8⁰.
Politische Correspondenz Karl Friedrichs von Baden, herausgegeben von Erdmannsdörffer. 5 Bde. Heidelberg 1888—1901. 8⁰.
Aloys Schulte, Geschichte des mittelalterlichen Handels. 2 Bde. Leipzig 1900. 8⁰.
Oberrheinische Stadtrechte. I. Abthlg., Heft 1—5. Heidelberg 1895 bis 1900. 8⁰.
Zur Vorgeschichte des Orleans'schen Krieges, bearb. von Karl Immich. Heidelberg 1898. 8⁰.
Siegel der Badischen Städte. Heft 1. Heidelberg 1899. 8⁰.
Die Konstanzer Ratslisten des Mittelalters, bearb. von Konrad Beyerle. Heidelberg 1898. 8⁰.
Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. Bd. VI—XVII, 2. Freiburg 1891—1902. 8⁰.
Neujahrsblätter 1898—1902. Heidelberg. 8⁰.
Wirtschaftsgeschichte des Schwarzwaldes v. Eberhard Gothein. Bd. I. Strassburg 1892. 8⁰.

Universität Kasan:

Schriften aus Bd. 67, No. 9. 10. 1900. 8⁰.
Utschenia Sapiski. Bd. 68, No. 12; Bd. 69, No. 1–4. 1901/02. 8⁰.
1 Medicinische Dissertation. 1900. 8⁰.
Godischnij Akt. 1901. 8⁰.

Société de médecine in Kharkow:

Travaux. 1900. 1901. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1902. Fasc. 1. 1902. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. V, Abteilung Helgoland, Heft 1. 1902. 4⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 41, No. 10. 12; Bd. 42, No. 1. 2. 1901/02. gr. 8⁰.

Mediz.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:

Sitzungsberichte. 26. Jahrg. 23. Bd., 1. Abthlg., Heft 3. 1902. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 42. Jahrg. 1901. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1901, No. 6; 1902, No. 1. 1902. 8⁰.
Mémoires. Section des Lettres. Tom. 5, No. 2.
Section des Sciences. Tom. 9, No. 8; tom. 10, No. 3. 1901/02. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Nordiske Fortidsminder. Heft 4. 1901. 4⁰.
Aarböger, II. Raekke. Bd. 16. 1901. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1900—1901. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1901, No. 8—10; 1902, No. 1—5. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. No. 41. 1902. 8⁰.
Rocznik. Rok 1900/01. 1901. 8⁰.
Materyaly antropolog.-archeolog. Tom. V. 1901. 8⁰.
Bibliografia historyi Polskiej. Bd. II, 4. 1901. 8⁰.
Atlas geologiczny Galicyi. Liefrg. XIII (mit Atlas in fol.). 1901. 8⁰.
Rozprawy. a) filolog. Ser. II, tom. 18.
b) histor. Ser. II, tom. 17.
c) matemat. Ser. II, tom. 18. 19; Ser. III, tom. 1 A u. B. 1901. 8⁰.
Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki. Tom. VII, 1. 2 und Index zu I—VI.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. 18. 1901. 8⁰.
Lud biat'oruski II. 1902. 8⁰.
Slownictwo chemiczne. 1902. 8⁰.
Katalog literatury nankowej polskiej. Tom. I, 4. 1902. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 4ᵉ Série. Vol. 37, No. 142; Vol. 38, No. 143. 1901/02. 8⁰.
Observations météorologiques du Champ de l'Air. Année XV, 1901. 1902. 8⁰.

Schweizerisch-geodätische Kommission in Lausanne:

Das Schweizerische Dreiecksnetz. Bd. IX. Zürich 1901. 4⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. X, No. 3. 1901. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Bd. III, Heft 1. 2. 1902. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XXI, No. 2—5. 1901/03. 4⁰.
Abhandlungen der mathemat.-physikal. Classe. Bd. XXVII, No. 1—6. 1901/02. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Bd. 53, No. II—IV. 1901/02. 8⁰.
Berichte der mathemat.-physikal. Classe. Bd. 53, No. V—VII; Bd. 54, No. I. II. 1901/02. 8⁰.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. März 1902. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 64, Heft 11. 12; Bd. 65, Heft 1—10. 12. 1901. 8⁰.

K. sächs. Kommission für Geschichte in Leipzig:

Die Dresdener Bilderhandschrift des Sachsenspiegels, herausgegeben von Karl v. Amira. Facsimile-Band, I. Hälfte. 1902. fol.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1901. 1902. 8⁰.

Université de Lille:

Tableaux des cours et conférences. Année 1902—1903. 1902. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:

Schriften der Universisät aus dem Jahre 1900/01.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tom. XVIII, 2; XIX, 1. 1901. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVII, No. 65, 66. 1902. 8⁰.

Royal Society in London:

Reports to the Malaria Committee. 6th Series. 1902. 8⁰.
Proceedings. Vol. 69, No. 454—462. 1902. 8⁰.
Reports of the Evolution Committee. Report I. 1902. 8⁰.
Catalogue of scientific Papers. Vol. XII. 1902. 4⁰.
Year-book 1902. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 62, No. 2—7 und Appendix No. I. 1901/02. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 471—476 und Supplementary Number. 1902. 8⁰.
List of the Fellows and Officers. 1902. 8⁰.
Proceedings. Vol. 18, No. 245—254. 1902. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 57, part 1—4 (= No. 225—228). 1901/02. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal. a) Zoology. Vol. 28, No. 184; b) Botany. Vol. 35, No. 244. 1902. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 84. 1901. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1902. Part I. III. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1901. Vol. II, part 2. 1902. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, part 4. 1902. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1681—1704. 8⁰.

Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg in Lüneburg:

Jahresberichte 1899/01. 1901. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 28, livr. 3; Tom. 29, livr. 1. 2. 1900/02. 8°.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXXVI, 1. 2. 1900. 4°.
Sveriges offentlicha Bibliotek. 1899. 1900. Stockholm 1901/02. 8°.

Section historique de l'Institut Royal Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Vol. 48. 49. 51. 1900/01. 8°.

Université in Lyon:

Annales. Sér. I, fasc. 5—7; Sér. II, fasc. 7. 8. Paris 1901. 8°.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. X, part 2. 1901. 4°.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. IV, No. 2. 1901. 8°.

Kodaikánal and Madras Observatories in Madras:

Report for the period 1st April to 31st Dec. 1901. 1902. fol.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Tom. XIV, Atlas fasc. 1. 1891—1900. 4°.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 40, cuad. 1—6. 1902. 8°.

Ministerio de Instruccion publica in Madrid:

Discursos leidos el día de 24 de Mayo de 1902 en el solemne festival académico con motivo de la entrada en la mayor edad de S. M. el Rey D. Alfonso XIII. 1902. 4°.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 40, fasc. 4; Vol. 41, fasc. 1. 1902. 8°.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III. Anno XXVIII, fasc. 31 und 32; anno XXIX, fasc. 33. 1901/02. 8°.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 46, part II—VI. 1901/02. 8°.

Schwäbischer Schillerverein in Marbach:

6. Rechenschaftsbericht 1901/02. 1902. 8°.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1901—02. 1902. 4°.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Bd. 6, Heft 1. 1901. 8°.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XIV, 2. 1902. 8°.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. XIII. Jahrg. 1901. gr. 8⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Boletín. No. 15. Las rhyolitas de Mexico. Parte 2. 1901. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. Julio 1901. fol.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y revista. Tom. XIII, No. 3. 4; Tom. XVI, No. 2. 3. 1901. 8⁰.

Bureau d'échanges internationaux de publication de la République de l'Uruguay in Montevideo:

Anuario estadístico de l'Uruguay. Años 1899—1900, 2 voll. 1901. 4⁰.
Colón Guía. 1900. 4⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Tomo IV, entr. 22. 1901. 4⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. III. Series. Vol. IV, No. 1. 1902. 8⁰.

Oeffentliches Museum in Moskau:

Ottschet. Jahrg. 1901. 1902. 8⁰.

Lazarev'sches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. No. 4. 7. 9. 1901. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1902, No. 1. 2. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Publications. Vol. 5. Sacramento 1901. 4⁰.
Bulletin. No. 12—19. 1901/02. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt, 32. Jahrg. 1901, No. 11. 12; 33. Jahrg. 1902, No. 1 bis 3. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. III. Jahrg., Heft IV, Thl. I (und Anhang); IV. Jahrg., Heft I. 1901/02. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

10 Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Semester 1902. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1902. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1902, No. 1—16. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte. 14. Jahrg. 1901. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Sommer-Semester 1902. 8⁰.
Verzeichnis der Vorlesungen im Sommer-Semester 1902. 4⁰.

Historischer Verein in München:

Oberbayerisches Archiv. Jahrg. 3, Heft 1—5. 1901/02. 4⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1902. XII. Jahrg., No. 3—8. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Bd. 59. 1901. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. III. Vol. VII, fasc. 12; Vol. VIII, fasc. 1—5. 1901/02. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XV, 3. 1901. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tom. 27. Année 1898—97. 1899. 8⁰.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 51, part 2. 1902. gr. 8⁰.
Indices. Vol. 1—38 (1852—1889). 1902. 8⁰.
Subject-Matter Index for the year 1900. 1902. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Series, Vol. XIII, No. 73—79. 1902. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXI, 1. Vol. XXII, 2. 1901/02. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Memoirs. Vol. XIV, part 1. 2. 1901/02. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. No. 9. 1901. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. XI, 4, XIV, XV, 1. 1901. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 33, No. 5; Vol. 34, No. 1. 2. 1901/02. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. II^d Series, Vol. 6, No. 1. 1902. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1901, Heft 1—4. 4⁰.
Katalog der Gewebesammlung, Teil II. 1901. 4⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. XXIV, 1. 1901. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. II, 2; Vol. IV, 2. 1900-01. 8⁰.
General Index to the Reports of Progress 1863—1884. 1900. 8⁰.
Catalogue of marine Invertebrata of Eastern Canada. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. 17. 1901. 8⁰.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

N. S. Anno VI, fasc. 2. 1902. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. XVI, fasc. 1. 2. 1902. gr. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1901. gr. 8⁰.
Bollettino. Anno I, No. 6—8. 1901. fol.

Societa di scienze naturali ed economuli in Palermo:

Giornale. Vol. XXIII. Anno 1901. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Jubilé de M. Albert Gaudry. 1902. 8⁰.
Bulletin. 1901, No. 44; 1902, No. 1—26. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 133, No. 27; Tome 134, No. 1—25. 1901/02. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livre 722—727 (Février-Juillet 1902). 4⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1902, No. 1—6. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 29, No. 4; Tom. 30, No. 1. 1901/02. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome XXVI. 1901. 8⁰.
Mémoires. Tome XIV. 1901. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Annuaire du Musée zoologique. Tome VI, No. 2—4. 1901. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibèrie.
a) Region aurifère d'Jénisséi. Livr. 1. 2.
b) „ „ de Léna. Livr. 1.
c) „ „ de l'Amour. Livr. 1. 2. 1900—01. 8⁰.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta. Vol. XIX, fasc. 1. 2; Vol. XX. 1901. 8⁰.
Scripta Botanica. Fasc. XVII. 1901. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. 1901, Tom. 33, Lief. 9; 1902, Tom. 34, Lief. 1—4. 8⁰.

Nicolai-Hauptsternwarte in St. Petersburg:

Jahresbericht 1900—1901. 1901. 8°.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schriften aus dem Jahre 1901/02.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

49th annual Meeting at St. Louis 1901. 1901. 8°.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXV, No. 100—102. 1902. 4°.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 37, No. 12; Vol. 38, No. 1—6. 1901/02. 8°.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 40, No. 167. 1901. 8°.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XII, pag. 231—266; Vol. XIII, pag. 1—39. 1901/02. 4°.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, Tom. II, Nov.-Dic. 1901; Tom. III, Gennaio-Maggio 1902. 8°.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. XVI, 1. 2. Halbbd.; XVII, 1. Halbbd. 1901/02. 8°.
Historische Monatsblätter. Jahrg. II, No. 4—12; Jahrg. III, No. 1—5. 1901/02. 8°.

Centralbureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:

Verhandlungen der XIII. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung. Berlin 1901. 4°.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band XII. 1902. 4.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky archaeologické. Bd. XIX, Heft 6—8 und Register; Bd. XX, Heft 1. 1901—02. 4°.
Starožitnosti země české. Díl II, svaz. 1. 1901. 4°.
Rozprawy. Třída I, Ročnik IX; Třída II, Ročnik X. 1901. 8°.
Historický Archiv. Číslo 20. 21. 1901/02. 8°.
Věstník. Ročnik X, číslo 1—9. 1901. 8°.
Bulletin international. VIe annee, 2 Voll. 1901. 8°.
Almanach. Ročnik XII. 1902. 8°.
Ott, Soustavný úvod. Dél III. 1901. 8°.
Pavlíček, Chek 1902. 8°.
Novák, Maudrost st. č. 1901. 8°.
Bartoš, Moravské národní písně II. 1901. 8°.
Kott, Archiv pro lexikografii III. 1901. 8°.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 12. 1901. 8°.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Anuario. Año XXII, 1902. Mexico 1901. 8⁰.

Observatoire astronomique et physique in Taschkent:

Publications, No. 3. Texte und Atlas. 1901. fol.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahre 1898. 1901. fol.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. VIII, Teil 3. 1902. 8⁰.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar 1901—02. 8⁰.
The Journal of the College of Science. Vol. XVI, part 1; Vol. XVII, part 1. 1901. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. V, No. 2. 1901. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. IV, No. 5. 1902. 8⁰.

University of Toronto:

Studies. Physiological Series, No. 3. 1901. 8⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XVI, fasc. 2. 1901. 8⁰.

Universität Tübingen:

The Kashmirian Atharva-Veda. 3 Voll. Baltimore 1901. fol.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1901. 1902. 8⁰.
Atti. Vol. 37, disp. 1—10. 1902. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 51. 1902. 2⁰.

R. Deputazione sopra gli studi di storia patria in Turin:

Historiae patriae monumenta. Tom. 18. 1901. fol.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III, Vol. XX, fasc. 1. 1901. 8⁰.

Humanistika Vetenkaposamfund in Upsala:

Skrifter. Bd. IV. 1895—1901. 8⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 33, 1901. 1901—02. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XXII. Amsterdam 1901. 8⁰.
J. Prinsen, Collectanea van Gerardus Geldenhauer. Amsterdam 1901. 8⁰.
Gedenkschriften van Gijsbert Jan van Hardenbroek. Deel I. Amsterdam 1901. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1899. 1902. fol.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. III, 2. 1902. fol.

Dutsch Eclipse-Committee in Utrecht:

Preliminary Report of the Dutsch expedition to Karang Sago (Sumatra). Amsterdam 1902. 4⁰.
Report of the Dutsch Observations, No. II. Batavia 1901. 4⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VIII. 1898. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

18th annual Report 1896–97. Part 2. 1899. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report of the Commissioner of Education for the year 1899—1900. Vol. 2. 1901. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Bureau of Plant Industry. Bulletin, No. 1. 1901. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report for the year (ending June 30, 1900). 1901. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 42. 43. 1901. 8⁰.
Smithsonian Contributions to knowledge, No. 1309. 1901. 4⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1900/01. 1901. 8⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. 14, p. 179—204. 1902. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

XXIst annual Report 1899—1900. Parts 2—4. 1900—01. 4⁰.

Grossherzogliche Bibliothek in Weimar:

Zuwachs in den Jahren 1899—1901. 1902. 8⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 34. Jahrg., Heft 1. 2. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Bd. 143. 1901. 8⁰.
Mathem.-naturwissensch. Classe. 1900/01. 8⁰.
Abtlg. I, Bd. 109, Heft 8—10; Bd. 110, Heft 1—4.
" IIa, " 109, " 10; " 110, " 1—7.
" IIb, " 110, " 1—7;
" III, " 109, " 8—10.
Denkschriften. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Bd. 69. 73. 1901. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd 89, 2. Hälfte; Bd. 90, 1. und 2. Hälfte. 1901. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abtlg., Bd. 52—54. 1901. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1901, Bd. 51, Heft 5; Jahrg. 1902, Bd. 52, Heft 1. 4⁰.
Verhandlungen 1901, No. 15—18; 1902, No. 1—6. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XVII, Heft 5; Bd. XIX, Heft 1. 1901/02. fol.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., No. 1—6. 1901. 8⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1899 und 1900, N. F., Bd. 36. 37. 1900/02. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1902, No. 2—28. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Bd. 31, Heft 6. 1901. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 51 (Jahrg. 1901), No. 9. 10; Bd. 52 (Jahrg. 1902), Heft 1—5. 8⁰.
Abhandlungen. Bd. 1, Heft 3. 4. 1902. 4⁰.

K. K. Hofbibliothek in Wien:

Tabulae codicum manuscriptorum. Vol. 10. 1899. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XVI, No. 1—4. 1901. 4⁰.

v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien:

Publikationen. Bd. VI, Teil 1. 1902. 4⁰.

Verein für Nassauische Altertumskunde in Wiesbaden:

Annalen. 32. Bd. 1901. 1902. 4⁰.
Mitteilungen 1901/02, No. 1—4. 1902. 4⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 34, No. 7—11; Bd. 35, No. 1. 1901/02. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1900, No. 5; Jahrg. 1901, No. 1—4. 1901. 8⁰.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1899. 36. Jahrg. 1901. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen. Bd. XXV, Heft 2. 3. 1901/02. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1902. 104. Stück. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 46. Jahrg. 1901, Heft 3 und 4. 1902. 8⁰.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen, No. 93. 1902. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Vincenzo Albanese di Boterno in Modica:

Discorso sul divorzio Modica. 1902. 8⁰.

Prince Albert I de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. XXI. 1902. fol.

St. d'Aristarchi in Constantinopel:

Photii Patriarchae Constantinopeleos Orationes et homiliae. 2 Voll. 1900. 4⁰.

Verlag von Joh. Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 26. 1902, No. 1—7. 1902. 8⁰.

Cl. Freiherr v. Bechtolsheim in München:

Die primären Naturkräfte. Berlin 1902. 4⁰.

Hugo Bermühler's Verlag in Berlin:

Forschungen zur Geschichte Bayerns. Bd. IX. 1901. 8⁰.

Lorenzo Michelangelo Billia in Turin:

Difendiamo la famiglia, saggio contro il divorzio. 1902. 8⁰.

Th. Brédikhine in St. Petersburg:

Sur la comète. 1901, I. 1901. 4⁰.

Rud. Burckhardt in Basel:

Die Einheit des Sinnesorgansystems bei den Wirbelthieren. Jena 1902. 8⁰.

E. Dümmler in Berlin:

Jahresbericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica. 1902. 4⁰.

Arthur J. Evans in London:

The Palace of Knossos. Athens 1901. 4⁰.

Reginald Fessenden in Washington:

Recent Progress in practical and experimental Electricity. 1901. 8⁰.

Verlag von Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. 17. 1902, No. 15—39. 4⁰.

Paul Fournier in Grenoble:

Observations sur diverses recensions de la collection canonique d'Anselme de Lucqnes. 1901. 8⁰.
Études sur les Pénitentiels. I. II. III. Macon 1901—02. 8⁰.

Léon Fredericq in Liège:

Travaux du Laboratoire de Léon Fredericq. Tom. VI. 1900. 8⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Die tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. 1902. 8⁰.

Adolf Garbell in Berlin:

Langenscheidt's Briefe für das Selbststudium der Russischen Sprache No. 1—12. 1902. 8⁰.

Albert Gaudry in Paris:

Sur la Similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. (Deuxième Note.) 1901. 8⁰.

Madame Vve Godin in Paris:

Le Devoir. Tom. 26. Janvier—Juin 1902. Guise. 8⁰.

Philipp Holitscher in Budapest:

Märchendichtungen. Breslau 1902. 8⁰.

A. v. Koelliker in Würzburg:

Weitere Beobachtungen über die Hofmann'schen Kerne am Mark der Vögel. (Sep.-Abdr.) Jena 1902. 8⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XI, Heft 1 und 2. Leipzig 1902. 8⁰.

Imprimérie Albert Lanier in Auxerre:

La Chronique de France. 2e année 1901. 8⁰.

Ernst Leyst in Moskau:

Ueber den Regenbogen in Russland. 1901. 8⁰.

Lucy A. Mallory in Portland:

The World's Advance-Thought and the Universal Republic. 1902. 8⁰.

V. J. Modestov in St. Petersburg:

Vvedenie v rimskuju istoriju. Cast pervaja. 1902. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Année XXVII. Tom. 78, No. I. II et Table générale 1896—1900; Tom. 79, No. I. II (Janvier—Août 1902). 8⁰.

Fridtjof Nansen in Christiania:

Some Oceanographical Resultats. Preliminary Report. 1901. 8⁰.

Friedrich Ohlenschlager in München:

Römische Ueberreste in Bayern. Heft 1. 1902. 8⁰.

G. Omboni in Padua:

Appendice alla nota sui denti di Lophiodon del Bolca. Venezia 1902. 8⁰.

Michele Rajna in Mailand:

Sull' escurzione diurna della dechinazione magnetica a Milano. 1902. 8⁰.

Comte Camillo Razoumovsky in Troppau:

Comte Grégoire Razoumovsky (1759—1837). Oeuvres scientifiques posthumes. 1902.

Verlag von Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische, oceanische und ostasiatische Sprachen. VI. Jahrg., Heft 1. 1902. 8⁰.

S. Riefler in München:

Das Nickelstahl-Compensations-Pendel D.R.P. No. 100870. 1902. 8°.

Dr. Fritz Sano in Antwerpen:

Handelingen van het IVde Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres te Brussel. 30. Sept. 1900. Gent 1900. 4°.

L. Scherman in München:

Orientalische Bibliographie. XIV. Jahrg. II. Halbjahresheft. Berlin 1901. 8°.

Heinrich von Segesser in Luzern:

Die Quadratur des Kreises. 1902. 8°.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 11. Jahrg. 1902. No. 1—13. 8°.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. 2, Heft 1—4. 1901/02. 8°.
Thesaurus linguae latinae. Vol. I, fasc. 4; Vol. II, fasc. 3. 1901. 4°.

A. Thieullen in Paris:

Technologie néfaste, industrie de la pierre taillée aux temps préhistoriques. 1902. 4°.
Varia. Os travaillés à l'époque de Chelles. 1901. 4°.

R. Virchow in Berlin:

Portrait-Münzen und Graf's hellenistische Porträt-Gallerie. 1902. 4°.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae ed. R. Prinz und N. Wecklein. Vol. 3, pars 6, Rhesus. 1902. 8°.

E. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XII, 4. 1902. 8°.



Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1902.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis. XVI. 1901. 1902. 8⁰.
Rad. Vol. 148. 149. 1902. 8⁰.
Scriptores. Vol. 4. 1902. 8⁰.
Zbornik za narodni život. Bd. VII, 1. 1902. 8⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. 4, Heft 2. 1902. 4⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjestnik. N. Ser. Sveska 6. 1902. 4⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Library. Annual Report Vol. 82. 83 (1899. 1900). 1901. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

New-York State Museum. Report Vol. 52, 1898, part 1. 2; Vol. 53, 1899, part 1. 2. 1900—1901. 8⁰.
3d Annual Report of the College Department 1900. 1901. 8⁰.
Bulletin of the New-York State Museum. Vol. VII, No. 33—36; Vol. VIII, No. 37—43; Vol. IX, Nr. 45—51. 1900. 4⁰.

Allegheny Observatory in Allegheny:

Miscellaneous scientific Papers No. 4—7. 1902. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mitteilungen aus dem Osterlande. N. F. Bd. X. 1902. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

La Picardie historique et monumentale. Tom. II, No. 1. 1901. fol.
Monographie de l'eglise Notre-Dame, Cathédrale d'Amiens. Tom. I. 1901. fol.
Bulletin. Année 1900, trim. 1—4; 1901, trim. 1—3. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie. Deel IV u. VIII, No. 1. 2; II. Sectie. Deel VIII, No. 1—6; Deel IX, No. 1—3. 1902. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1901/02. Deel X. 1902. 4⁰.
Verslagen. Afd. Letterkunde. 4ᵉ Reks, Deel IV. 1901. 8⁰.
Jaarboek voor 1901. 1902. 8⁰.
Prysvers Centurio. 1902. 8⁰.

Historischer Verein in Ansbach:

49. Jahresbericht. 1902. 4⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 28. Jahrg. 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

35. Bericht. 1902. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XXI, No. 159. 160. 1902. 4⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XIII, No. 136—141. 1902. 4⁰.

Peapody Institute in Baltimore:

35th Report 1901/02. 1902. 8⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland Geological Survey. Vol. IV. 1902. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Chroniken. Bd. VI. Leipzig 1902. 8⁰.
Basler Zeitschrift für Geschichte. Bd. 2, Heft 1. 1902. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 45, afl. 3. 4. 1902. 8⁰.
Notulen. Deel 39, afl. 4, 1901; Deel 40, afl. 1. 1902. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 52, stuk 1. 2, 1901; Deel 54, stuk 1; Deel 55, stuk 1. 1902. 4⁰.
Anno 1674. 1902. 4⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. 23. 1900. 1902. fol.
Regenwaarnemingen. 23. Jaarg. 1901. 1902. 4⁰.

K. natuurkundige Vereenigung in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 61. Weltevreden 1902. 8⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 63. 64. 1901—1902. 8⁰.
Godischniak. XIV. 1900. 1901. 8⁰.
Sbornik. Bd. I. 1902. 8⁰.
Srpski etnografski Sbornik. Bd. III. IV und Atlas. 1902. 8⁰. (Atlas in fol.)

Museum in Bergen (Norwegen):

Aarbog für 1902. Heft 1 und 2. 8⁰.
G. O. Sars, An account on the Crustacea of Norway. Vol. 4, part 7—10. 1902. 4⁰.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1902, No. 23—40. 1902. 8⁰.
Das preussische Münzwesen im 18. Jahrhundert. Beschreibender Teil. Heft I. 1902. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für 1900. 1901. 8⁰.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Ergebnisse der Polhöhenbestimmungen in Berlin in den Jahren 1889—1891. Von A. Marcuse. 1902. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 35. Jahrg., No. 13—20. 1902. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 54, Heft 1. 2. 1902. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1901. 3 Bde. Braunschweig 1902. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 3, No. 11—14, 1901; Jahrg. 4, No. 1—18, 1902. Leipzig. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. Bd. XVI, No. 8—20. Leipzig 1902. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1901—1902, No. 5—16. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahresbericht über das Jahr 1901. 1902. gr. 8⁰.
Jahrbuch. Bd. XVII, Heft 2. 3. 1902. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht für das Jahr 1901/02. 1902. 8⁰.
Veröffentlichung. N. F. No. 9. 1902. 4⁰.
Lotabweichungen. Heft 2. 1902. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Bericht über das Jahr 1901. 1902. 8⁰.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1900. 1902. 4⁰.
Ergebnisse der Arbeiten am Aëronautischen Observatorium in den Jahren 1900 und 1901. 1902. 4⁰.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1901. Heft 2. 1902. 4⁰.
Regenkarte der Provinzen Schleswig-Holstein und Hannover von G. Hellmann. 1902. 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 31, Heft 1—3. 1902. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1902, Heft 14—24. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XIII, 1. und 2. Hälfte. Leipzig 1900. 1902. 8⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XXII. Jahrg., Heft 7—12. 1902. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 27. Bd. Zürich 1902. 8⁰.

Société d'Emulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VIIᵉ Série. Vol. 5. 1900. 1901. 8⁰.

Observatorio astronomico nacional in Bogota:

El Cometa de 1901. 1901. 4⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III. Vol. XX, fasc. 1—3. 1902. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1902. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 108. 109. 1902. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 59. Jahrg., I. Hälfte. 1902. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des séances. Année 1900—1901. Paris 1901. 8⁰.
Mémoires. VIᵉ Série. Tom. 1. 1901. 8⁰.
Observations pluviométriques 1900—1901. 1901. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 56. 1901. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1902. No. 15—24. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 37, No. 15—23. 1902. 8⁰.
Memoirs. Vol. XII, 5. Cambridge 1902. 4⁰.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Meteorologisches Jahrbuch. XII. Jahrg. 1901. 1902. 4⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:

79. Jahresbericht. 1901. 1902. 8⁰.

Landesmuseum in Brünn:

Zeitschrift. Bd. 2, Heft 1. 2. 1902. gr. 8⁰.
Casopsis. Bd. II, Heft 1. 2. 1902. gr. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. Jahrg. 6, Heft 4. 1902. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tom. XV, fasc. 9. 1902. 8°.
Bulletin. Ve Série. Tom. 16, No. 6—9. 1902. 8°.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires des membres in 4°. Tom. 54, fasc. 5. 1902. 4°.
Mémoires couronnés in 4°. Tom. 59, fasc. 3. 1902. 4°.
Mémoires couronnés in 8°. Tom. 62, fasc. 1—3. 1902. 8°.
Bulletin. a) Classe des lettres 1902, No. 4—8. 8°.
b) Classe des sciences 1902, No. 4—8. 8°.
Documents pour servir à l'histoire des prix par H. van Houtte. 1902. 4°.
Le Register de Franciscus Lixaldius pub. par Rachfahl. 1902. 8°.

Jardin botanique de l'état in Brüssel:

Bulletin. Vol. 1, No. 1—3. 1902. gr. 8°.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XXI, 3—4. 1902. 8°.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tom. XVI année; Tom. XIII, fasc. 3; Tom. XVI, fasc. 2. 3. 1902. 8°.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1902. 8°.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mitteilungen.) Bd. XXXI, 3. 4; Bd. XXXII, 1. 1901—1902. 8°.
Történettud. Ertekezések. (Histor. Abhandlungen.) XIX, 6—9. 1901/02. 8°.
Archaeologiai Ertesitö. Új folyam. (Archäolog. Anzeiger.) XXI, 3—5; XXII, 1—3. 4°.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen.) XVII, 9. 10. 1902. 8°.
Gróf Eszterházy von Thaly Kálmán. 1901. 8°.
Achmed Dzsevdet Evlija Czelebi. Sziachat Nameszi (in türk. Sprache); Karácsonyi J.: A magyar nemzetségek. Bd. II. 1901. 8°.
Margalits E.: Repertorium Croaticum. Vol. II. 1902. 8°.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) XIX, 3—5; XX, 1. 2. 8°.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mitteilungen.) XXVIII, 1. 1902. 8°.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. XVII. Bd. 1899. Leipzig 1901. 8°.
Rapport. 1901. 1902. 8°.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen aus dem Jahrbuche. Bd. XIV, Heft 1. 2. 1902. 8°.
Földtani Közlöny. Bd. 32, Heft 5—9. 1902. 8°.
A Magyar Kir. földtani intézet évkönyve. Bd. XII, Heft 1. 1902. 8°.

Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tom. 14. 1901. fol.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. Bd. I, Heft 6. 1902. 8°.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Verslag over het jaar 1901. Batavia 1902. 4⁰.
Mededeelingen. No. LVI—LVIII. 1902. 4⁰.
Bulletin. No. XII—XV. 1902. 4⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. a) Partea administrativa. Serie II. Tom. 24. 1901—1902.
b) Memoriile secţiunic sciinţifice. Serie II. Tom. 23. 1900—1901.
c) Memoriile secţiunic istorice. Serie II. Tom. 23. 1900—1901.
d) Memoriile secţiunic literare. Serie II. Tom. 23. 1900—1901.
Discursurc de recepţiune. XXIV. 1902. 4⁰.
Monumentele epigrafice şi sculpturali. Part I. 1902. fol.
Dim. Cantemir, Operele. Tom. 8. 1901. 8⁰.
Acte şi Documente rel. la istoria renascerei Romǎniei. Tom. IX. 1901. 8⁰.
Memoriu despre Starea Moldovei la 1787 de Comitele d'Hauterive. 1902. 4⁰.
Istoria Romana de Titus Livius. Tom. II, cartile 7—10. 1901. gr. 8⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele XV anul 1899. 1901. fol.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Handbook of Cyclonic Storms. Text and Plates. 2 Vols. 1901. 8⁰.
Monthly Weather Review 1902. Febr.—June. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. XII, part 3. 4. 1902. fol.
Memorandum on the meteorological Conditions prevailing in the Indian Monsoon Region. Simla 1902. fol.
Report on the Administration in 1901/02. 1902. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 1005—1014 1902. 8⁰.
Journal. No. 391; 392; 395—399 und Plates. 1902. 8⁰.
Proceedings. 1901, No. IX—XI; 1902, No. I—V. 8⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 38; Vol. 39, No. 4. 5; Vol. 40, No. 2. 3; Vol. 41, No. 1. 1902. 8⁰.
Annual Report for 1901/02. 1902. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXVII, 2. 1902. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 37, No. 2; Vol. 38 und 39, No. 8. 9. 1902. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XI, part 6. 1902. 8⁰.
Transactions. Vol. XIX, 2. 1902. 4⁰.

Geological Commission, Colony of the Cape of Good Hope in Cape Town:

Annual Report for 1900. 1901. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 73. 1902. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Dekaden-Monatsberichte. 1901. Jahrg. IV. 1902. 4⁰.
Jahrbuch 1899. Jahrg. XVII, Abtlg. III. 1902. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 32. Paris 1901—1902. 8⁰.

Academy of sciences in Chicago:

Bulletin. Vol. II, No. III, No. IV, part. 1. 1900. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 61, 1901; No. 64. 65. 1902. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XV, No. 5; Vol. XVI, No. 1—5. 1902. gr. 8⁰.

Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science in Christiania:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Scientific Results. Vol. III. 1902. 4⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlingar, aar 1901. 1902. 8⁰.
Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Classe 1901, No. 1—5. II. Histor.-filos. Classe 1901, No. 1—6. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. Bd. 45. 1901/02. 1902. 8⁰.

Lloyd Museum and Library in Cincinnati:

Bulletin. No. 4. 5. 1902. 8⁰.
Mycological Notes No. 9. 1902. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mitteilungen. N. F. Band. VI. Jahrg. 1901 und 1902. 1902. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Mitteilungen. Jahrg. 1. 1902. No. 1—4. 8⁰.

Academy of natural sciences in Davenport:

Proceedings. Vol. VIII. 1901. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

The Proceedings. Vol. VI. 1897—1900. 1901. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. IX, 4. 1902. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Vol. 23, trimestre 2. 1902. 8⁰.

K. sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XXIII. 1902. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

F. v. Bellingshausens Forschungsfahrten im Südlichen Eismeer 1819—1821. Leipzig 1902. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. III[d] Series. Vol. VI, part 4; Proceedings. Vol. 24, Section A, part 1; Section B, part. 1. 2. 1902. 8⁰.
Transactions. Vol. 32, Section A, parts 3—5; Section B, part 1. 1902. 4⁰.

Pollichia in Dürkheim:

Mitteilungen. Jahrg. 1902, No. 15—17. 1902. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. XXIV, No. 7—12. 1902. 8⁰.
25th Anniversary. 1902. 8⁰.

Royal Observatory in Edinburgh:

Annals. Vol. I. 1902. 4⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXIV, No. 3. 1902. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1900—1901. 1902. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 16. Jahrg. 1902. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

86. Jahresbericht für 1900/01. 1902. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie. Vol. 25, disp. 2. 1902. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale 1902. Vol. XV. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XXV, 3; Bd. XXVII, 1. 1902. 4⁰.
Bericht. 1902. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1900—1901. 1902. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

Schau-ins-Land 1902. 29. Jahrg. Halbband I. 1902. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diözesan-Archiv. Register zu Bd. I—XXVII. 1902. 8⁰.

Universität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Fasc. XIII. 1902. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1901/02.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Vol. 34, fasc. 2. 1902. 4⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mitteilungen. N. F. Bd. XI. 1902. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1902, No. 6—12. Berlin. gr. 8.
Abhandlungen. N. F.
a) Philol.-hist. Classe. Bd. V, No. 3. 4; Bd. VI, No. 1—3.
b) Math.-phys. Classe. Bd. II, No. 3. Berlin 1902. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1902, Heft 3. 4 und Beiheft. 4⁰.
b) Math.-phys. Classe. 1902, Heft 4. 5. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1902, Heft 1. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:

Göteborgs Högskolas Årsskrift. Bd. VII. 1901. 1901. 8⁰.
Handlingar. 4. Folge. Bd. 4. 1902. 8⁰.

Scientific Laboratories of Dension University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XI, 11; Vol. XII, 1. 1902. 8⁰.

Universität in Graz:

Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1901/02. 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1901, Heft 38. 1902. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommerische Jahrbücher. Bd. 3. 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 33. Jahrg. 1901. Berlin 1902. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel X, afl. 3. 4. 1902. 8⁰.
Naamlijst der leden. 1902. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 8, partie 1. 1902. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II. Tom. 7, livr. 2—5. 1902. 8⁰.
Herdenking van het 150 jarig bestaan. 1902. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 38, No. 6—11. 1902. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 56, Heft 3. Leipzig 1902. 8⁰.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. XI, 4. Leipzig 1902. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Thüringisch-sächsischer Verein zur Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. XXI, 2. 1902. 8°.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Veröffentlichungen aus dem Jahre 1901 in 4° u. 8°.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Bd. XI, 2. 1902. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Bd. XVII. 1902. 4°.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1902. Heft 1—3. 8°.

Universität Heidelberg:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XI, Heft 2. 1902. 8°.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. VII, 2. 1902. 8°.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XVII. 1902. 4°.

Commission géologique de Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 12. 13. 1902. 8°.
Carte géologique à 1:400,000. Section C 2. St. Michel 1902. 8°.
Meddelanden från Industristyrelsen Finland. No. 32. 33. 1902. 8°.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. 51. Jahrg. 1901. 1902. 8°.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. Heft 41 und 42. 1902. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Bd. 46. 1902. 8°.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. XXVII. Jahrg. 1901/02. 1902. 8°.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 6, No. 4—9. 1902. gr. 8°.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Bd. IX, Liefg. 1. Text und Atlas. 1902. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 36, Heft 3. 4; Bd. 37, Heft 1. 1902. 8°.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1901. 1902. 8°.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Archiv für die Naturkunde Liv-, Ehst- und Kurlands. II. Serie. Biologische Naturkunde. Bd. XII, 1. 1902. 8°.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Oberrheinische Stadtrechte. I. Abt., Heft 6. Heidelberg 1902. 8°.
Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F. Bd. XVII, 3. 4. Heidelberg 1902. 8°.
Neujahrsblätter 1903. Heidelberg. 8°.
Bericht über die 21. Plenarversammlung. Heidelberg 1902. 8°.

Zentralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1901. 1902. 4°.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Grossh. badische Staats-Altertümersammlung in Karlsruhe:

Veröffentlichungen. 3. Heft. 1002. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. XV. Band. 1901—1902. 1902. 8°.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. IIe Série. Tom. XI, No. 1—4; Tom. XII, No. 1. 1901—1902. 8°.

Universität Kasan:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.
Utschenia Sapiski. Bd. 69, Heft 5—8. 11. 1902. 8°.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLVII. 1902. 8°.

Société mathématique in Kharkow:

Communications. 2e Série. Tom. VII, No. 6. 1902. gr. 8°.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1902. Vol. 2—4. 8°.

Gesellschaft für Schleswig-Holsteinische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. XXXII. 1902. 8°.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. VI. Abteilung Kiel. 1902. fol.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in Kiew:

Sapiski. Bd. XVII, 1. 1901. 8°.

Botanischer Garten in Kiew:

Index Kewensis. Fasc. II. Bruxelles 1902. 4°.

Universität in Kiew:

Iswestija. Vol. 42, No. 3. 5—10. 1902. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht über 1901. 1902. 8⁰.
Carinthia I. 92. Jahrg. No. 1–6. 1902. 8⁰.

Siebenbürgischer Museumsverein in Klausenburg:

Sitzungsberichte der medizin.-naturwissenschaftl. Sektion. 27. Jahrg. Bd. XXIV, Abt. I, Heft 1. 2. 1902. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mitteilungen. Heft 31. 1902. 8⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1902. No. 2—5. 8⁰.
Mémoires. Section des sciences. Série VIᵉ. Tom. X, 4; Tom. XI, 2—4; Tom. XII, 1. 2. 1902. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. Juni und Juli 1902, 4 Hefte. 8⁰.
a) histor.-filoz. Serie II. Tom. 16. 18.
b) matemat. Serie II. Tom. 19. 1902. 8⁰.
Sprawozdanie. Vol. VII, 7. 1902. 8⁰.
Katalog literatury naukowej polskiej. Tom. II, 1. 2. 1902. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. 38. Bd. 1902. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 4ᵉ Série. Vol. 38, No. 144. 1902. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:

Mémoires et Documents. II. Série. Tom. 4, livr. 2; Tom 5. 1902. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

Bulletin. Vol. 2, No. 8. 1902. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. S. Deel XX, 3. 4; Deel XXI, 1. 2. 1901—1902. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1901—1902. 1902. 8⁰.
Levensberichten 1901—1902. 1902. 8⁰.

Sternwarte in Leiden:

Annalen. Bd. VIII. Haag 1902. 4⁰.
Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols von Anton Pannekoek. 1902. 4⁰.
Catalogus der Bibliothek. s'Gravenhage 1902. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXVII, No. 7—9. 1902. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Bd. 54, No. 1. 2. 1902. 8⁰.
Berichte der math.-phys. Classe. Bd. 54, No. 3—5 und Sonderheft. 1902. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

15th annual Report. 1902. 8⁰.
Bulletin. No. 69. 70; 72—74. 1901—1902. 8⁰.

Verein für Geschichte des Bodensees in Lindau:

Bodensee-Forschungen. IX. Abschnitt (die Vegetation des Bodensees). II. Teil. Lindau 1902. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

60. Jahresbericht. 1902. 8⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XVI, 3. 1902. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. No. 67 und 68; Vol. XVII. 1902. 8⁰.

Royal Society in London:

Report to the Malaria Committee. 7th Series. 1902. 8⁰.
Proceedings. Vol. 70, No. 463—469. 1902. 8⁰.
Philosophical Transactions. Series A. Vol. 197. 198; Series B. Vol. 174. 1901. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 62, No. 8. 9; Vol. 63, No. 2. 1902. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 477 (August 1902) bis No. 482 (Jan. 1903). 8⁰.
Proceedings. Vol. 18, No. 255—257. 1902. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. 114th Session November 1901 to June 1902. London. 8⁰.
The Journal. a) Botany. Vol. 35, No. 245; b) Zoology. Vol. 28, No. 179 bis 180. London 1902. 8⁰.
The Transactions. 2nd Series. Zoology. Vol. VIII, part 5—8; Botany. Vol. VI, part 2. 3. 1902. 4⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1902. Part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1902. Vol. I, part 1. 2; Vol. II, part 1 und Index. 1891—1900. 1902. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, 6. 7. 1902. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1705—1730. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 29, livr. 3. 1902. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. IIIe Série. Tom. 4. Bruxelles 1902. 8^0.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXXVII, Abt. I. II. 1901. 4^0.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 57. Stans 1902. 8^0.

Académie des sciences in Lyon:

Le deuxiéme Centenaire de l'Académie des sciences de Lyon. 2 Vols. 1900—1901. 8^0.

Mémoires. Sciences et Lettres. IIIe Série. Tom. 6. Paris 1901. 8^0.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:

Annales. VIIe Sér. Tom. 7, 1899; Tom. 8, 1900. 1901. 8^0.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Tom. 47. 48 (1900. 1901). 1901. 8^0.

Université in Lyon:

Annales. I. Sciences. Fasc. 8. 9. 1902. 8^0.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 41, cuad. 1—6. 1902. 8^0.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen 1900—1902. 1902. 8^0.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie. II. Vol. 34. 1901. 8^0.

Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. 19, fasc. 5—8. 1902. 4^0.

Comitato per le Onoranze a Francesco Brioschi in Mailand:

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tom. II. 1902. 4^0.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 41, fasc. 2. 3. 1902. 8^0.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III, fasc. 34. 35. Anno 29. 1902. 8^0.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 47, part 1. 1902. 8^0.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4^0 u. 8^0.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. XII. Paris 1902. 4^0.

Hennebergischer altertumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Altertums. Heft 16 und 17. 1902. 8^0.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XV. (New Series.) Part 1. 1902. 8^0.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. 1901. Agosto—Octobre. 4°.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

Informes presentados a la Secretaria de fomento. 3 voll. 1902. 8°.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y revista. Tomo XVI, No. 4—6. 1902. 8°.

University of Missouri:

Studies. Vol. I, No. 2. Columbia 1902. 8°.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:

Propiedad y tesoro de la Républica Oriental del Uruguay desde 1876 à 1881. 1886. 4°.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des sciences. 2e Série. Tom. III, No. 1. 1901. 8°.
Catalogue de la Bibliothèque. 1901. 8°.

Lazarev'sches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Arbeiten zur Kunde des Ostens (in russ. Sprache). Bd. XI. 1902. 8°.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1901, No. 3. 4. 1902. gr. 8°.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXII, 2—4; Bd. XXIII, 1. 2. 1901 bis 1902. 8°.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 20—26. 1902. 4°.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener Jahresübersichten für 1901. 1902. 4°.
Die Volk- und Wohnung-Zählung. Teil III. 1902. 4°.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch 1901. Teil II, Heft 4; 1902, Heft 1—3. 4°.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Preisverzeichnis der Zeitungen. I. Abt. und 7 Nachträge. 1902. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1902/03. 1902. 8°.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1902, No. 17—30. 8°.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1902 in 4° u. 8°.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Winter-Semester 1902/03. 1902. 8°.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. XI, 1901. 1902. 8°.

Bayer. Dampfkesselrevisions-Verein in München:

Jahresbericht für das Jahr 1901. 1902. gr. 8°.

Historischer Verein in München:

Oberbayerisches Archiv. Bd. 51, Heft 2. 1902. 8⁰.
Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. III, Heft 6. 1902. 4⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. No. 142—144. 146. 147. 1902. 4⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. Année 151. 5ᵉ Série. Tom. 18. 1901. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série III, tom. 2, fasc. 3. 4; tom. 3, fasc. 1. 1901—1902. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie III. Vol. VII, fasc. 6. 7. 1902. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 64. Jahrg. 1902. 8⁰.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 51, part 3. 4; Vol. 52, part 1. 1902. 8⁰.
Annual Report for the year 1901/02. 1902. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser. Vol. 14, No. 80—84. 1902. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXII, 1. 1902. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. XVII, 1 und 2. 1902. 8⁰.
Annual Report for the year 1901. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 34, No. 3. 4. 1902. 8⁰.

Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:

Prodromus Florae Batavae. Vol. I, pars 2. 1902. 8⁰.
Nederlandsch kruidkundig Archief. III. Serie. Deel 2, stuk 3. 1902. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. II. Series. Vol. VI, 2—4 und Suppl. zu Vol. VI. 1902. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Bd. IV. 1902. 8⁰.
Jahresbericht für 1900. 1901. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 26. Bd., 1901. 1902. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Catalogue of Canadian Plants. Part VII. 1902. 8⁰.
The Dominion of Canada Western Sheet No. 783. 1902.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. IIᵈ Series. Vol. VII. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Rivista periodica. No. 36—65 (1870—1884). 8⁰.
Indice generale zu 1779—1899/1900. 1901. 8⁰.
Elenco delle Publicazioni periodiche dal 1779 al presente. 1902. 8⁰.
Atti e Memorie. Anno 259 (1893—1894). Nuova Serie. Vol. 10. 1894. 8⁰.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica“ in Padua:

N. S. Anno VI, fasc. 3. 4. 1902. 8⁰.

Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti in Palermo:

Atti. Serie III. Vol. 6. Anno 1900—1901. 1902. 4⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo XVI, 3—6. 1902. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti 1902. (Genuaio—Luglio.) 1902. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Rapport annuel de la commission de l'hygiéne pour l'année. 1900 et 1901. 8⁰.
Rapport sur les vaccinations pour l'année 1899 et 1900. Melun 1900 bis 1901. 8⁰.
Bulletin 1902. No. 27—43. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 135, No. 1—26. 1902. 4⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. 2ᵉ Série. Cahier 7. 1902. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Travaux et Mémoires. Tom. XII. 1902. 4⁰.
Procès-verbaux des séances. IIᵉ Série. Tom. 1. Session de 1901. 1902. 8⁰.

Institut de France in Paris:

Annuaire pour 1902. 8⁰.

Comité du Cinquantenaire scientifique de M. Berthelot à Paris:

Cinquantenaire scientific de M. Berthelot. 24. Novembre 1901. 1902. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 728—732. 1902. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales in 4⁰. Tom. XXX, 1. 2. 1902. 4⁰.
Annales. Bibliothèque d'études. Tom. 10. 13. 1901. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 43, No. 3; Tom. 44, No. 1—3; Tom. 45, No. 1. 3. 1901—1902. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1901, No. 4—8; 1902, No. 1—4. 1901—1902. 8⁰.
Nouvelles Archives. IVᵉ Série. Tom. 2 und 3; Tom. 4, fasc. 1. 1900 bis 1902. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 5ᵉ Série. Tom. 2, 1901, fasc. 2—6; 1902, fasc. 1. 2. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1902, No. 7. Juillet. 4°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 30, fasc. 2. 3. 1902. 8°.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Comptes rendus des séances de la Commission Sismiquae. Année 1902. Livr. 1. 1902. 4°.
Catalogue de l'Académie Imp. des sciences I. 1902. 8°.
Annuaire du Musée zoologique. 1902. Tom. VII, No. 1—2. 8°.
Iswestija. Tom. 13, No. 4. 5; Tom. 14, No. 1—5; Tom. 15, No. 1—5; Tom. 16, No. 1—3. 1900—1902. 4°.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XX, No. 7—10; Vol. XXI, No. 1—4. 1901—1902. 8°.
Mémoires. Vol. XV, 4; Vol. XVII, 1. 2; Vol. XVIII, 3; Vol. XIX, 1 et XX, 2. 1902. 4°.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta. Vol. XIX, fasc. 3. 1902. gr. 8°.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 39, Liefg. 2. 1902. 8°.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXXIV, Heft 5—8. 1902. 8°.

Physikalisches Zentral-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen 1900. Teil I. II. 1902. 4°.

Historisch-philologische Falkultät der kaiserlichen Universität St. Petersburg:

Sapiski. Bd. L, No. 3; Bd. LIV, No. 2. 3; Bd. LXIV; Bd. LXV, No. 1—3; Bd. LXVI. 1902. 4°.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 53, part 3; Vol. 54, part 1. 1902. 8°.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 26, No. 103. 1902. 8°.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 38, No. 7—12. 1902. 8°.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 41, No. 168. 169. 1902. 8°.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. XV. 1902. 8°.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. XVIII. 1902. 4°.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V. Tom. 3 (Juni); Tom. 4 (Juli—Nov.). 1902. 8°.

Altertumsverein in Plauen:

Mitteilungen. 15. Jahresschrift für 1901—1902. 1902. 8°.
Das Amt Plauen von C. v. Raab. 1902. 8°.

Maharaja Takhtasingji Observatory in Poona:

Publications. Vol. I. Bombay 1902. 4°.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Czapek, Untersuchungen über die Stickstoffgewinnung der Pflanzen. Braunschweig 1902. 8°.
Czapek, Zur Kenntnis der Stickstoffversorgung bei Aspergillus niger. Berlin 1902. 8°.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 13. 1902. 8°.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Bericht für das Jahr 1901. 1902. 8°.
Časopis. Bd. 76 (1902), Heft 2—4. 8°.

Société des amis des antiquités bohèmes in Prag:

Jan Herain et J. Matiegka, Tycho Brahe. 1902. 8°.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mitteilungen. Bd. 40, Heft 1—4 und Festschrift zum 40jährigen Bestande. 1902. 8°.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd XXXII. Jahrg. 1901. 1902. 8°.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. No. XLV. 1902. 8°.

Museu nacional in Rio de Janeiro:

Archivos. Vol. X. XI. 1899—1901. 4°.

Bibliotheca nacional in Rio de Janeiro:

Magalhães, A Confederação dos Tamoyos. Poema 1856. 4°.
Relatorio apresentado pelo Director da Bibliotheca Nacional em 1901. 1901. 4°.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1902. Anno XVII. 8°.
Boletim mensal. Julho—Dez. 1901; Janeiro—Junho 1902. 1902. 4°.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. X, parte 2, fasc. 4—9. Notizie degli scavi. 1902. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. XI, fasc. 5—10. 1902. 8°.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 40, 1° semestre, fasc. 12; 2° semestre, fasc. 1—11. 1902. 4°.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 1. Giugno 1902. Vol. II. 1902. 4°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 55. 1901—1902. Sessione I—VII. 1902. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Vol. 33, No. 1—3. 1902. 8°.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XVII, Heft 1. 2 und Register zu Bd. I—X. 1902. 8°.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Serie II. Vol. XIII, 1; Vol. XVIII, 1. 1901—1902. 4°.

K. italienische Regierung in Rom:

Le Opere di Galilei. Vol. XII. Firenze 1902. 4°.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXV, fasc. 1. 2. 1902. 8°.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Académie des sciences in Rouen:

Précis des travaux. Année 1900—1901. 1902. 8°.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 8, fasc. 2. 1902. 8°.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tom. IV, No. 2. 3. Hanoi 1902. gr. 8°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mitteilungen. 42. Vereinsjahr. 1902. 8°.

Historischer Verein in St. Gallen:

Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. Bd. XXVIII. 3. Folge. 1902. 8°.
Neujahrsblatt 1902. 4°.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

13th annual report. 1902. 8°.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Almanaque nautico para el año 1904. 1902. 4°.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Occasional Papers. Vol. VIII. 1901. 8°.
Proceedings. Zoology, Vol. II, No. 9—11; Vol. III, No. 1—4; Botany, Vol. II, No. 3—9. 1902. 8°.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 67. Jahrg. 1902. 8°.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXV, 1902, No. 6—11. 8°.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Månadsblad. 26. Jahrg. 1897. 1902. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Jac. Berzelius-Självbiografiska Anteckningar. 1902. 8⁰.
Minnefesten öfver Berzelius. 1901. 8⁰.
N. C. Dunér, Tal.. Tycho Brahe. 1901. 8⁰.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. 1897, Bd. 39. 1902. 4⁰.
Öfversigt. Vol. 58 (1901). 1901—1902. 8⁰.
Handlingar. N. F. Bd. 35. 1901—1902. 8⁰.
Bihang til Handlingar. Vol. 27. 1901—1902. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 24, Heft 5—6. 1902. 8⁰.

Institut Royal géologique in Stockholm:

Sveriges geologiska undersöckning. Sér. Aa, No. 115. 117; Sér. Ac, No. 1 bis 4. 6; Sér. Ba, No. 6; Sér. Bb, No. 9; Sér. C, No. 172. 180. 183 bis 192; Sér. Ca, No. 1. 2. 1902. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Tom. 36, 1902, No. 6—9. 8⁰.

Kaiserl. Universität in Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

K. württemberg. Kommission für die internationale Erdmessuug in Stuttgart:

Relative Schweremessungen II. von K. R. Koch. 1902. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. XI. Jahrg., 1902, Heft 1 bis 4. 8⁰.

K. württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. 1902. 4⁰.
Statistisches Handbuch für das Königreich Württemberg. 1902. 8⁰.

West Hendon House Observatory in Sunderland:

Publications No. II. 1902. 4⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1901. 1902. fol.
Handbook to the Mining and Geological Museum, by George W. Card. 1902. 8⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. VII, 2. 1902. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 35. 1901. 8⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

The Proceedings. Vol. XXV, 1—4; Vol. XXVI, 1—4; Vol. XXVII, 1. 1900 bis 1902. 8⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications No. 8. 9. 1902. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Geschichte des Christentums in Japan von Hans Haas. Teil I. 1902. 8°.
Mitteilungen. Bd. IX, Teil 1. 1902. 8°.
Festschrift zur Erinnerung an das 25jährige Stiftungsfest. 1902. 8°.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. XVI, 2—14; Vol. XVII, 3 und No. 7—10; Vol. XVII, part II. 1902. 4°.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. 5, No. 1. 2. 4. 1902. 4°.

University of Toronto:

Studies. Biological, Series No. 2. 1901. 4°.
Review of Historical Publications rel. to Canada. Vol. VI. 1901. 4°.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. XIVe Année, No. 51—54. 1902. 4°.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série. Tom. 3; Tom. 4, fasc. 1. 2. Paris 1901—1902. 4°.
Bibliothèque méridionale. 2e Série. Tom. 7.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XVII, fasc. und Indice zu I—XVI. 1902. 8°.

Kaiser Franz Josef-Museum in Troppau:

Jahresbericht 1901. 1902. 8°.

Universität Tübingen:

Wilh. Schmid, Verzeichnis der griech. Handschriften der Universitätsbibliothek Tübingen. 1902. 4°.
Christian Seybold, die Drusenschrift Kitâb alnoqat. Kirchheim 1902. 4°.

Tufts College Library in Tufts Coll. Mass.:

Studies. No. 7. 1902. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Tom. 37, disp. 11—15. 1902. 8°.

K. Universität in Upsala:

Bidrag till Sveriges Medeltidshistoria, tillegnade. C. G. Malmström. 1902. 8°.
Eranos. Acta philologica suecanea. Vol. 4, fasc. 2—4. 1902. 8°.
Urkunder och Töfattningar angående Donationer vid Upsala K. Universitet. 1902. 8°.
Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1902. 8°.
Verslag 1902. 8°.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. IV, 1. 1902. 8°.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Anno XXI, Vol. 1, fasc. 3; Vol. 2, fasc. 1—3; Anno XXII, Vol. 1, fasc. 1—3; Vol. 2, fasc. 1—3. 1898—1899. 8°.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tom. 56, disp. 8—10; Tom. 58, disp. 1—5; Tom. 59, disp. 1. 2 und Suppl. al Tom. 57. 1897—1898. 8⁰.
Memorie. Vol. XXVI, No. 3—5. 1899. 4⁰.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Serie IV. Vol. II. 1901—1902. gr. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace Matematyczno-fizycne. Tom. 13. 1902. 8⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VIII, 6th Memoir. 1902. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

Bulletin. No. 26. 1902. 4⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

North American Fauna. No. 22. 1902. 8⁰.
Yearbook 1901. 1902. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report of the U. S. National Museum. 1899—1900. 1902. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1174. 1259. 1312—1314. 1902. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. Vol. II. 1902. 4⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report 1899/1900. 1901. 4⁰.
Annual Report for 1901. 1902. 4⁰.
The Eastern oblique Arc of the United States. 1902. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 177—190; No. 192—194. 1901—1902. 8⁰.
21th Annual Report 1899—1900. Part 5 und 7. 1900. 4⁰.
The Geology and Mineral Resources of the Copper River District, Alaska. 1901. 4⁰.
Reconnaissances in the Cape Nome and Norden Bay Regions, Alaska, in 1900. 1901. 4⁰.
Mineral Resources of the United States 1900. 1901. 8⁰.

K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei in Weihenstephan:

Bericht für das Jahr 1901/02. Freising 1902. 8⁰.

Savigny-Stiftung in Weimar:

Zeitschrift für Rechtsgeschichte. 23. Bd. der romanistischen und der germanistischen Abteilung. Weimar 1902. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Südarabische Expedition. Bd. III. IV. 1901. 4⁰.
Sitzungsberichte. Mathem.-naturwissensch. Classe.
Abt. I, Bd. 110, Heft 5—7.
„ IIa, „ 110, „ 8—10.
„ IIb, „ 110, „ 8. 9.
„ III, „ 110, „ 1—10. 1901. 8⁰.
Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Bd. 47.
Denkschriften. Mathem.-naturwissensch. Classe. Bd. 70. 1902. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 91, 1. Hälfte. 1902. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen 1902. No. 7—10. 4°.
Abhandlungen. Bd. VI, Abt. 1, Suppl.-Heft. 1902. fol.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F. No. 7. 8. 1902. 8°.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Bd. 47. Jahrg. 1902. (N. F. Bd. 39.) 1902. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1902, No. 29—52. 4°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 52, Heft 6—10. 1902. 8°.
Abhandlungen. Bd. II, Heft 1. 1902. 4°.

K. K. Oesterr. archäologisches Institut in Wien:

Sonderschriften. Bd. III. Kleinasiatische Münzen von F. Imhoof-Blumer. 1902. 4°.

K. K. militär-geographisches Institut in Wien:

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd. XVIII. Wien 1902. 4°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XVII, 1. 2. 1902. gr. 8°.

K. K. Universität in Wien:

Schriften aus dem Jahre 1901/02.

K. K. Sternwarte in Wien:

Annalen. Bd. XIV. XVII. 1900—1902. 4°.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 55. 1902. 8°.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXXV, No. 2. 3. 1902. 8°.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1901, No. 5—7; 1902, No. 1. 2. 1901—1902. 8°.

Schweizerische meteorologische Zentralanstalt in Zürich:

Annalen 35. Jahrg. 1900. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 47. Jahrg., Heft 1. 2. 1902. 8°.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Materiaux pour la carte géologique de la Suisse. N. Sér. Livr. XIII. Berne 1902. 4°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. IV, No. 1. 1902. gr. 8°.
J. R. Rahn, Zur Statistik schweiz. Kunstdenkmäler. Bogen XV. 1902. gr. 8°.
10. Jahresbericht 1901. 1902. 8°.

Sternwarte des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich:

Publikationen. Bd. III. 1902. 4°.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4° u. 8°.

Von folgenden Privatpersonen:

Henrik Afzelius in Stockholm:

Erik Benzelius II. Stockholm 1902. 8⁰.

Buchhandlung Joh. Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1902, No. 8—12. Leipzig 1902. 8⁰.
Journal für praktische Chemie. N. F. Bd. 65, Heft 11; Bd. 66, Heft 1—10. Leipzig 1902. 8⁰.

Franz Bayberger in München:

Geographische Studien über das nordwestpfälzische Lauterthal. Dürkheim 1902. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1902, Bd. 17, No. 41—52; Bd. 18, No. 1—13. Jena. 4⁰.

W. Gallenkamp in München:

Eine neue Bestimmung von Kapillaritätskonstanten mit Adhäsionsplatten Leipzig 1902. 8⁰.

P. J. M. van Gils in Herzogenroth (Rheinprovinz):

Quaestiones Euhemereae. Amsterdam 1902. 8⁰.

Mme Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 26 (Juli—Dec.). 1902. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Liefg. VII. Leipzig 1902. fol.

Adolf Harnack in Berlin:

Die Mission und Ausbreitung des Christentums in den ersten drei Jahrhunderten. Leipzig 1902. 8⁰.

G. N. Hatzidakis in Athen:

Ἀκαδημεικα ἀναγνώσματα. Tom. I. 1902. 8⁰.

Lachiche Hugues in Port-Louis, Maurice:

Un seul champignon sur le globe! (sur les maladies des plantes). Port Louis. 1902. 8⁰.

Charles Janet in Paris:

Notes sur les fourmis et les guèpes. Extraits des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris 1894—1900. 4⁰.

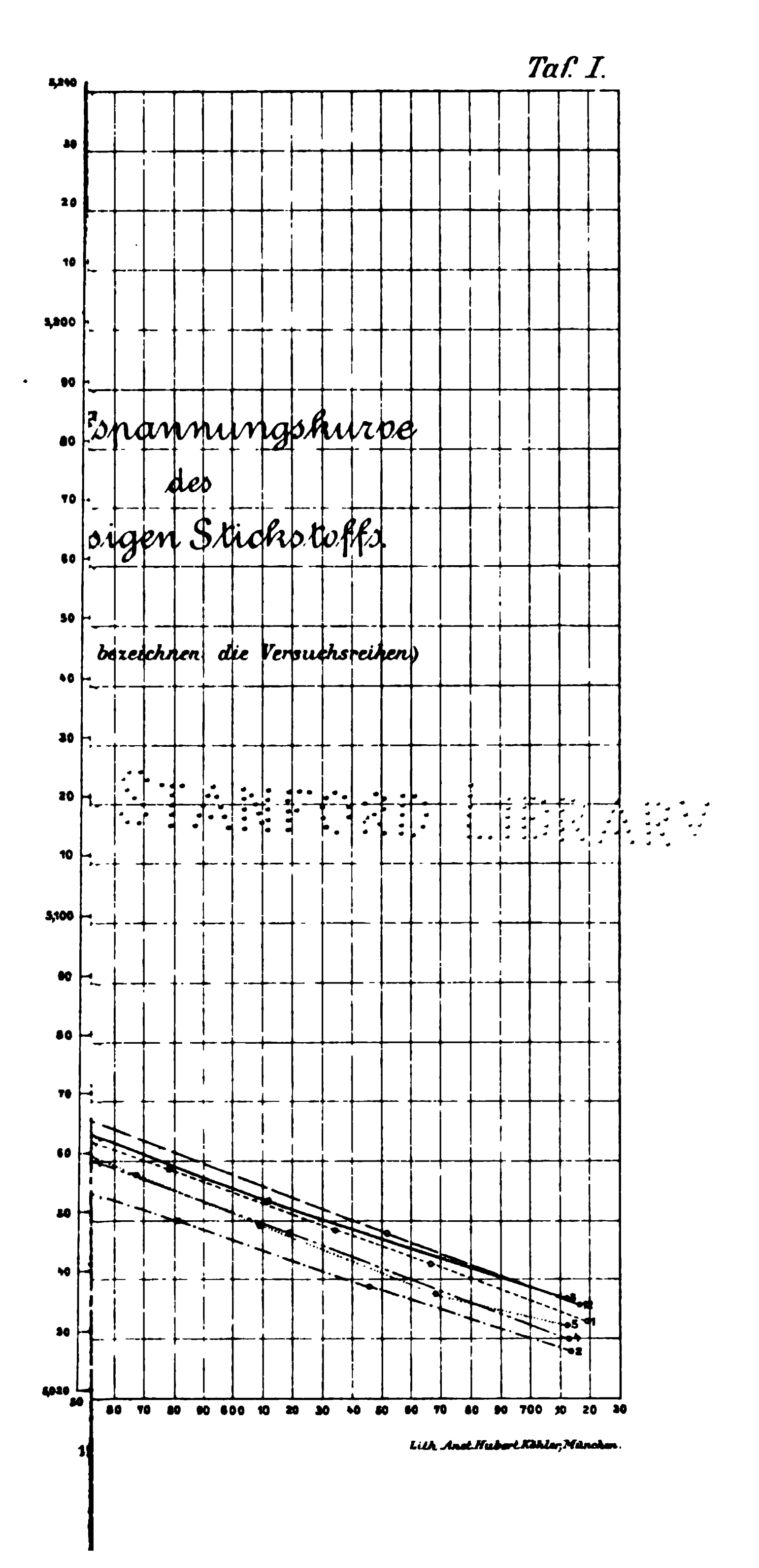
O. Kienitz und K. Wagner in Karlsruhe:

Literatur der Landes- und Volkskunde des Grossherzogtums Baden. Karlsruhe 1901. 8⁰.

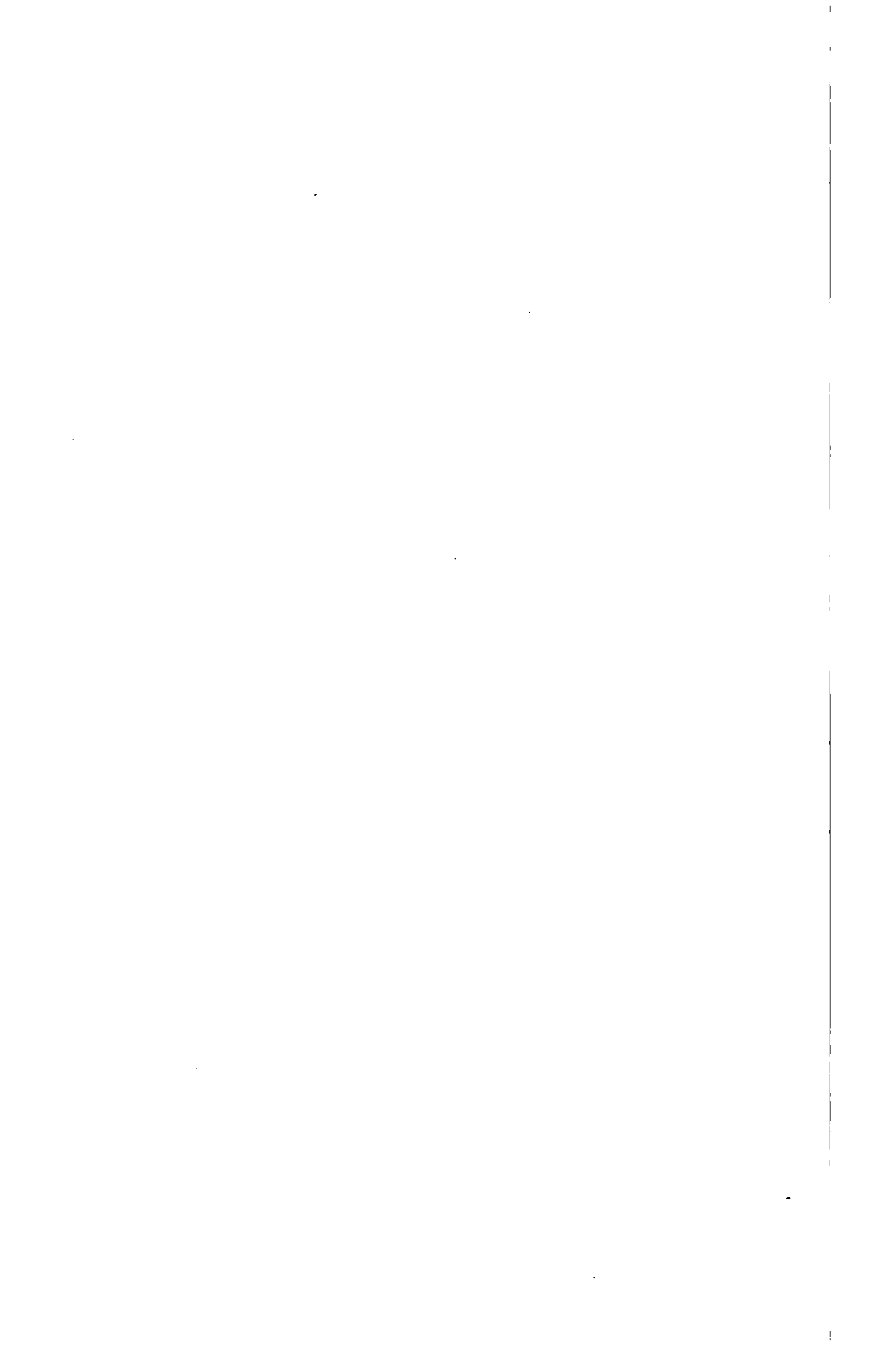
A. Kölliker in Würzburg:

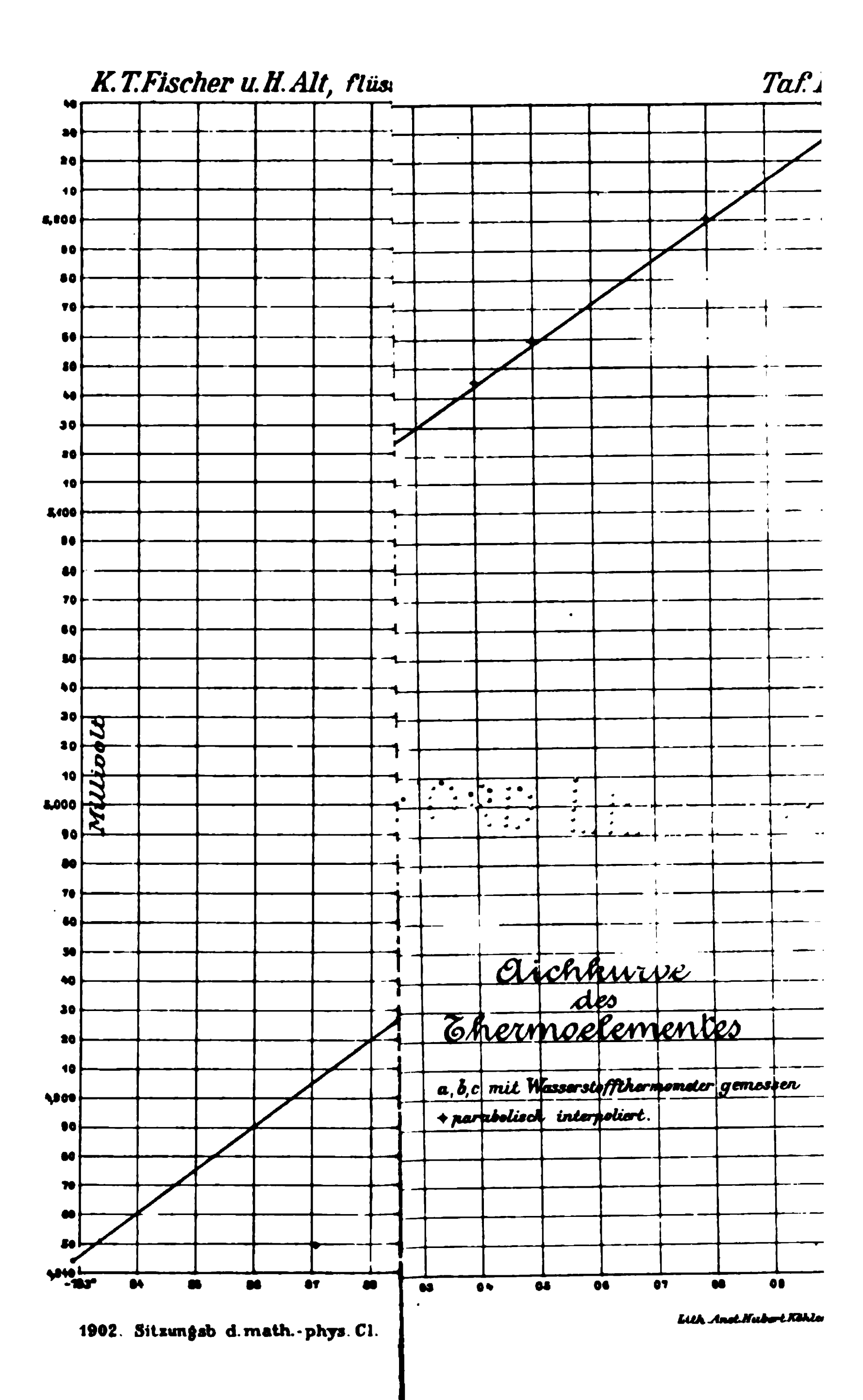
Ueber die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien. Leipzig 1902. 8⁰.

Taf. I.



Spannungskurve
des
sigen Stickstoffs.
bezeichnen die Versuchsreihen)
Lith. Anst. Hubert Köhler, München.



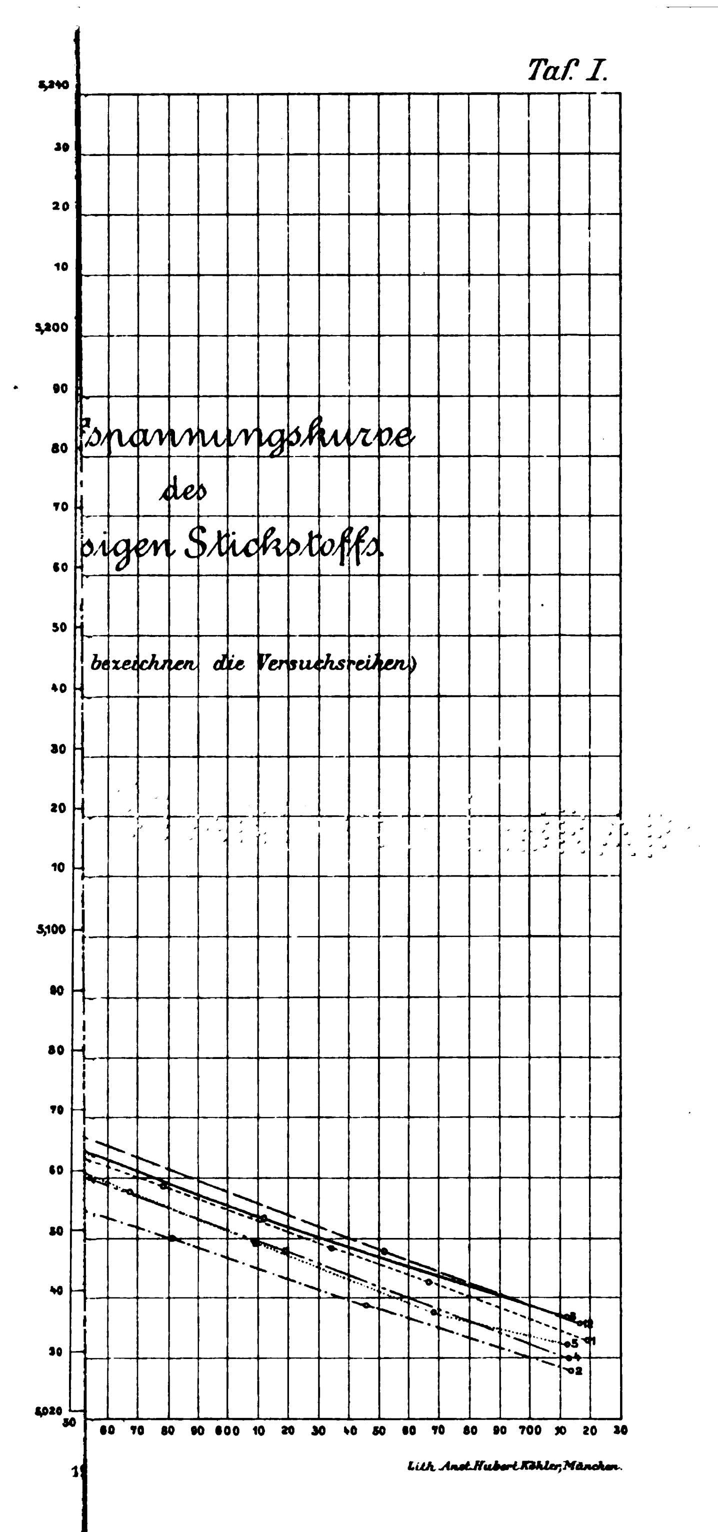

K. T. Fischer u. H. Alt, flüs
Taf.
Millivolt
Aichkurve des Thermoelementes
a, b, c mit Wasserstoffthermometer gemessen
+ parabolisch interpoliert.
1902. Sitzungsb d. math.-phys. Cl.
Lith. Anst. Hubert Köhler



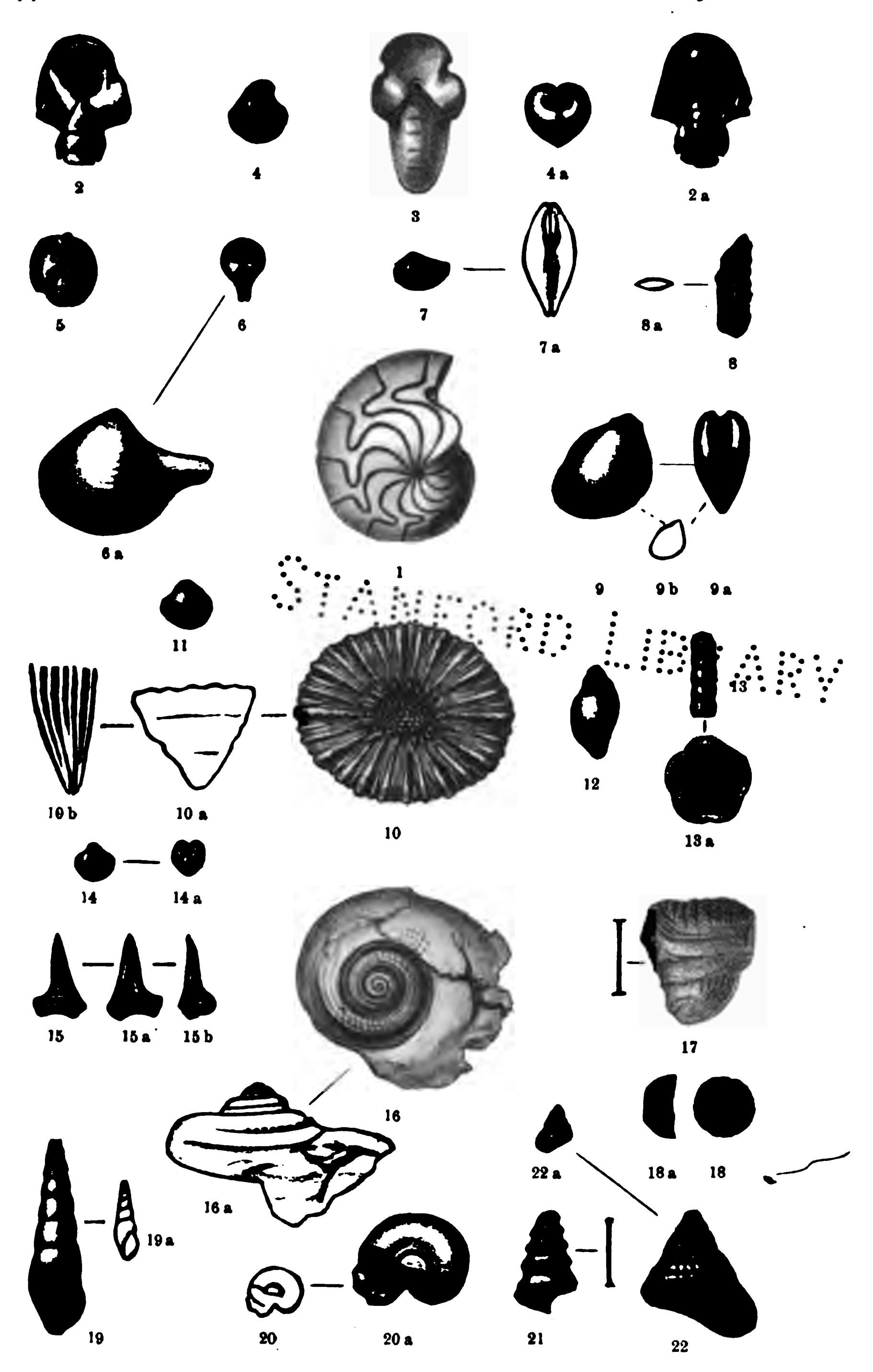




Taf. I.



Lith. Anst. Hubert Köhler, München.



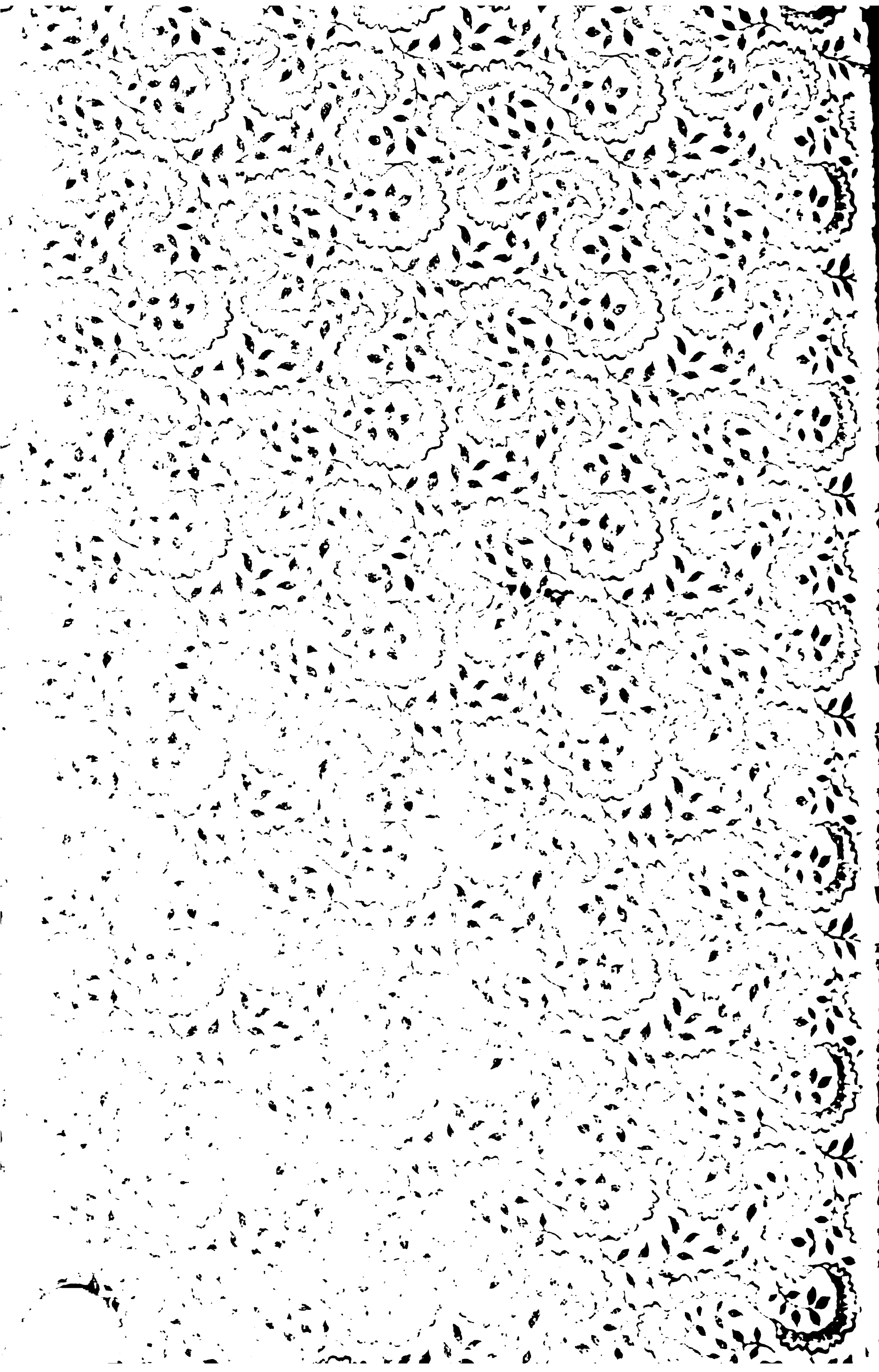
Arth. Levin del.

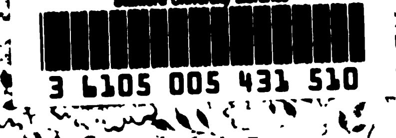
Reprod. von J. B. Obernetter, München.

Fig. 1

Fig. 2






Stanford University Libraries
3 6105 005 431 510

